УДК 514.84

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ СОВМЕСТНАЯ С ТЕОРИЕЙ ЯНГА-МИЛЛСА

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D.
Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада

В работе рассмотрена теория гравитации Эйнштейна в связи с теорией Янга-Миллса. Сформулирована модель метрики, удовлетворяющая основным требованиям квантовой теории. Обсуждается механизм генерации барионной материи из темной энергии.

Ключевые слова: АДРОНЫ, КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ, ТЕОРИЯ СТРУН, ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ ЭЙНШТЕЙНА, ТЕОРИЯ ЯНГА-МИЛЛСА, ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ, ТЕМНАЯ ЭНЕРГИЯ.

UDC 514.84

QUANTUM GRAVITY AND YANG-MILLS THEORY

Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.
Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada

In this paper, we consider Einstein's theory of gravitation in connection with Yang-Mills theory. The model of the metric satisfying the basic requirements of quantum theory is proposed. The mechanism of generation of baryonic matter of dark energy is discussed.

Keywords: GENERAL RELATIVITY, BLACK ENERGY BLACK MATTER, HADRON, YANG-MILLS THEORY, STRING-THEORY.

Введение

Как известно, общая теория относительности Эйнштейна /1-3/ является основной моделью квантовой теории гравитации /4-6/, а теория Янга-Миллса /7/ является основной моделью квантовой хромодинамики /8-9/.

И в том, и в другом случае есть определенные достижения по объяснению механизмов генерации наблюдаемой материи /3,6,9/ и существуют сходные проблемы квантования, обусловленные нелинейностью моделей /10/.

Ранее было показано, что существует связь между уравнениями Янга-Миллса и уравнениями Эйнштейна /11/. В работе /12/ получены решения уравнений Янга-Миллса в случае центрально-симметрических метрик. Метрики /12/, зависящие от эллиптической функции Вейерштрасса, были использованы для моделирования метрики адронов и динамики кварков в составе адронов и атомных ядер, а также преонов в составе лептонов и кварков /13-17/.

Следует заметить, что аналогичные метрики, зависящие от функции Вейерштрасса, содержатся и среди решений уравнений Эйнштейна /18-20/.

Уравнения гравитационного поля Эйнштейна имеют вид /1/:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = g_{\mu\nu}\Lambda + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1}$$

$R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса; Λ, G, c - космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно.

В общем случае имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
&R_{ik} = R^{j}_{ijk}, \quad R = g^{ik} R_{ik}, \\
&R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma^{\mu}_{\beta\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\delta}, \\
&\Gamma^{i}_{jk} = \frac{1}{2} g^{is}\left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^{k}} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{s}}\right)
\end{aligned} \tag{2}$$

$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ - тензор Римана, Γ^{i}_{kl} – символы Кристоффеля второго рода.

Отметим, что Эйнштейн предложил в 1912-1955 гг. несколько альтернативных теорий гравитации, среди которых теория (1) получила всеобщее признание. Множество споров вызывала космологическая постоянная, введенная Эйнштейном в 1917 г в работе /1/. Однако происхождение этого эффекта относится к одной из самых больших загадок современной физики /21-23/.

Действительно, это слагаемое могло бы возникнуть как следствие квантовых флуктуаций, но соответствующие оценки показывают, что существует огромное различие, составляющее 120 порядков между экспериментальной величиной Λ и предсказанием квантовой теории гравитации. Это различие можно несколько сократить, используя различные соображения /21/, но нельзя устранить.

Отмеченное огромное различие между фактами и теорией означает, что между геометрией микромира и геометрией в масштабе всей Вселенной нет никакой связи. Кроме того, гипотеза о зависимости геометрии от распределения материи, происхождение которой остается неизвестным даже в современной теории, представляется недоказуемой, тем более что эта гипотеза берет свое начало в теории Ньютона, феноменологической по существу. В этой связи Эйнштейн и Инфельд сформулировали программу /3/:

«Все попытки представить материю тензором энергии-импульса неудовлетворительны, и мы хотим освободить нашу теорию от специального выбора такого тензора. Поэтому мы будем иметь дело здесь только с гравитационными уравнениями в пустом пространстве, а материя будет представлена сингулярностями гравитационного поля».

Этот подход к решению проблемы происхождения материи не является единственным. Чтобы сохранить основную идею определения метрики в теории гравитации Эйнштейна, мы предположим, что уравнение Эйнштейна (1) распадается на два независимых уравнения /20/:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + k g_{\mu\nu} &= 0 \\ g_{\mu\nu}(\Lambda + k) + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь k – некоторая функция, зависящая от фундаментальных констант. Отметим, что первым уравнением определяется метрика пространства-времени, а вторым уравнением задается распределение материи, которое соответствует этой метрике. Эта гипотеза соответствует идее о происхождении материи из гравитационного поля /3-6/, но без специального предположения о наличии сингулярности метрики.

Другой возможный подход к моделированию тензора энергии-импульса состоит в использовании уравнений Янга-Миллса, которые при определенных предположениях приводят к уравнениям Эйнштейна вида /11-12/:

$$b_{ij} + b_{ji} + b\eta_{ij} = R_{ij} \tag{4}$$

Здесь $\eta_{ij} = \eta^{ij}$ - метрический тензор пространства Минковского, $b_{ij} + b_{ji} - 2(\eta^{ij} b_{ij})\eta_{ij} = T_{ij}$ - тензор энергии-импульса материи. Величины b_{ij} удовлетворяют замкнутым уравнениям движения, тем самым решается проблема определения тензора энергии-импульса.

В работе /20/ модель (3) при точном значении $k = -1$ была использована для построения метрики неоднородной вращающейся Вселенной. Был предложен механизм производства материи из темной энергии путем фазового перехода. Представленная ниже модель метрики объединяет теорию Янга-Миллса и теорию Эйнштейна при решении проблемы квантования. Такой подход позволяет охватить все многообразие материи, которую производит фабрика природы путем фазового перехода темной энергии в темную материю и в барионную материю.

Моделирование метрики адронов

Рассмотрим центрально-симметрическую метрику вида [12]

$$\begin{gathered}\Psi = \eta_{ij}\omega^i\omega^j = -e^{2\nu}dt^2 + e^{2\lambda}dr^2 + d\theta^2 + \sigma^2(\theta)d\varphi^2 \\ \frac{d^2\sigma}{d\theta^2} = -\kappa\sigma\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $\kappa = const$ - гауссова кривизна квадратичной формы $d\theta^2 + \sigma^2(\theta)d\varphi^2$, Функции $\nu = \nu(r,t),\ \lambda = \lambda(r,t)$ определяются путем решения уравнений Янга-Миллса, которые в этом случае приводятся к виду [12]

$$\begin{aligned}
&A = e^{-2\lambda}(\lambda_r \nu_r - \nu_{rr} - \nu_r^2) + e^{-2\nu}(\lambda_{tt} - \lambda_t \nu_t + \lambda_t^2)\\
&A_{rt} - \lambda_t A_r - \nu_r A_t = 0\\
&e^{-2\lambda}(A_{rr} - \lambda_r A_r) - e^{-2\nu}\lambda_t A_t - \frac{1}{2}(\kappa^2 - A^2) = 0\\
&e^{-2\nu}(A_{tt} - \nu_t A_t) - e^{-2\lambda}\nu_r A_r + \frac{1}{2}(\kappa^2 - A^2) = 0
\end{aligned} \qquad (6)$$

Решения уравнений выражаются через эллиптическую функцию Вейерштрасса. В частном случае $\nu = 0$ уравнения модели приводятся к виду [13-17]:

$$\begin{aligned}
&A_{\tau\tau} = \frac{1}{2}(A^2 - \kappa^2),\ e^{\lambda} = A_\tau, \quad \nu = 0, \quad \tau = t \pm r + \tau_0\\
&A = \sqrt[3]{12}\wp(\tau/\sqrt[3]{12}; g_2, g_3),\\
&b_{11} = -b_{22} = \frac{1}{3}A - \frac{\kappa}{6},\ b_{33} = b_{44} = \frac{1}{6}A - \frac{\kappa}{3},\ b_{12} = b_{21} = 0.
\end{aligned} \qquad (7)$$

Здесь обозначено: g_2, g_3- инварианты функции Вейерштрасса, причем $g_2 = \kappa^2\sqrt[3]{12}$; τ_0 – свободный параметр, связанный с выбором начал координат;

Метрика (7) использовалась для моделирования динамики кварков в составе адронов и атомных ядер, а также преонов в составе лептонов и кварков /14-17/. Покажем, что аналогичная метрика, зависящая от функции

Вейерштрасса, содержится среди решений первого уравнения (3) в метрике типа (5). Положим $\kappa = 1$, что соответствует специальному выбору метрики

$$\Psi = -e^{2\nu}dt^2 + e^{2\lambda}dr^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \qquad (8)$$

Отличные от нуля компоненты тензора Эйнштейна в метрике (8) равны

$$\begin{aligned} G_{00} &= e^{2\nu}, \\ G_{11} &= -e^{2\lambda}, \\ G_{22} &= -A, \\ G_{33} &= -A\sin^2\theta \end{aligned} \qquad (9)$$

Полагая $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = -kg_{\alpha\beta}$, находим уравнения поля, которые при $k = 1$ сводятся к одному уравнению $A = 1$.

Полученное уравнение $A = 1$ соответствует частному решению системы (6), при котором последние три уравнения выполняются точно при условии $\kappa = 1$.

Нам надо доказать, что между функциями $\nu = \nu(r,t), \lambda = \lambda(r,t)$, существует такая связь (уравнение состояния), что решение уравнения $A = 1$ выражается в эллиптических функциях Вейерштрасса.

Рассмотрим метрику общего вида, используемую в физических приложениях для моделирования метрики неоднородной Вселенной /20,24/

$$ds^2 = \psi(t,r)dt^2 + 2bdtdr - p(\psi)dr^2 - d\vartheta^2 - \sin^2\vartheta d\phi^2 \qquad (10)$$

Сравнивая (10) и (8) находим, что (8) следует из (10) при условиях $b = 0, \Psi \to -\Psi$. Отличные от нуля компоненты тензора Эйнштейна в метрике (10) равны

$$\begin{aligned} & G_{00} = \psi(t,r), G_{01} = G_{10} = b \\ & G_{11} = -p(\psi), \\ & G_{22}\sin^2\vartheta = G_{33}, \\ & G_{22} = G_{22}(\psi, \psi_t, \psi_r, \psi_{tt}, \psi_{rr}) \end{aligned} \qquad (11)$$

Полагая в этом случае $k = -1$, находим уравнение поля

$$-p'\psi_{tt} + \psi_{rr} = -2(b^2 + p\psi) - \frac{pp' - 2(b^2 + p\psi)p'' + p'^2\psi}{2(b^2 + p\psi)}\psi_t^{\,2} + \frac{p + p'\psi}{2(b^2 + p\psi)}\psi_r^2 \qquad (12)$$

Отметим, что уравнение (12) изменяет свой тип в зависимости от знака производной p':

в области $p' < 0$ уравнение (12) имеет эллиптический тип;

в области $p' > 0$ уравнение (12) имеет гиперболический тип;

в области $p' = 0$ уравнение (12) имеет параболический тип.

Сигнатура метрики (12) не меняется, если потребовать дополнительно $p(\psi) > 0, \psi > 0$.

В стандартной теории гравитации – смотрите, например, /25-28/, связь между компонентами тензора Эйнштейна G_{00}, G_{11} обусловлена наличием уравнения состояния материи, являющейся источником гравитационного поля. Поэтому предполагаемая связь между компонентами G_{00}, G_{11} в форме $p = p(\psi)$ означает наличие уравнения состояния у того типа материи или энергии, которая производит гравитационное поле. В современной астрофизике энергию такого типа называют темной энергии. Считается, что темная энергия соответствует основному состоянию Вселенной. Предполагая, что существует уравнение состояния, мы тем самым наделяем темную энергию определенными свойствами, позволяющими сопоставлять темную энергию с другими видами энергии и материи.

Для обычной материи изменение знака производной p' означает наличие фазового перехода. Следовательно, если темная энергия может совершить фазовый переход, то в этом случае возникают указанные выше области гиперболичности и эллиптичности уравнений поля. Действительно, рассмотрим статические решения уравнения (12), в этом случае, полагая $\psi_t = \psi_{tt} = 0$, находим

$$\psi_{rr} = -2(b^2 + p\psi) + \frac{p + p'\psi}{2(b^2 + p\psi)}\psi_r^2 \tag{13}$$

Интегрируя уравнение (13), получим

$$(b^2 + p\psi)(C - 4\psi) = \psi_r^2 \tag{14}$$

Здесь C – произвольная постоянная. Для всякой заданной функции $\psi = \psi(r)$ уравнение (14) позволяет определить функцию $p = p(r)$. Тем самым определяется в параметрическом виде уравнение состояния $p = p(\psi)$.

Предположим, что уравнение состояния можно представить в форме

$$p(\psi) = -\psi + \frac{b^2}{\psi} + \frac{g_2}{4\psi} + \frac{g_3}{4\psi^2} \tag{15}$$

Тогда решение уравнения (14) при $C = 0$ имеет вид

$$\psi = \wp(r - r_0, g_2, g_3) \tag{16}$$

Таким образом, установлено, что инварианты функции Вейерштрасса в метрике (10) связаны с уравнением состояния темной энергии. Заметим, что метрику, зависящую от эллиптической функции Вейерштрасса, впервые указал Дельсарт /18-19/.

Инварианты функции Вейерштрасса в метрике (10) могут совпадать с таковыми в метрике (7). Такое совпадение означает, что уравнения Янга-Миллса описывают поведение темной энергии с заданным уравнением состояния типа (15) при определенных ограничениях, налагаемых калибровочной симметрией. Следовательно, различие в моделировании метрики в рамках модели (3) и в теории Янга-Миллса заключается в выборе констант g_2, g_3, которые в случае теории Янга-Миллса являются произвольными, а теории Эйнштейна зависят от уравнения состояния.

Динамика частиц

Гравитационному полю точечной массы в метрике (10) соответствует решение

$$\psi = -2mr^3 + r^2 \tag{17}$$

Действительно, приведем (10) к виду сферически симметричной метрики. Для этого умножим выражение (10) на $1/r^2$, сделаем замену $r \to 1/r$ и, учитывая (17) получим

$$\begin{gathered} r^2 ds^2 = r^2\psi(1/r)dt^2 - p(\psi)dr^2/r^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2\sin^2\vartheta d\phi^2 \\ r^2\psi(1/r) = 1 - \frac{2m}{r} \end{gathered} \tag{18}$$

Используя решение (17), можно определить уравнение состояния, которое соответствует гравитационному полю точечной массы и параметры метрики (18).

Рассмотрим движение частиц в пространстве с метрикой (10). В релятивистском случае используем уравнение Гамильтона-Якоби, описывающее движение частицы в гравитационном поле /28/, имеем

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 = 0 \tag{19}$$

Здесь m – масса частицы. Используя компоненты метрического тензора (10), находим в случае $b = 0$

$$\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 - \sin^{-2}\theta\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - m^2 = 0 \tag{20}$$

Без ограничения общности положим в уравнении (20) $\theta = \pi/2$, что соответствует заданию поверхности движения, представим решение уравнения (20) в виде

$$S = Et + M\phi + S_1(r) \tag{21}$$

Здесь E, M – энергия и момент импульса частицы соответственно. Подставляя выражение (21) в уравнение (20), получим

$$S_1 = \int \sqrt{E^2 p/\psi - p(m^2 + M^2)}dr \tag{22}$$

В случае уравнения состояния (15) движение зависит от потенциала $\psi(r)$, который связан очевидным образом с гравитационным потенциалом в классической динамике, поэтому уравнения движения можно проинтегрировать в нерелятивистском случае – рис. 1.

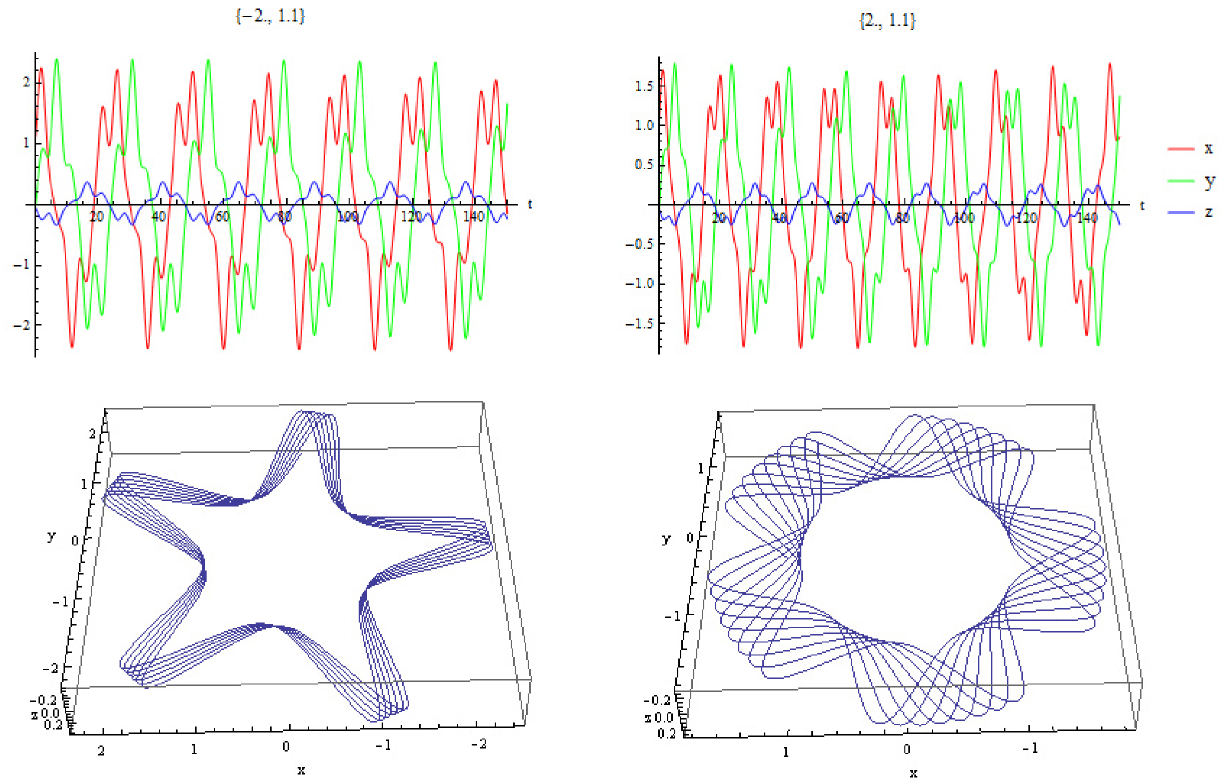

Рис. 1. Траектории пробной частицы в гравитационном поле (16). Над рисунками указаны инварианты функции Вейерштрасса g_2, g_3

Недостатком классической модели является то, что в ней необходимо вводить массу частицы, как параметр, тогда как основной задачей физики элементарных частиц является, в том числе, объяснение механизма возникновения массы.

Динамика частиц в 5-мерном пространстве и правила квантования

Развитая теория допускает обобщение на пространство любого числа измерений. Покажем это на примере теории гравитации Калуцы в 5-мерном пространстве /29-36/. Рассмотри метрику

$$ds^2 = \psi(t,r)dt^2 - p(\psi)dr^2 - d\vartheta^2 - \sin^2\vartheta d\phi^2 - \sin^2\vartheta \sin^2\phi d\chi^2 \qquad (23)$$

Здесь ϑ, ϕ, χ - углы на единичной сфере в 4-х мерном пространстве. Как известно, уравнение Эйнштейна (1) вместе с соотношениями (2) можно рассматривать без существенных изменений в 5-мерном пространстве. Используя метрику (23), представим обобщение модели (3) в виде

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k g_{\mu\nu} \qquad (24)$$

Отличные от нуля компоненты тензора Эйнштейна в метрике (23) равны

$$\begin{aligned} &G_{00} = 3\psi(t,r), \\ &G_{11} = -3p(\psi), \\ &G_{22} = G_{22}(\psi, \psi_t, \psi_r, \psi_{tt}, \psi_{rr}), \\ &G_{33} = G_{22}\sin^2\vartheta, \\ &G_{44} = G_{22}\sin^2\vartheta \sin^2\phi, \end{aligned} \qquad (25)$$

Следовательно, в этом случае $k = 3$, отсюда, полагая $G_{22} = -3$, находим уравнение поля

$$-p'\psi_{tt} + \psi_{rr} = -4p\psi - \frac{pp' - 2p''p\psi + p'^2\psi}{2p\psi}\psi_t^2 + \frac{p + p'\psi}{2p\psi}\psi_r^2 \qquad (26)$$

Сравнивая уравнение (26) с аналогичным уравнением (12), находим, что эти уравнения в случае $b=0$ различаются только сомножителем в первом слагаемом в правой части. Поэтому справедливы основные результаты, полученные для уравнения (12). Уравнение (26) изменяет свой тип в зависимости от знака производной p':

в области $p'<0$ уравнение (26) имеет эллиптический тип;

в области $p'>0$ уравнение (26) имеет гиперболический тип;

в области $p'=0$ уравнение (26) имеет параболический тип.

Рассмотрим статические решения уравнения (26), в этом случае, полагая $\psi_t=\psi_{tt}=0$, находим

$$\psi_{rr}=-4p\psi+\frac{p+p'\psi}{2p\psi}\psi_r^2 \qquad (27)$$

Интегрируя уравнение (27), имеем

$$p\psi(C-8\psi)=\psi_r^2 \qquad (28)$$

Здесь С – произвольная постоянная. Чтобы получить решение уравнения (28) в виде функции Вейерштрасса, надо взять уравнение состояния в форме

$$p(\psi)=-\frac{\psi}{2}+\frac{g_2}{8\psi}+\frac{g_3}{8\psi^2} \qquad (29)$$

Тогда решение уравнения (28) при $C=0$ имеет вид

$$\psi=\wp(r-r_0,g_2,g_3) \qquad (30)$$

Рассмотрим движение частиц в пространстве с метрикой (23). В этом случае также справедливо уравнение Гамильтона-Якоби, однако в пятимерном пространстве можно принять, что масса частицы равна нулю, имеем

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k}=0 \qquad (31)$$

Используя компоненты метрического тензора (23), находим

$$\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{p}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2-\sin^{-2}\theta\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2-\sin^{-2}\theta\sin^{-2}\phi\left(\frac{\partial S}{\partial \chi}\right)^2=0 \qquad (32)$$

Положим в уравнении (32) $\theta=\phi=\pi/2$, что соответствует заданию поверхности движения, представим решение уравнения (32) в виде

$$S=Et+M\chi+S_1(r) \qquad (33)$$

Здесь E,M – энергия и масса системы соответственно. Подставляя выражение (33) в уравнение (32), получим

$$S_1=\int\sqrt{E^2p/\psi-pM^2}\,dr \qquad (34)$$

Используя уравнение (28), находим, что в случае $C=0$ имеем $p=-\psi_r^2/8\psi^2$, следовательно, интеграл (34) можно вычислить в общем виде:

$$S_1=-\frac{\sqrt{M^2\psi-E^2}}{\sqrt{2\psi}}+\frac{M}{\sqrt{2}}\ln\left[M\left(M\sqrt{\psi}+\sqrt{M^2\psi-E^2}\right)\right] \qquad (35)$$

Зависимость радиуса от времени задается уравнением $\partial S/\partial E=const$, а траектория - уравнением $\partial S/\partial M=const$. Отсюда находим

$$\begin{aligned}t&=\frac{E}{\sqrt{2\psi}\left(\sqrt{M^2\psi-E^2}+M\sqrt{\psi}\right)}\\ \chi&=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left[M\left(M\sqrt{\psi}+\sqrt{M^2\psi-E^2}\right)\right]+\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned} \qquad (36)$$

Таким образом, в этом случае уравнения движения могут быть проинтегрированы в общем виде независимо от уравнения состояния системы. Отметим, что некоторые случаи траекторий в конформном пространстве, зависящие от эллиптической функции Вейерштрасса, были получены в работе /37/ на основе уравнения Эйлера-Лагранжа.

В случае потенциала (30) уравнения (36) описывают периодическое движение, которое повторяется на каждом периоде функции Вейерштрасса – рис. 2. Следовательно, радиусы орбит квантуются, как в теории Бора, однако это квантование не затрагивает энергию частицы. Но если потребовать, чтобы орбита была замкнутой, то появляется дополнительное условие квантования, связывающее энергию, массу и радиус орбиты в форме

$$\Delta\chi = \frac{2\pi n_1}{n_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left[\frac{\left(M\sqrt{\psi(r_1)}+\sqrt{M^2\psi(r_1)-E^2}\right)}{\left(M\sqrt{\psi(r_2)}+\sqrt{M^2\psi(r_2)-E^2}\right)}\right] \qquad (37)$$

Здесь n_1, n_2 - целые числа, r_1, r_2 - точки поворота.

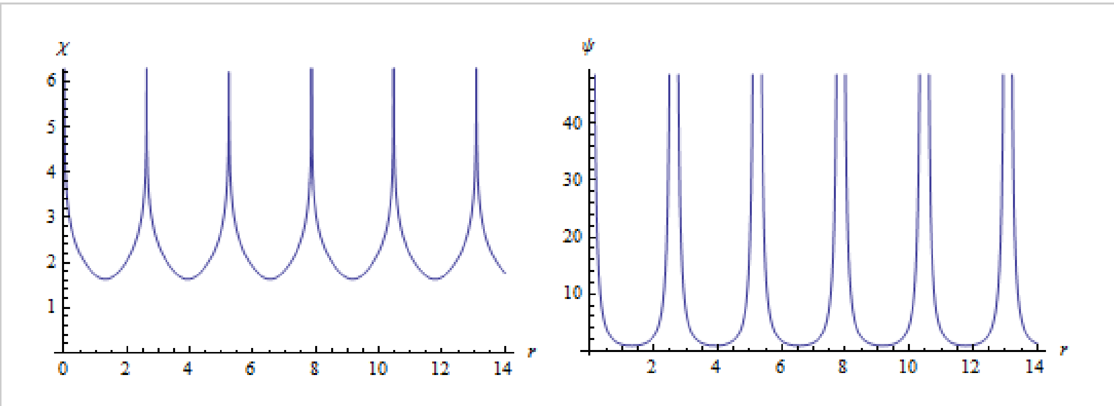

Рис. 2. Зависимость угла от радиальной координаты при движении в гравитационном поле (30). На правом рисунке представлен гравитационный потенциал – эллиптическая функция Вейерштрасса (30).

Первую точку всегда можно выбрать так, чтобы выполнялось уравнение

$$E^2 = \psi(r_1)M^2 \qquad (38)$$

В качестве второй точки возьмем половину периода функции Вейерштрасса, тогда, разрешая уравнение (37), находим

$$E = M\sqrt{\psi(\omega_1(\{g_2,g_3\}),\{g_2,g_3\})}\,/\cosh\left(\frac{2\sqrt{2}\pi n_1}{n_2}\right) \qquad (39)$$

Таким образом, энергия в данном случае зависит от пяти параметров, один из которых совпадает с массой системы.

Отметим, что Клейн /30/, Фок /31/, Румер /32/ и другие /33/, предполагали, что действие вдоль пятой координаты квантуется пропорционально постоянной Планка.

Масштаб энергии в этой задаче определяется значением функции Вейерштрасса в точке поворота траектории – рис. 3.

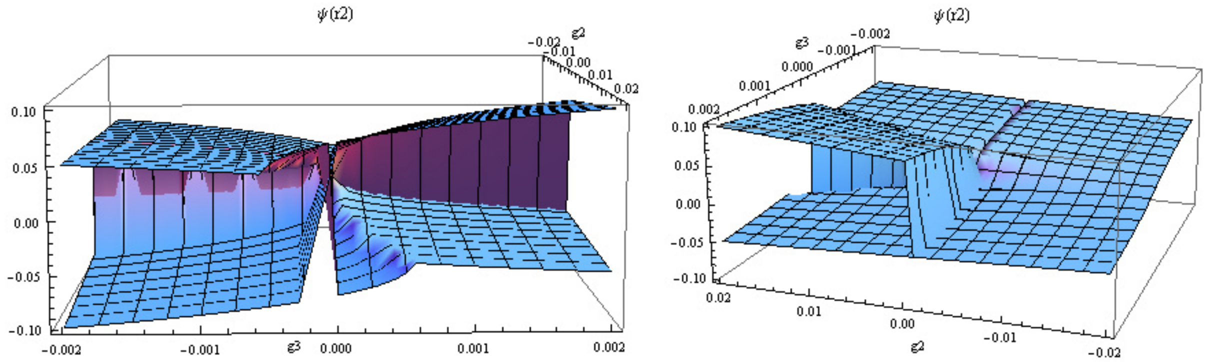

Рис. 3. Энергия связи в зависимости от инвариантов функции Вейерштрасса.

Указанная зависимость энергии связи от инвариантов функции Вейерштрасса не является однозначной, что позволяет системе обладать противоположными свойствами притяжения и отталкивания, и состояниями с малой и большой энергией связи одновременно. Отметим, что единственным источником движения в этой системе является гравитационное поле и темная энергия.

Наконец, заметим, что рассмотренная здесь метрика, зависящая от функции Вейерштрасса, имеет сигнатуру (+,+,-,-,-) в силу уравнения $p = -\psi_r^2 / 8\psi^2$. Метрика с аналогичной сигнатурой ранее была рассмотрена в наших работах /35-36/ и других, посвященных моделированию энергии связи в атомных ядрах.

Многомерные метрики и теория симметрии

Рассмотрим метрику

$$\begin{aligned} ds^2 = \psi(t,r)dt^2 - p(\psi)dr^2 - d\phi_1{}^2 - \sin^2\phi_1 d\phi_2{}^2 - \sin^2\phi_1 \sin^2\phi_2 d\phi_3{}^2 - \\ ... - \sin^2\phi_1 \sin^2\phi_2 ... \sin^2\phi_{N-1} d\phi_N{}^2 \end{aligned} \tag{40}$$

Здесь $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_N$ - углы на единичной сфере в $N+1$ - мерном пространстве. Метрика (40) описывает многие важные случаи симметрии, используемые в физике элементарных частиц и в теории супергравитации /38/. Например, 3-х сфера используется для представления $\mathrm{Sp}(1) \cong \mathrm{SO}(4)/\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SU}(2)$ симметрии; 5-сфера описывает $\mathrm{SO}(6)/\mathrm{SO}(5) = \mathrm{SU}(3)/\mathrm{SU}(2)$ и т.п. Рассмотрим гравитацию в пространствах с метрикой (40). Уравнение Эйнштейна в форме (24) и уравнение движения в форме (31) являются универсальным, поэтому обобщаются на пространство любого числа измерений в виде

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k g_{\mu\nu} \tag{41}$$

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} = 0 \tag{42}$$

Здесь параметр k зависит от числа измерений. Уравнение поля в метрике (40) имеет вид

$$-p'\psi_{tt} + \psi_{rr} = -Kp\psi - \frac{pp' - 2p''p\psi + p'^2\psi}{2p\psi}\psi_t{}^2 + \frac{p + p'\psi}{2p\psi}\psi_r^2 \tag{43}$$

Здесь параметр $K = 2$ в пространстве-времени четырех измерений, $K = 4$ в теории Калуцы. В общем случае имеем $k = D(D-5)/2 + 3,\ K = 2(D-3)$.

Возникающие в каждом пространстве формы движения также являются универсальными. Кроме рассмотренных выше связанных состояний существует и свободное движение с постоянной скоростью, которое можно определить, потребовав для уравнения (43) наличие решений вида $\psi = \psi(r + ut)$, тогда (43) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(1-u^2 p')\psi'' = -Kp\psi - \frac{pp' - 2p''p\psi + p'^2\psi}{2p\psi}u^2\psi'^2 + \frac{p + p'\psi}{2p\psi}\psi'^2 \tag{44}$$

В частном случае, выбирая уравнение состояния в виде $p = a\psi$, находим общее решение уравнения (44)

$$\psi = 2\frac{(1-au^2)}{aK}\beta^2\left(1 - \tanh^2\left[\beta(r + ut - r_0)\right]\right) \tag{45}$$

Здесь β, r_0 – произвольные постоянные. Полученное решение описывает уединенную волну, которая распространяется с постоянной скоростью в радиальном направлении. Проекция этого движения на плоскость обычного пространства (детектора) имеет форму шляпы, а в плоскости координата-время вид уединенной плоской волны – рис. 4. Если положить $p = \psi / c^2$, то метрика (45) получает зависимость от скорости как в теории Лоренца. Действительно, потребуем, чтобы в начале координат выполнялось уравнение $\psi = 1$, тогда в случае 4-мерного пространства-времени выражение (45) принимает вид

$$\psi = 1 - \tanh^2\left(\frac{r + ut - r_0}{\sqrt{c^2 - u^2}}\right) \tag{46}$$

Таким образом, теория гравитации в многомерных пространствах позволяет моделировать связанные и свободные состояния темной энергии, обладающие признаками частиц.

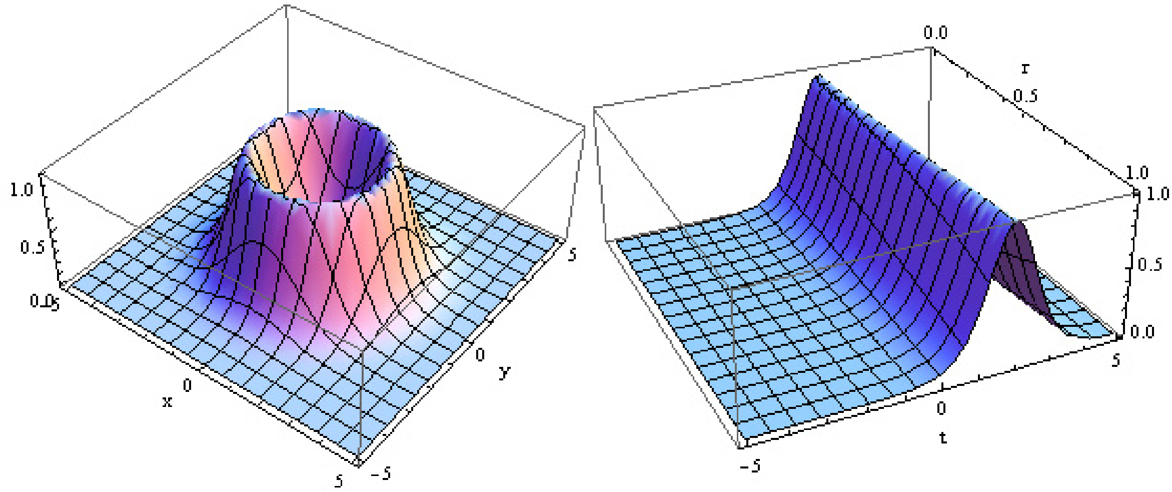

Рис.4. Уединенная гравитационная волна.

Уравнение Гамильтона-Якоби в метрике (40) имеет вид

$$\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{p}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial \phi_1}\right)^2-\sin^{-2}\phi_1\left(\frac{\partial S}{\partial \phi_2}\right)^2-$$
$$\sin^{-2}\phi_1\sin^{-2}\phi_2\left(\frac{\partial S}{\partial \phi_3}\right)^2-...-\sin^{-2}\phi_1\sin^{-2}\phi_2...\sin^{-2}\phi_{N-1}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi_N}\right)^2=0 \qquad (47)$$

Уравнение (47) можно проинтегрировать при некоторых предположениях, используя метод, который предложил Шредингер /39/. Суть метода состоит в том, чтобы представить решение уравнения (47) в виде

$$S=S_{cl}+\hbar\ln\Psi_S \qquad (48)$$

Здесь в теорию в явном виде вводится классическое действие - S_{cl}, постоянная Планка и волновая функция Ψ_S. Используя классическое действие, мы определяем те параметры задачи, которые могут считаться внешними для квантовой системы. При таком подходе становится очевидной связь квантовой механики с классической механики /40/.

Для нахождения решения уравнения (47) в виде (48) надо определить, в каком пространстве осуществляется движение в соответствии с принципами квантовой механики. В случае метрики (40) удобно будет выбрать в качестве переменных квантовой механики углы на единичной сфере, а в качестве координат классического действия – время и радиальную координату. Тогда уравнение (47) разделяется на два уравнения

$$\begin{gathered}\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{p}\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial r}\right)^2=M^2\\ \left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \phi_1}\right)^2+\sin^{-2}\phi_1\left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \phi_2}\right)^2+...+\sin^{-2}\phi_1\sin^{-2}\phi_2...\sin^{-2}\phi_{N-1}\left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \phi_N}\right)^2=\frac{M^2}{\hbar^2}\Psi_S^2\end{gathered} \tag{49}$$

Рассмотрим статические решения уравнения (43), полагая $\psi_t=\psi_{tt}=0$, находим

$$\psi_{rr}=-2Kp\psi+\frac{p+p'\psi}{2p\psi}\psi_r^2 \tag{50}$$

Интегрируя уравнение (50), получим

$$p\psi(C-2K\psi)=\psi_r^2 \tag{51}$$

Здесь С – произвольная постоянная. Чтобы получить решение уравнения (51) в виде функции Вейерштрасса, надо взять уравнение состояния в форме

$$p(\psi)=-\frac{2\psi}{K}+\frac{g_2}{4K\psi}+\frac{g_3}{4K\psi^2} \tag{52}$$

Тогда решение уравнения (51) при $C=0$ имеет вид

$$\psi=\wp(r-r_0,g_2,g_3) \tag{53}$$

В случае статической метрики решение первого уравнения (49) сводится к интегралу

$$S_{cl}=\int\sqrt{E^2p/\psi-pM^2}\,dr \tag{54}$$

Используя уравнение (51), в случае $C=0$ имеем $p=-\psi_r^2/(2K\psi^2)$, следовательно, интеграл (54) можно вычислить в общем виде:

$$S_{cl} = -\frac{\sqrt{M^2\psi - E^2}}{\sqrt{K\psi/2}} + \frac{M}{\sqrt{K/2}}\ln\left[M\left(M\sqrt{\psi} + \sqrt{M^2\psi - E^2}\right)\right] \tag{55}$$

Зависимость радиуса от времени задается уравнением $\partial S/\partial E = const$, отсюда находим

$$t = \frac{E}{\sqrt{K\psi/2}\left(\sqrt{M^2\psi - E^2} + M\sqrt{\psi}\right)} \tag{56}$$

Второе уравнение (49) можно свести к задаче на собственные значения относительно параметра массы /39/. Рассмотрим оператор Лапласа

$$\sum_{i=1}^{N}\nabla_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{3N-1}{\rho} + \frac{\Lambda_N^2(\Omega_N)}{\rho^2} \tag{57}$$

Здесь $\Lambda_N^2(\Omega_N)$ - обобщенный оператор углового момента, собственные функции которого – гиперсферические гармоники, удовлетворяют уравнению

$$(\Lambda_N^2(\Omega_N) + L(L+3N-2))Y_L(\Omega_N) = 0 \tag{58}$$

Гиперсферические гармоники выражаются через обычные сферические функции и полиномы Якоби в виде /41/

$$\begin{gathered} Y_L(\Omega_N) = \left[\prod_{j=1}^{N} Y_{l_j m_j}(\hat{x}_j)\right]\left[\prod_{j=2}^{N} {}^{(j)}P_{L_j}^{\alpha l_j, \alpha L_{j-1}}(\phi_j)\right] \\ {}^{(j)}P_{L_j}^{\alpha l_j, \alpha L_{j-1}}(\phi_j) = N_{n_j}^{\alpha l_j, \alpha L_j}(\cos\phi_j)^{l_j}(\sin\phi_j)^{L_{j-1}} P_{n_j}^{\alpha K_{j-1}, \alpha l_j}(\cos 2\phi_j) \\ N_n^{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{2(2n+\alpha+\beta+1)n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}} \end{gathered} \tag{59}$$

$\hat{x}_j$ - координаты точки на единичной сфере в метрике (40). Квантовые числа в метрике (40) удовлетворяют соотношениям

$$L_j = \sum_{i=1}^{j}(l_i + 2n_i),\ n_1 = 0, \quad L = L_N$$

$$\alpha L_j = L_j + \frac{3j}{2} - 1, \quad \alpha l_j = l_j + \frac{1}{2}$$

В результате решения вариационной задачи масса системы определяется как функция квантовых чисел, характеризующих вращение единичной сферы. В случае метрики адронов (7) эта задача рассматривалась в наших работах /14-17/. В частности, были определены массы кварков в составе барионов и массы преонов в составе кварков и лептонов.

К уравнению (56) можно добавить условие квантования, аналогичное (37), связывающее период колебания и энергию системы, например, в форме

$$E\Delta t = \hbar q$$

Это позволяет определить уровни энергии системы

$$E = \sqrt{(M^2 - K\hbar^2 q^2/2)\psi(\omega_1(\{g_2, g_3\}), \{g_2, g_3\})} \qquad (60)$$

Отметим, что выражение (60) согласуется с аналогичным выражением энергии основного состояния в теории струн /42-43/

$$E_0 = \frac{R}{2a^2}\sqrt{1 - \frac{8a^2}{R^2}\left(\frac{D-2}{24}\right)} \qquad (61)$$

Здесь $2\pi R, 1/4\pi a^2$ - длина струны и ее натяжение соответственно, D - размерность пространства. Для согласования выражений (60) и (61) необходимо предположить, что размерность плоского пространства теории струн на единицу меньше, чем размерность пространства постоянной кривизны, в котором определена метрика (40), поскольку $K = 2(D-3)$. Тогда, полагая в (60) $M = R/2a^2, \hbar^2 q^2 = 1/12a^2$ и $\psi = 1$, приходим к выражению (61).

Следовательно, теория гравитации в многомерных пространствах позволяет моделировать связанные и свободные состояния темной энергии, обладающие свойствами струн и частиц. Представляется интересным применить развитую выше теорию к моделированию энергии связи в атомных ядрах и массы адронов и лептонов. Однако решение этих задач выходит за рамки настоящей работы.

Библиографический список

1. Einstein A. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitdtstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1917, 1, 142—152; Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 1. – М., Наука, 1965, с. 601.
2. Einstein A. Prinzipielles zur allgemeinen Relativitdtstheorie. Ann. Phys., 1918, 55, 241—244; Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 1. – М., Наука, 1965, с. 613.
3. Einstein A., Infeld L., Hoffmann B. Gravitational Equations and Problems of Motion // Ann. Math., 39, 65-100, 1938; Gravitational Equations and the Problems of Motion //.(With L.Infeld).Ann.Math., 1940,41, 455—464; On the Motion of Particles in General Relativity Theory// (With L. Infeld)// Canad. J. Math., 1949, 1, 209—241.
4. Wheeler J. A. On the Nature of Quantum Geometrodynamics// Annals of Physics 2, No, 6 (Dec 1957): 604 – 614.
5. John A Wheeler. Neutrinos, Gravitation, and Geometry/ In Rendiconti della Scuola internazionale di fisica "Enrico Fermi." Corso XI, by L. A.Radicati. Bologna: Zanichelli, 1960, 67 – 196.
6. Sundance O. Bilson-Thompson, Fotini Markopoulou, Lee Smolin. Quantum gravity and the standard model//arXiv:hep-th/0603022, 21 Apr 2007.
7. Yang C. N., Mills R. L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance// Phys. Rev. 96: 191–195. 1954.
8. H. Fritzsch, M. Gell-Mann, H. Leutwyler. Advantages of the color octet gluon picture// Phys. Lett. B 47 (1973) 365.
9. S. Durr, Z. Fodor, J. Frison et all. Ab Initio Determination of Light Hadron Masses// Science, 21 November 2008: Vol. 322, no. 5905 pp. 1224-1227.
10. Vladimir Dzhunushaliev, V. Folomeev, Burkhard Kleihaus, Jutta Kunz. Modified gravity from the quantum part of the metric// arXiv:1312.0225v2 [gr-qc], 9 Jan 2014.
11. L.N.Krivonosov, V.A.Luk'aynov. The relationship between the Yang-Mills and Einstein and Maxwell Equations// J. SibFU, Math. and Phys, 2(2009), no. 4, 432–448 (in Russian).
12. L.N. Krivonosov, V.A. Luk'yanov. The Full Solution of Yang-Mills Equations for the Central-Symmetric Metrics// J. SibFU, Math. And Phys, 4(2011), no.3, 350–362 (in Russian).
13. Trunev A.P. Hadrons metrics simulation on the Yang-Mills equations// Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 84(2012), no. 10, 874–887. Mode of access: http://ej.kubagro.ru/2012/10/pdf/68.pdf
14. A.P.Trunev, Dynamics of quarks in the hadrons metric with application to the baryon structure// Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 85(2013), 525–542. Mode of access: http://ej.kubagro.ru/2013/01/pdf/42.pdf
15. Trunev A.P., Dynamics of quarks in the baryons metric and structure of nuclei//Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 85(2013), 623–636. Mode of access: http://ej.kubagro.ru/2013/01/pdf/49.pdf (in Russian).
16. Trunev A.P. Quark dynamics in atomic nuclei and quark shells//Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 86(2013), Mode of access: http://ej.kubagro.ru/2013/02/pdf/59.pdf

17. Trunev A.P. Preon shells and atomic structure//Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 87(2013), no. 03. Mode of access: http://ej.kubagro.ru/2013/03/pdf/61.pdf (inRussian).

18. Delsarte J. Sur les ds2 d'Einstein a symetrie axiale. - Paris, 1934; Delsarte J. Sur les ds2 binaires et le probleme d'Einstein, Journ Math. Pures Appl. 13, 19, 1934.

19. A.Z. Petrov. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.

20. Trunev A.P. Cosmology of inhomogeneous rotating universe and reality show//, Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 2014. – №01(095). – IDA [article ID]: 0951401028, http://ej.kubagro.ru/2014/01/pdf/28.pdf

21. Zeldovich, Y. B. The Cosmological Constant and the Theory of Elementary Particles// Soviet Physics Uspekhi vol. 11, 381-393, 1968.

22. Steven Weinberg. The Cosmological Constant Problems// arXiv:astro-ph/0005265v1 12 May 2000.

23. C.P. Burgess. The Cosmological Constant Problem: Why it's hard to get Dark Energy from Micro-physics//arXiv:1309.4133v1 [hep-th] 16 Sep 2013

24. G. Scharf. Inhomogeneous cosmology in the cosmic rest frame// arXiv:1312.2695v2 [astro-ph.CO] 13 Dec 2013.

25. Steven Weinberg. Gravitation and Cosmology. – John Wiley & Sons, 1972.

26. S.W. Hawking, G.F.R. Ellis. The large scale structure of space-time. – Cambridge University Press, 1973.

27. Martin Rees, Remo Ruffini, John A Wheeler. Black holes, gravitational waves and cosmology: an introduction to current research. -New York, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc. (Topics in Astrophysics and Space Physics. Volume 10), 1974. 182 p

28. L.D. Landau, E.M. Lifshitz (1971). The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). Pergamon Press. ISBN 978-0-08-016019-1.

29. Kaluza, Theodor. Zum Unitätsproblem in der Physik. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.) 1921: 966–972.

30. Klein, Oskar. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie// Zeitschrift für Physik 37 (12): 895–906, 1926.

31. V. Fock, Ueber die invariante Form der Wellen-und der Bewegungsgleichungen fiir einen geladenen Massenpunkt// Zeits. f.Phys. 39 1926, 226.

32. A. Einstein, P. Bergmann. Generalization of Kaluza’s Theory of Electricity// Ann. Math., ser. 2, 1938, 39, 683-701.

33. Ю. Б. Румер. Исследования по 5-оптике. – М., Гостехиздат,1956. 152 с.

34. Chodos A. Kaluza — Klein Theories: Overview.— Comm. Nucl. and Part.Phys. (Comm. Mod. Phys. Pt. A), 1984, v. 13, No. . 171—181.

35. Трунев А.П. Структура атомного ядра в теории Калуцы-Клейна // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №02(076). С. 862 – 881. – Шифр Информрегистра: 0421200012\0095, IDA [article ID]: 0761202070. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/02/pdf/70.pdf

36. Трунев А.П. Ядерные оболочки и периодический закон Д.И. Менделеева / Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар:

КубГАУ, 2012. – №05(079). С. 414 – 439. – IDA [article ID]: 0791205029. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/05/pdf/29.pdf

37. Leonid N. Krivonosov, Vyacheslav A. Luk’yanov, Lubov V. Voloskova. Extremal Curves in the Conformal Space and in an Associated Bundle//Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2014, 7(1), 68–78.

38. Bernard de Wit. Supergravity // arXiv: hep-th/0212245v1 19 Dec 2002.

39. Erwin Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung)//Annalen der Physik, (4), 79, (1926), 361-376; Quantisierung als Eigenwertproblem (Zweite Mitteilung)//Annalen der Physik, (4), 79, (1926), 489-527.

40. Stephen L. Adler. Where is quantum theory headed? // arXiv:1401.0896 [quant-ph], 5 Jan 2014; Incorporating gravity into trace dynamics: the induced gravitational action//Class. Quantum Grav. 30, 2013.

41. M. Gattobigio, A. Kievsky, M. Viviani.Non-symmetrized hyperspherical harmonic basis for A–bodies//arXiv:1009.3426v1 [nucl-th] 17 Sep 2010.

42. J. F. Arvis, The exact q anti-q potential in Nambu string-theory// Phys. Lett. B127(1983) 106.

43. Ofer Aharony, Matan Field, Nizan Klinghoffer. The effective string spectrum in the orthogonal gauge//arXiv:1111.5757v2, 22 Feb 2012.

Bibliograficheskij spisok

1. Einstein A. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitdtstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1917, 1, 142—152; Al'bert Jejnshtejn. Sobranie nauchnyh trudov. T. 1. – M., Nauka, 1965, s. 601.

2. Einstein A. Prinzipielles zur allgemeinen Relativitdtstheorie. Ann. Phys., 1918, 55, 241—244; Al'bert Jejnshtejn. Sobranie nauchnyh trudov. T. 1. – M., Nauka, 1965, s. 613.

3. Einstein A., Infeld L., Hoffmann V. Gravitational Equations and Problems of Motion // Ann. Math., 39, 65-100, 1938; Gravitational Equations and the Problems of Motion //.(With L.Infeld).Ann.Math., 1940,41, 455—464; On the Motion of Particles in General Relativity Theory// (With L. Infeld)// Canad. J. Math., 1949, 1, 209—241.

4. Wheeler J. A. On the Nature of Quantum Geometrodynamics// Annals of Physics 2, No, 6 (Dec 1957): 604 – 614.

5. John A Wheeler. Neutrinos, Gravitation, and Geometry/ In Rendiconti della Scuola internazionale di fisica "Enrico Fermi." Corso XI, by L. A.Radicati. Bologna: Zanichelli, 1960, 67 – 196.

6. Sundance O. Bilson-Thompson, Fotini Markopoulou, Lee Smolin. Quantum gravity and the standard model//arXiv:hep-th/0603022, 21 Apr 2007.

7. Yang C. N., Mills R. L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance// Phys. Rev. 96: 191–195. 1954.

8. H. Fritzsch, M. Gell-Mann, H. Leutwyler. Advantages of the color octet gluon picture// Phys. Lett. B 47 (1973) 365.

9. S. Durr, Z. Fodor, J. Frison et all. Ab Initio Determination of Light Hadron Masses// Science, 21 November 2008: Vol. 322, no. 5905 pp. 1224-1227.

10. Vladimir Dzhunushaliev, V. Folomeev, Burkhard Kleihaus, Jutta Kunz. Modified gravity from the quantum part of the metric// arXiv:1312.0225v2 [gr-qc], 9 Jan 2014.

11. L.N.Krivonosov, V.A.Luk'aynov. The relationship between the Yang-Mills and Einstein and Maxwell Equations// J. SibFU, Math. and Phys, 2(2009), no. 4, 432–448 (in Russian).

12. L.N. Krivonosov, V.A. Luk'yanov. The Full Solution of Yang-Mills Equations for the Central-Symmetric Metrics// J. SibFU, Math. And Phys, 4(2011), no.3, 350–362 (in Russian).

13. Trunev A.P. Hadrons metrics simulation on the Yang-Mills equations// Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 84(2012), no. 10, 874–887. Mode of access: http://ej.kubagro.ru/2012/10/pdf/68.pdf

14. A.P.Trunev, Dynamics of quarks in the hadrons metric with application to the baryon structure// Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 85(2013), 525–542. Mode of access: http://ej.kubagro.ru/2013/01/pdf/42.pdf

15. Trunev A.P., Dynamics of quarks in the baryons metric and structure of nuclei//Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 85(2013), 623–636. Mode of access: http://ej.kubagro.ru/2013/01/pdf/49.pdf (in Russian).

16. Trunev A.P. Quark dynamics in atomic nuclei and quark shells//Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 86(2013), Mode of access: http://ej.kubagro.ru/2013/02/pdf/59.pdf

17. Trunev A.P. Preon shells and atomic structure//Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 87(2013), no. 03. Mode of access: http://ej.kubagro.ru/2013/03/pdf/61.pdf (inRussian).

18. Delsarte J. Sur les ds2 d'Einstein a symetrie axiale. - Paris, 1934; Delsarte J. Sur les ds2 binaires et le probleme d'Einstein, Journ Math. Pures Appl. 13, 19, 1934.

19. A.Z. Petrov. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.

20. Trunev A.P. Cosmology of inhomogeneous rotating universe and reality show//, Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 2014. – №01(095). – IDA [article ID]: 0951401028, http://ej.kubagro.ru/2014/01/pdf/28.pdf

21. Zeldovich, Y. B. The Cosmological Constant and the Theory of Elementary Particles// Soviet Physics Uspekhi vol. 11, 381-393, 1968.

22. Steven Weinberg. The Cosmological Constant Problems// arXiv:astro-ph/0005265v1 12 May 2000.

23. C.P. Burgess. The Cosmological Constant Problem: Why it's hard to get Dark Energy from Micro-physics//arXiv:1309.4133v1 [hep-th] 16 Sep 2013

24. G. Scharf. Inhomogeneous cosmology in the cosmic rest frame// arXiv:1312.2695v2 [astro-ph.CO] 13 Dec 2013.

25. Steven Weinberg. Gravitation and Cosmology. – John Wiley & Sons, 1972.

26. S.W. Hawking, G.F.R. Ellis. The large scale structure of space-time. – Cambridge University Press, 1973.

27. Martin Rees, Remo Ruffini, John A Wheeler. Black holes, gravitational waves and cosmology: an introduction to current research. -New York, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc. (Topics in Astrophysics and Space Physics. Volume 10), 1974. 182 p

28. L.D. Landau, E.M. Lifshitz (1971). The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). Pergamon Press. ISBN 978-0-08-016019-1.

29. Kaluza, Theodor. Zum Unitätsproblem in der Physik. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.) 1921: 966–972.

30. Klein, Oskar. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. Zeitschrift für Physik a Hadrons and Nuclei 37 (12): 895–906, 1926.

31. V. Fock, Ueber die invariante Form der Wellen-und der Bewegungsgleichungen fiir einen geladenen Massenpunkt// Zeits. f.Phys. 39 1926, 226.

32. A. Einstein, P. Bergmann. Generalization of Kaluza's Theory of Electricity// Ann. Math., ser. 2, 1938, 39, 683-701.

33. Ju. B. Rumer. Issledovanija po 5-optike. – M., Gostehizdat,1956. 152 s.

34. Chodos A. Kaluza — Klein Theories: Overview.— Comm. Nucl. and Part.Phys. (Comm. Mod. Phys. Pt. A), 1984, v. 13, No. . 171—181.

35. Trunev A.P. Struktura atomnogo jadra v teorii Kalucy-Klejna // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2012. – №02(076). S. 862 – 881. – Shifr Informregistra: 0421200012\0095, IDA [article ID]: 0761202070. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2012/02/pdf/70.pdf

36. Trunev A.P. Jadernye obolochki i periodicheskij zakon D.I. Mendeleeva / Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2012. – №05(079). S. 414 – 439. – IDA [article ID]: 0791205029. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2012/05/pdf/29.pdf

37. Leonid N. Krivonosov, Vyacheslav A. Luk'yanov, Lubov V. Voloskova. Extremal Curves in the Conformal Space and in an Associated Bundle//Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2014, 7(1), 68–78.

38. Bernard de Wit. Supergravity // arXiv: hep-th/0212245v1 19 Dec 2002.

39. Erwin Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung)//Annalen der Physik, (4), 79, (1926), 361-376; Quantisierung als Eigenwertproblem (Zweite Mitteilung)//Annalen der Physik, (4), 79, (1926), 489-527.

40. Stephen L. Adler. Where is quantum theory headed? // arXiv:1401.0896 [quant-ph], 5 Jan 2014; Incorporating gravity into trace dynamics: the induced gravitational action//Class. Quantum Grav. 30, 2013.

41. M. Gattobigio, A. Kievsky, M. Viviani.Non-symmetrized hyperspherical harmonic basis for A–bodies//arXiv:1009.3426v1 [nucl-th] 17 Sep 2010.

42. J. F. Arvis, The exact q anti-q potential in Nambu string-theory// Phys. Lett. B127(1983) 106.

43. Ofer Aharony, Matan Field, Nizan Klinghoffer. The effective string spectrum in the orthogonal gauge//arXiv:1111.5757v2, 22 Feb 2012.