

УДК 621.3.013+537.212

UDC 621.3.013+537.212

**УЧЁТ НЕОДНОРОДНОСТИ СРЕДЫ ПРИ
РАСЧЁТЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ****HEEDING OF HETEROGENEITY OF
ENVIRONMENT WHEN CALCULATING A
MAGNETIC FIELD**Попов Борис Клавдиевич
к.т.н., доцентPopov Boris Klavdievich
Cand.Tech.Sci., associate professorПопова Ольга Борисовна
к.т.н., доцент
*Кубанский государственный технологический уни-
верситет, Краснодар, Россия, 350072, ул. Москов-
ская, 2, pbk47@mail.ru*Popova Olga Borisovna
Cand.Tech.Sci., associate professor
Kuban State Technical University, Krasnodar, Russia

Выведена формула для определения величины и направления вторичных источников поля в виде поверхностных токов для учёта неоднородности среды. Показано, что можно решать нелинейные полевые задачи, используя математические выводы, приведённые в статье

The formula for definition of magnitude and direction of secondary sources of a field as surface currents for the registration of heterogeneity of environment is found. We have shown that it is possible to solve non-linear field problems, using the mathematical deductions shown in this article

Ключевые слова: РЯД ФУРЬЕ, МЕТОД
ВТОРИЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ ПОЛЯKeywords: FOURIER SERIES, METHOD OF
SECONDARY SOURCES OF FIELD

Одной из основных задач при проектировании нетрадиционных электромеханических устройств, таких как электрические машины, тяговые электромагниты или трансформаторы, является расчёт электромагнитного поля этих устройств. Как было ранее сказано в нашей статье [1], подобные расчёты в неоднородных средах связаны с решением краевых задач уравнений математической физики. Здесь, в последнее время, нашёл применение метод конечных элементов, но мы остановили наше внимание на методе вторичных источников поля [1], который был введён на основании физических соображений. Однако можно показать, что данный метод вытекает и из математических рассуждений. Ниже мы покажем вывод формул, учитывающих неоднородность сред, полученных с помощью этих двух подходов. Также будет видно, что математический подход позволит решать нелинейные задачи.

Остановимся на математическом выводе упомянутых выше формул.

Рассмотрим известное уравнение электромагнитного поля

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{\delta}. \quad (1)$$

Умножим обе части уравнения (1) на функцию $\mu_0\mu$

$$\mu_0\mu \operatorname{rot} \bar{H} = \mu_0\mu \bar{\delta}. \quad (2)$$

Применяя известное выражение теории поля [2]

$$\operatorname{rot} \bar{a} = \operatorname{rot} (\bar{a}j) - \operatorname{grad} j \times \bar{a} \quad (3)$$

и предполагая в первом приближении, что $\mu_0\mu$ представляет собой некоторую непрерывную функцию, можно преобразовать выражение (2) к виду

$$\mu_0\mu \operatorname{rot} \bar{H} = \operatorname{rot} (\mu_0\mu \bar{H}) - \operatorname{grad}(\mu_0\mu) \times \bar{H} = \mu_0\mu \bar{\delta}. \quad (3)$$

Произведя некоторую перестановку членов в уравнении (3), получим следующее равенство

$$\operatorname{rot} (\mu_0\mu \bar{H}) = \mu_0\mu \bar{\delta} + \operatorname{grad}(\mu_0\mu) \times \bar{H}. \quad (4)$$

Учитывая, что

$$\mu_0\mu \bar{H} = \bar{B}, \quad (5)$$

а также

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0\mu}, \quad (6)$$

получим уравнение

$$\operatorname{rot} (\bar{B}) = \mu_0\mu \bar{\delta} + \operatorname{grad}(\mu_0\mu) \times \frac{\bar{B}}{\mu_0\mu}. \quad (7)$$

Для простоты будем рассматривать плоскую задачу. На рисунке 1 показан участок неоднородности среды, на котором происходит изменение магнитной проницаемости. Известно, что при разложении функций в ряд Фурье и при стремлении области разрыва функции к бесконечно малой величине, любая функция будет иметь в этом месте среднее значение. Следовательно, и функция $\mu_0\mu$, в месте скачка магнитной проницаемости также будет иметь среднее значение [3]. Исходя из этого, представим второй сомножитель второго слагаемого в уравнении (7) в следующем виде

$$\left(\frac{\bar{B}}{\mu_0\mu} \right)_{cp} \approx \frac{2\bar{B}}{\mu_0(\mu_2 + \mu_1)}. \quad (8)$$

Из аналогичных соображений первый сомножитель этого же слагаемого будет иметь вид

$$\text{grad}(\mu_0\mu)_{cp} \approx \mu_0 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\Delta x} \bar{i} + \mu_0 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\Delta y} \bar{j} = \mu_0(\mu_2 - \mu_1) \left(\frac{1}{\Delta x} \bar{i} + \frac{1}{\Delta y} \bar{j} \right). \quad (9)$$

Напомним формулу для вектора нормали к области раздела сред (см. рисунок 1)

$$\bar{n} = \bar{i} \cos \alpha + \bar{j} \cos \beta. \quad (10)$$

Преобразуем второй сомножитель в правой части выражения (9). Для этого определим компоненту Δx (см. рисунок 1)

$$\frac{|\bar{n}|}{\Delta x} = \cos \alpha \quad \text{или} \quad \Delta x = \frac{|\bar{n}|}{\cos \alpha}. \quad (11)$$

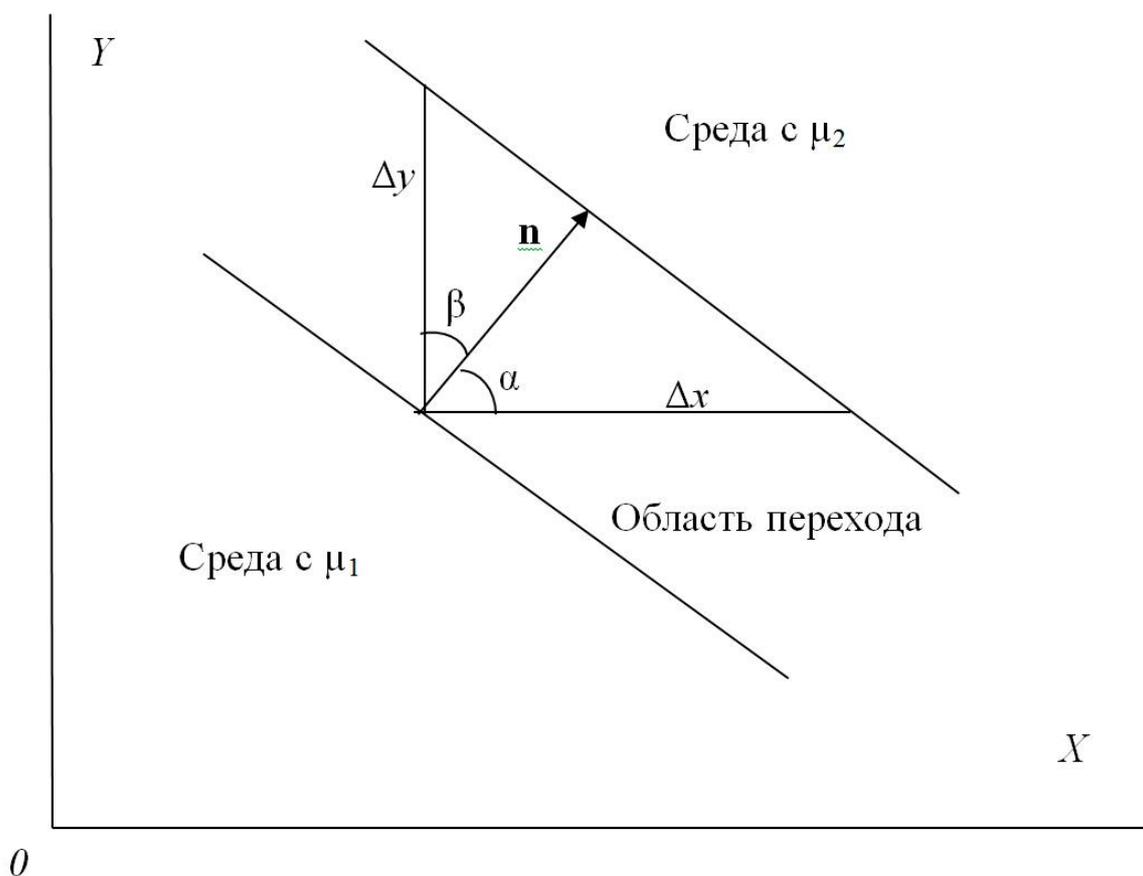


Рисунок 1. Эскиз участка неоднородности среды.

Аналогично определим компоненту Δy

$$\frac{|\bar{n}|}{\Delta y} = \cos \beta \quad \text{или} \quad \Delta y = \frac{|\bar{n}|}{\cos \beta}. \quad (12)$$

Отсюда, учитывая, что длина единичного вектора

$$|\bar{n}| = 1, \quad (13)$$

первое слагаемое во втором сомножителе правой части выражения (9) будет выглядеть так

$$\frac{|\bar{n}|}{\Delta x} \bar{i} = \bar{i} \cos \alpha, \quad (14)$$

а второе –

$$\frac{|\bar{n}|}{\Delta y} \bar{j} = \bar{j} \cos \beta. \quad (15)$$

Следовательно, второй сомножитель в правой части уравнения (9) примет вид

$$\bar{i} \cos \alpha + \bar{j} \cos \beta. \quad (16)$$

А это не что иное, как вектор нормали к области раздела сред. Отсюда видно, что направление вектора нормали к разделу сред совпадает с направлением вектора градиента.

Учитывая предыдущие выводы, равенство (9) можем преобразовать следующим образом

$$\text{grad}(\mu_0 \mu)_{cp} \approx \mu_0 (\mu_2 - \mu_1) (\bar{i} \cos \alpha + \bar{j} \cos \beta) \approx \mu_0 (\mu_2 - \mu_1) \bar{n}. \quad (17)$$

Приведённые рассуждения позволяют преобразовать второе слагаемое уравнения (7) к виду

$$\text{grad}(\mu_0 \mu) \times \frac{\bar{B}}{\mu_0 \mu} = \mu_0 (\mu_2 - \mu_1) \bar{n} \frac{2}{\mu_0 (\mu_2 + \mu_1)} \times \bar{B} = 2 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} [\bar{n} \bar{B}]. \quad (18)$$

Теперь рассмотрим вывод аналогичной формулы для вторичных источников поля, исходя из физических соображений.

Ранее нами для вторичных источников поля в виде поверхностных зарядов была выведена формула для определения величины и знака этих источников [4]. Однако, при решении задач распределения магнитного поля, где источниками поля являются токи, более целесообразно применять вторичные источники в виде поверхностных токов. Это вызвано тем, что поле вторичных источников должно определяться по тем же уравнениям, что и поле исходных источников. То есть, если источником поля является ток, то поле определяется с помощью векторного потенциала. Следовательно, и вторичные источники должны быть в виде поверхностных токов.

Это вытекает из того, что поле вторичных источников в виде поверхностных токов также определяется через векторный потенциал. Данное утверждение вызвано тем, что при описании поля рядами Фурье, эти ряды должны быть однотипными. А это возможно лишь, когда источники однотипные: либо все источники – заряды, либо все источники – токи. В противном случае возникают сложности вычислительного характера.

Используя магнитный векторный потенциал, мы будем оперировать магнитной индукцией \vec{B} .

Известно, что на поверхности раздела сред (см. рисунок 2)

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad (19)$$

$$\frac{B_{t1}}{\mu_0\mu_1} = \frac{B_{t2}}{\mu_0\mu_2}, \quad (20)$$

где B_n – нормальная к поверхности составляющая индукции;

B_t – тангенциальная к поверхности составляющая индукции.

Будем считать, что вся область однородна, а на поверхности раздела сред расположен поверхностный ток удельной плотности s , имитирующий неоднородность среды (см. рисунок 2).

Независимый источник развивает индукцию в рассматриваемой точке $B_{ин}$ (или просто B_t). Тогда в среде 1

$$B_{t1} = B_t - B'_t, \quad (21)$$

а в среде 2

$$B_{t2} = B_t + B'_t, \quad (22)$$

где B'_t – индукция, развиваемая поверхностным током.

Используя (20), получим

$$\frac{B_t - B'_t}{\mu_0\mu_1} = \frac{B_t + B'_t}{\mu_0\mu_2}. \quad (23)$$

Используя (23), определим индукцию, развиваемую вторичными источниками поля в виде поверхностных токов

$$B'_t = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} B_t. \quad (24)$$

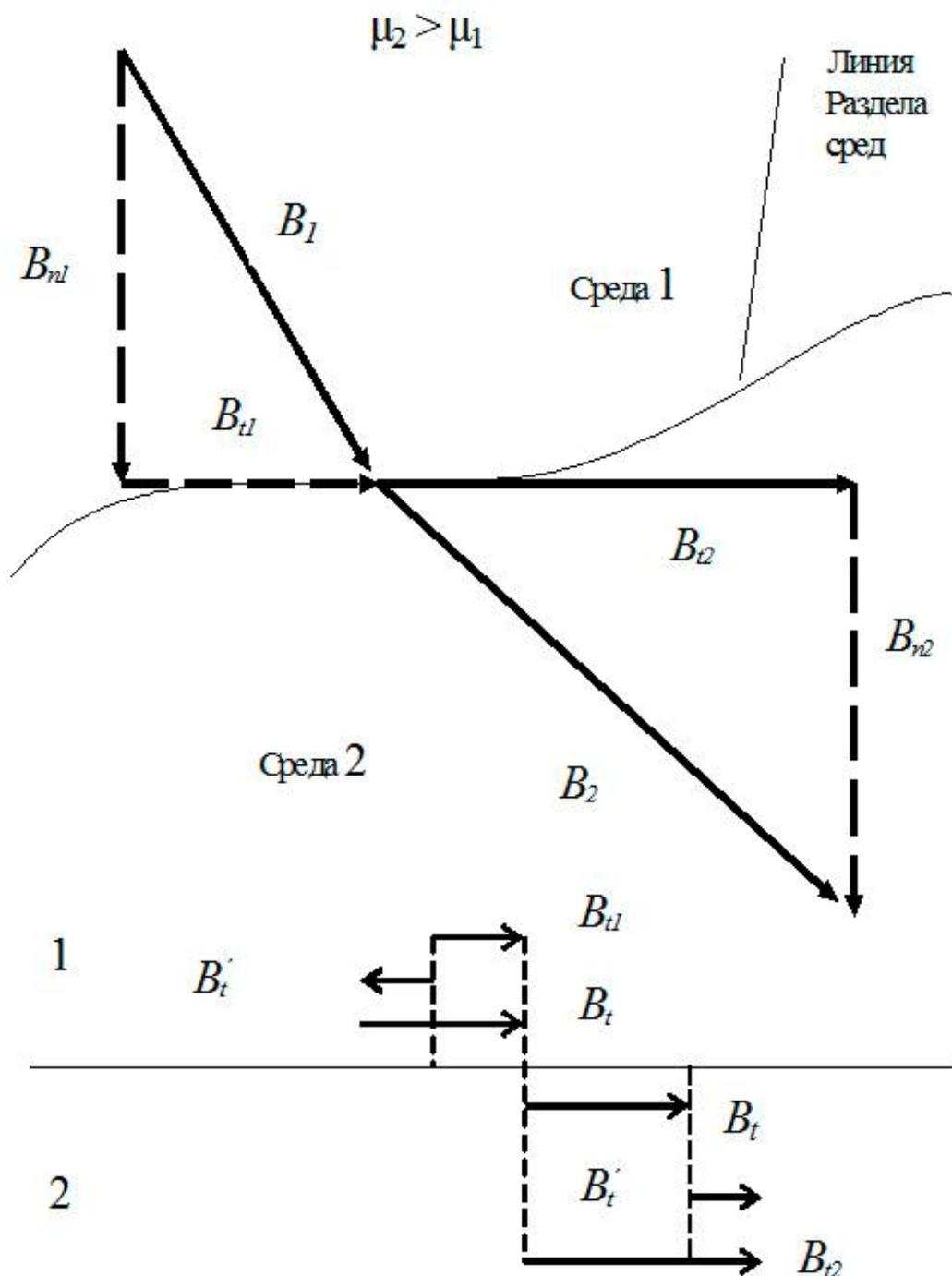


Рисунок 2. Поведение вектора индукции на поверхности раздела сред

Напряжённость магнитного поля вторичных источников

$$H_t = \frac{B_t}{\mu_0}, \quad (25)$$

так как всё происходит уже в среде с μ_0 , где $\mu = 1$.

Применим закон полного тока к элементу поверхности раздела сред длиной Δl

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = i. \quad (26)$$

Если обход кругового интеграла будет происходить по часовой стрелке, то при направлении вектора \vec{H} против часовой стрелки направление тока совпадёт с положительным направлением оси Z (см. рисунок 2).

Элемент тока по поверхности длиной Δl

$$i = \oint \vec{H} d\vec{l} = H'_t \Delta l + H'_t \Delta l = 2 H'_t \Delta l. \quad (27)$$

Поверхностная плотность тока

$$s = \frac{i}{\Delta l} = 2 H'_t = 2 \frac{B'_t}{\mu_0} = \frac{2}{m_0} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} B_t. \quad (28)$$

Здесь надо учесть, что B_t – это средняя величина магнитной индукции суммарного поля (то есть поля катушки и поля вторичных источников) на поверхности раздела сред. То есть

$$B_t = \frac{B_{t2} + B_{t1}}{2}, \quad (29)$$

как это имело место с магнитными зарядами [3].

Если мы хотим знать направление поверхностной плотности тока, то, исходя из рисунка 3, можно записать такую формулу

$$\vec{s} = \frac{2}{\mu_0} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} [\vec{B}_t \vec{n}], \quad (30)$$

где \vec{n} – вектор внешней нормали к поверхности раздела сред (направление вектора из среды с большей магнитной проницаемостью в среду с меньшей магнитной проницаемостью).

Развернём векторное произведение в (30), учитывая, что по оси Z составляющие векторов \vec{B}_t и \vec{n} равны нулю

$$\vec{B}_t \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ B_{tx} & B_{ty} & 0 \\ n_x & n_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} (B_{tx} n_y - B_{ty} n_x). \quad (31)$$

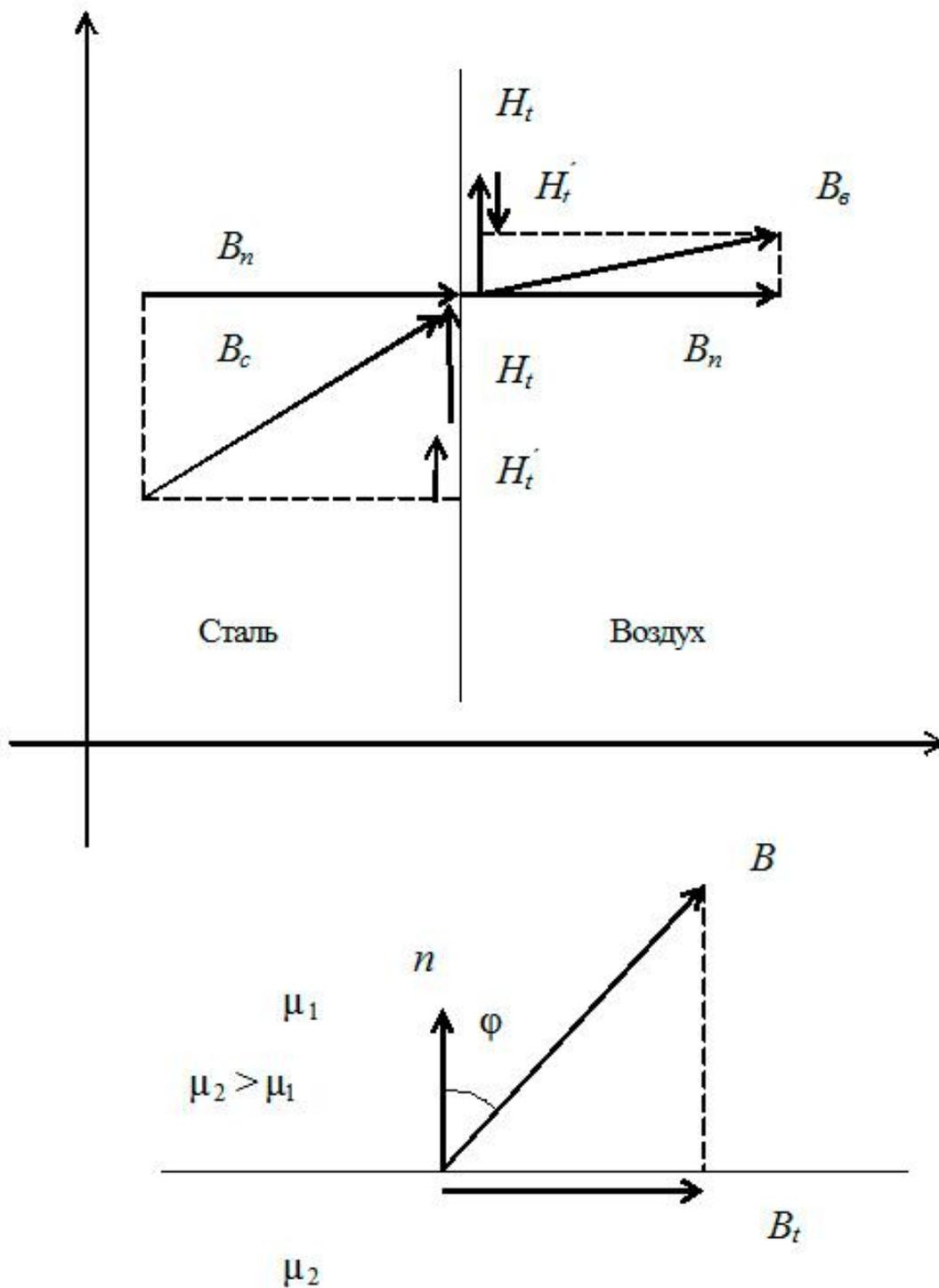


Рисунок 3. Определение знака и величины поверхностного тока

Следовательно, условие (30) можно записать в виде

$$s_z(l) = \left(\frac{2 \mu_2 - \mu_1}{\mu_0 \mu_2 + \mu_1} \right) (B_{tx} n_y - B_{ty} n_x). \quad (32)$$

Определим компоненты вектора \bar{B}_t . Рассмотрим выражение (30). В векторное произведение входит величина \bar{B}_t , то есть тангенциальная к поверхности раздела составляющая вектора \bar{B} . Рассмотрим рисунок 3. Векторное произведение в формуле (30) равно

$$B_t n \sin 90^\circ = B_t n. \quad (33)$$

Рассмотрим, чему равно векторное произведение $[\bar{B}\bar{n}]$, где \bar{B} вектор индукции на поверхности раздела сред

$$B n \sin j. \quad (34)$$

В выражении (34) $\sin j = \frac{B_t}{B}$. Подставим это выражение в (34)

$$B n \frac{B_t}{B} = B_t n. \quad (35)$$

Мы видим, что (35) и (33) равны. Поэтому выражению (30) можно придать вид

$$\bar{s}(l) = \frac{2}{\mu_0} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} [\bar{B}\bar{n}]. \quad (36)$$

Соответственно изменится и (32)

$$s_z(l) = \left(\frac{2}{\mu_0} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \right) (B_x n_y - B_y n_x). \quad (37)$$

Следует учесть, что рассматривая случай, когда \bar{n} направлено из среды с меньшей магнитной проницаемостью в среду с большей магнитной проницаемостью (как это имело место в математическом выводе), порядок следования сомножителей в векторном произведении в выражении (36) изменится на противоположный. Отсюда следует, что выражения (18) и (36) идентичны.

Выводы. Таким образом, математический и физический подход привели к одинаковому результату. То есть неоднородность среды правомерно учитывать вторичными источниками поля. Однако, математический подход позволяет расширить метод вторичных источников поля. Если будет иметь место нелинейная зависимость магнитной проницаемости от магнитной индукции, то градиент в этом случае не будет равным нулю. А

это обстоятельство приведёт к появлению объёмных источников поля в области, занятой ферромагнетиком. Применяя метод последовательных приближений к уравнению (7), можно будет создать алгоритм решения полевых задач в нелинейных средах. Также следует заметить, что формулы, выведенные нами в данной статье, позволят разработать автоматический алгоритм определения величины и знака поверхностной плотности тока, имитирующей неоднородность среды при решении линейных задач.

Список литературы

1. Попов Б.К. Решение полевых задач электротехники с помощью вторичных источников поля и рядов Фурье / Б.К. Попов, О.Б. Попова // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №09(093). – IDA [article ID]: 0931309040. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/09/pdf/40.pdf>, 0,750 у.п.л.
2. Колобов А.М. Избранные главы высшей математики. Ч. 2. Векторный анализ и теория поля. Специальные функции. Методы математической физики (интегральные уравнения, краевые задачи устойчивость движения). – Минск: «Вышэйш. школа», 1967. – 296 с.
3. Попов Б.К. Определение зависимости вторичных источников поля от среднего значения напряжённости поля на границе раздела сред/ Кубан. гос. технол. ун-т. – Краснодар, 2004. – 4 с. – Деп. в ВИНТИ 08.06.2004, № 970 – В2004.
4. Попов Б.К. Вывод формулы для определения величины и знака вторичных источников поля/ Кубан. гос. технол. ун-т.– Краснодар, 2004.– 4 с.– Деп. в ВИНТИ 08.12.04, № 1962 – В 2004.

References

1. Popov B.K. Reshenie polevyh zadach jelektrotehniki s pomoshh'ju vtorichnyh istochnikov polja i rjadov Fur'e / B.K. Popov, O.B. Popova // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universi-teta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №09(093). – IDA [article ID]: 0931309040. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2013/09/pdf/40.pdf>, 0,750 u.p.l.
2. Kolobov A.M. Izbrannye glavy vysshej matematiki. Ch. 2. Vektornyj analiz i teorija polja. Special'nye funkicii. Metody matematicheskoy fiziki (integral'-nye uravnenija, kraevye zadachi ustojchivost' dvizhenija). – Minsk: «Vyshjejsjsh. shko-la», 1967. – 296 s.
3. Popov B.K. Opredelenie zavisimosti vtorichnyh istochnikov polja ot srednego znachenija naprjazhjonnosti polja na granice razdela sred/ Kuban. gos. tehnol. un-t. – Krasnodar, 2004. – 4 s. – Dep. v VINITI 08.06.2004, № 970 – V2004.
4. Popov B.K. Vyvod formuly dlja opredelenija velichiny i znaka vtorichnyh istochnikov polja/ Kuban. gos. tehnol. un-t.– Krasnodar, 2004.– 4 s.– Dep. v VINITI 08.12.04, № 1962 – V 2004.