УДК 622.011.43

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАССИВА КАМЕННОЙ СОЛИ, СОДЕРЖАЩЕГО ПОДЗЕМНОЕ НЕФТЕГАЗОХРАНИЛИЩЕ

Аршинов Г. А. – к. ф.-м. н.

Кубанский государственный аграрный университет

Рассматриваются условия сходимости метода упругих решений в задачах нелинейной теории ползучести при исследовании распределения напряжений вблизи осесимметричных полостей различной конфигурации, образованных в отложениях каменной соли.

Практически важные задачи, связанные с добычей солей, а также размещением в их толщах различного рода подземных хранилищ, не могут быть решены без глубокого изучения физико-механических свойств соляных пород. Последние относятся к классу материалов, в деформировании которых доминирующую роль играют нелинейные процессы ползучести и релаксации. Это неоднократно подтверждалось многочисленными экспериментальными исследованиями образцов различных месторождений и натурными наблюдениями. Для большей части опубликованных работ характерно стремление изучить упругие, прочностные, реологические свойства, а также построить уравнения механического состояния соляных пород на основе одноосных испытаний, что не гарантирует возможности распространения полученных результатов на сложное напряженное состояние. Реже встречаются многоосные опыты, подавляющая часть которых выполнена в камере Кармана.

Приведем результаты испытания прочностных и деформативных свойств образцов солей Солигорского месторождения при одноосном сжатии [1]. Ползучесть призматических образцов размером $10\times5\times5$ см исследовалась на гидравлических и пружинных прессах при циклически возрастающей и длительно действующей нагрузках. Установлено, что мгновенное (t=0) деформирование соляных образцов линейно, а при t>0 развивается процесс нелинейной ползучести каменной соли с преобладанием необратимых деформаций.

Подобные процессы могут быть описаны уравнением состояния вида:

$$E(t)=\frac{1}{E}\left[\sigma(t)+\int_0^t L(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau+\int_0^t P(\tau)f[\sigma(\tau)d\tau]\right], \qquad (1)$$

причем уровень нелинейности деформирования зависит от степени нагруженности образца: для нагрузок, не превышающих $0{,}4\sigma_c$ (σ_c - напряжение разрушения при одноосном сжатии), получены практические линейные изохронны, т.е. в этом случае можно воспользоваться уравнениями линейной теории вязкоупругости [2], успешно применяемыми для описания ползучести горных пород. Если нагрузки не удовлетворяют упомянутому ограничению, то нелинейный член в уравнении (1) необходимо сохранить. Более того, при значительных нагрузках в уравнении (1) можно опустить второе слагаемое без ущерба точности кривых ползучести.

Лабораторные испытания трубчатых образцов различных соляных пород в условиях плоской деформации [3] позволили обобщить уравнение (1) на случай сложного напряженного состояния и для больших нагрузок представить уравнение механического состояния солей в виде уравнения, представляющего собой уравнения нелинейной вязкоупругости

$$E\varepsilon_{ij}(t)=\sigma_{ij}(t)+\nu\left[\sigma_{ij}(t)-3\delta_{ij}\sigma(t)\right]+\frac{E}{2G}\int_0^t P\left[t,\tau,\sigma_{ij}(\tau)\right]\left[\sigma_{ij}(\tau)-\delta_{ij}\sigma(\tau)\right]d\tau, \qquad (2)$$

ядро которых

$$P=\delta(t-\tau)^{-\alpha}[1+\beta\sigma_u^2(\tau)], \qquad (3)$$

или уравнения теории старения, если

$$P = D\tau^{-\alpha}\sigma_u^2(\tau), \tag{4}$$

где σ_u – интенсивность напряжений, δ, α, β, D – параметры ползучести.

Использование теории старения наиболее предпочтительно. В этом случае второй член в уравнениях (2) дает необратимую деформацию ползучести, что вполне согласуется с экспериментами [3]. В результате обработки лабораторных данных и натурных наблюдений за конвергенцией горизонтальных протяженных выработок круглого поперечного сечения определены параметры ползучести ядер (3), (4).

Согласно данным [3], соотношения линейной вязкоупругости (когда $P(t)$=0) применимы при расчете мало заглубленных подземных сооружений, возводимых в соляных толщах. В этом случае задача упрощается в силу независимости поля напряжений от времени.

Нелинейность уравнений (2), которую необходимо учитывать при исследовании подземных сооружений глубокого заложения, значительно усложняет анализ напряженного и деформированного состояния, поскольку неизвестен вид функциональной зависимости напряжений от времени.

Задачи теории ползучести с физической нелинейностью не столь наглядны, как линейные, но и они в ряде случаев успешно решаются методом конечных элементов, что убедительно показано в монографии [4]. Метод конечных элементов распространяется на решение нелинейных задач с помощью метода упругих решений, описанного в монографиях. К наиболее распространенным итерационным схемам относятся так называемые методы переменных упругих параметров, начальных напряжений и деформаций, применение каждого из которых продиктовано соображениями удобства и мощностью ЭВМ.

Линеаризация физически нелинейных задач в методе переменных упругих параметров основывается на предположении о зависимости матрицы упругих постоянных от уровня достигнутой деформации:

$$[D]_{\varepsilon} = [D]\, f(\varepsilon), \tag{5}$$

где $[D]$ – матрица упругих констант.

В задачах теории ползучести исследуемый промежуток времени дробится на малые интервалы, в каждом из которых матрица упругости корректируется по результатам расчета в предыдущем временном шаге на основе уравнения (5). Итерационный процесс продолжается, пока расчетные напряжения в двух соседних временных интервалах будут близки с заданной степенью точности. Метод переменных упругих параметров не экономичен с точки зрения затрат машинного времени: в каждом временном шаге заново строится матрица жесткости системы конечных элементов.

Метод начальных напряжений удобен, если уравнения механического состояния разрешимы относительно напряжений

$$\sigma = f(\varepsilon). \tag{6}$$

В этом случае путем подбора начальных напряжений, сводимых к вектору начальных узловых сил, искомые значения напряжений определяются последовательным решением ряда задач линейной теории упругости. Итерационный процесс осуществляется следующим образом. Расчетный временной интервал вновь разбивается на необходимое число точек. При t=0 решается краевая задача линейной теории упругости. По распределению упругих деформаций ε_y и согласно выражению (6) строятся начальное поле напряжений и соответствующий ему суммарный вектор начальной узловой нагрузки Q_1, затем устанавливаются поправки в результат первого упругого расчета. Для следующего временного шага процедура повторяется вновь, но с откорректированным полем напряжений. Итерационный процесс прекращается, как только в двух смежных временных шагах напряжения станут достаточно близкими.

Метод начальных деформаций, во многом аналогичный процедуре начальных напряжений, применяется в случае разрешимости уравнений механического состояния относительно деформаций: $\varepsilon = f(\sigma)$. В этом случае корректировка упругих решений осуществляется подбором начальных деформаций ε_0.

Обратимся к вопросу сходимости метода упругих решений в задачах нелинейной теории ползучести. Математическое обоснование уравнений механического состояния нелинейной теории вязкоупругости предложено в работе [5]. Вводя гильбертовы пространства H_ε, H_σ функций $E(\tau)$, $\sigma(\tau)$, под которыми понимаются соответственно тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(\tau)$ и напряжений $\sigma_{ij}(\tau)$, определенные на отрезке времени [0, t], и задавая нормы H_ε и H_σ в виде

$$\|E\| = \left(\int_0^t \varepsilon_{ij}(\tau)\varepsilon_{ij}(\tau)\rho_\varepsilon(t,\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \;\; ; \;\; \|\sigma\| = \left(\int_0^t \sigma_{ij}(\tau)\sigma_{ij}(\tau)\rho_\sigma(t,\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $\rho_\varepsilon(t,\tau)$, $\rho_\sigma(t,\tau)$ – положительные функции памяти, авторы показывают, что любые аналитические в окрестности нуля операторы F, Q, отображающие соответственно H_ε на H_σ и H_σ на H_ε $\sigma = F(E)$, $E = Q(\sigma)$, можно представить в виде рядов:

$$P(\mathbf{l}_{ij}S_{ij}) = \frac{1}{2G}S_{ij}(t) + 9DG^2\int_0^t K(\tau)\mathbf{l}_u^2(\tau)\mathbf{l}_{ij}(\tau)d\tau, \qquad (7)$$

где

$$\overset{v}{\Gamma}n\, E^n = \int_0^t \ldots \int_0^t \Gamma_n(t,\tau_1,\ldots,\tau_n)\; E(\tau_1)\ldots E(\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n,$$

$$\overset{v}{K}n\, \sigma^n = \int_0^t \ldots \int_0^t K_n(t,\tau_1,\ldots,\tau_n)\; \sigma(\tau_1)\ldots \sigma(\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n.$$

Точность аппроксимации операторов F, Q зависит от числа членов, сохраняемых в рядах (7) при замене бесконечных сумм конечными. Авторами получены условия, при которых операторы F и Q взаимно обратны, причем обращение осуществляется методом сжатых отображений.

Рассмотрим уравнения механического состояния, связывающие компоненты девиаторов тензоров напряжений и деформаций и вытекающие из (2), (4), в виде

$$S_{ij}(t)=2G\mathbf{l}_{ij}(t)-18DG^3\int_0^t \tau^{-\alpha}\mathbf{l}_u^2(\tau)\mathbf{l}_{ij}(\tau)d\tau \tag{8}$$

и введем оператор P

$$P(\mathbf{l}_{ij},S_{ij})=\frac{1}{2G}S_{ij}(t)+9DG^2\int_0^t K(\tau)\mathbf{l}_u^2(\tau)\mathbf{l}_{ij}(\tau)d\tau, \tag{9}$$

где 0≤$0\le\tau\le\alpha$, $0\le t\le\alpha$, $\mathbf{l}_u^2=\frac{2}{3}\mathbf{l}_{ij}\mathbf{l}_{ij}$ – интенсивность деформаций, а ядро

$$K(\tau)=\begin{cases}\tau^{-\alpha}, & 0\le\tau\le t\\ 0, & \tau>t\end{cases}.$$

Предположим, что $S_{ij}(\tau)$, $\mathbf{l}_{ij}(\tau)$ – элементы пространства $C[0,\alpha]$ с нормой $\|h_{ij}\|=\max\limits_{0\le\tau\le\alpha}|h_{ij}|$. Известно [6], что операторы типа (9), определенные на $C[0,\alpha]$, дифференцируемы в этом пространстве по Фреше. В частности, производная по Фреше от P определяется соотношением:

$$P'_{\tilde{\mathbf{l}}_{ij}}(\mathbf{l}_{ij})=9DG^2\int_0^t \tau^{-\alpha} f[\tilde{\mathbf{l}}_{ij}(\tau)]\mathbf{l}_{ij}(\tau)d\tau,$$

где

$$f(\tilde{\mathbf{l}}_{ij})=\begin{cases}\tilde{\mathbf{l}}_u^2+\frac{4}{3}\tilde{\mathbf{l}}_{IJ}^2, & i=j\\ \tilde{\mathbf{l}}_u^2+\frac{8}{3}\tilde{\mathbf{l}}_{IJ}^2, & i\ne j\end{cases},$$

при этом суммирование по i не производится.

Выделим в $C[0,\alpha]$ шар $R\|\mathbf{l}_{ij}\| \le r$. Если в R имеет место неравенство $\left\| P^{|}_{\tilde{\mathbf{l}}_{ij}}(\mathbf{l}_{ij}) \right\| \le L$, то для любых $\mathbf{l}^{|}_{ij}$, $\mathbf{l}^{||}_{ij} \in R$

$$\left\| P(\mathbf{l}^{|}_{ij}, S_{ij}) - P(\mathbf{l}^{||}_{ij}, S_{ij}) \right\| \le L \left\| \mathbf{l}^{|}_{ij} - \mathbf{l}^{||}_{ij} \right\|. \tag{10}$$

В силу условия (10) при L<1 оператор P является сжимающим в R, т.е. его неподвижную точку можно найти методом последовательных приближений, принимая за начальное нулевое приближение, удовлетворяющее неравенству [5]

$$\left\| P(0, S_{ij}) \right\| \le (1-L)r. \tag{11}$$

Определим условия, при которых L<1:

$$\left\| P^{|}_{\tilde{\mathbf{l}}_{ij}}(\mathbf{l}_{ij}) \right\| = \max_{0\le\tau\le\alpha} \left| 9DG^2 \int_0^t K(\tau) f[\tilde{\mathbf{l}}_{ij}(\tau)] \mathbf{l}_{ij}(\tau) \partial\tau \right| \le 9DG^2 \left\| \mathbf{l}_{ij} \right\| \cdot \left\| f(\tilde{\mathbf{l}}_{ij}) \right\| \cdot \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \le 81DG^2 r^3 \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

.

Таким образом, $L = 81DG^2 r^3 \dfrac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} < 1$, если

$$t < \left(\frac{1-\alpha}{81G^2 Dr^3} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{12}$$

Для того чтобы удовлетворить (11), примем

$$\left\| S_{ij} \right\| \le 2G(1-L)r, \tag{13}$$

предполагая, что условия (12), (13) выполнены, и используя (9), в результате второго приближения получим уравнение:

$$l_{ij}(t) = \frac{1}{2G} S_{ij}(t) + \frac{D}{2G} \int_0^t \tau^{-\alpha} \sigma_u^2(\tau) S_{ij}(\tau) d\tau, \tag{14}$$

где $\sigma_u^2 = \dfrac{3}{2} S_{ij} S_{ij}$ – интенсивность напряжений.

Это уравнение в рамках упомянутого приближения обратно (8) и с той же точностью аппроксимирует реальный оператор, связывающий девиаторы деформаций и напряжений.

В работе [7] исследована сходимость метода упругих решений для уравнений механического состояния вида

$$S_{ij}(t)=\int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)\mathbf{l}_{ij}(\tau)d\tau-\int\limits_0^t \Gamma_\varphi(t-\tau)\varphi(\mathbf{l}_u^2)\mathbf{l}_{ij}(\tau)d\tau, \tag{15}$$

где ядра разбиваются на сингулярную и регулярную составляющие:

$$\Gamma(t)=\overset{0}{\Gamma}\delta(t)+\breve{\Gamma}(t);\quad \Gamma_\varphi(t)=\overset{0}{\Gamma}_\varphi\,\delta(t)+\breve{\Gamma}_\varphi(t).$$

При этом некоторая вектор-функция u называется обобщенным решением краевой задачи для области V с границей S:

$$S_{ij,j}(u)+\sigma_{,i}(u)+F_i=0, \tag{16}$$

$$u\big|_{S=0}, \tag{17}$$

если u удовлетворяет интегральному тождеству:

$$\int\limits_v [S_{ij}(u)\mathbf{l}_{ij}(w)+f_i w_i]=0,$$

где $f_i=\sigma_{,i}+F_i$, $а$ $\sigma=\frac{1}{3}\sigma_{ii}$.

Далее вводится скалярное произведение для некоторых дифференцируемых функций

$$(u,w)=\int\limits_\nu \mathbf{l}_{ij}(u)\mathbf{l}_{ij}(w)d\nu \tag{18}$$

и ищется обобщенное решение в пространстве H, которое получается замыканием по норме (18) множества дважды непрерывно дифференцируемых векторов-функций, удовлетворяющих (16). При этом метод упругих решений краевой задачи (16), (19) для уравнений механического состояния (15) сходится к единственному решению, если уравнение $x=\int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)y(\tau)d\tau$ однозначно разрешимо в виде $y=\int\limits_0^t K(t-\tau)x(\tau)d\tau$, а функция $\varphi(\mathbf{l}_u^2)$ *и ядро* $\Gamma_\varphi(t)$ таковы, что для любого $t\geq 0$:

$$0 \le \varphi(\mathbf{l}_u^2) \le \varphi(\mathbf{l}_u^2) + \frac{\varphi(\mathbf{l}_u^2) - \varphi(\mathbf{l}_{u1}^2)}{\mathbf{l}_u - \mathbf{l}_{u1}} \mathbf{l}_{u1} \le \eta, \tag{19}$$

$$\left| \Gamma_\varphi(t) \right| \le A\Gamma(t),$$

причем $A\eta = q < 1$, а начальное приближение выбрано из условия $\mathbf{l}_{u0}^2 \le (1 - A\eta)M$, где M – константа, ограничивающая $\mathbf{l}_u^2$ $(\mathbf{l}_u^2 \le M)$.

Уравнения (8) вытекают из (15), если в последних положить $\overset{0}{\Gamma} = 2G,\ \tilde{\Gamma}(t) = \overset{0}{\Gamma}_\text{к} = 0,\ \varphi(\mathbf{l}_u^2) = \mathbf{l}_u^2$ и во втором интеграле вместо $\tilde{\Gamma}_\varphi(t-\tau)$ ввести функцию $\Gamma(\tau) = 18DG^3\tau^{-\alpha}$.

Приведенная теорема о сходимости метода упругих решений распространяется на (8), а следовательно, и на уравнения (14). Если $\max\limits_{0\le\tau\le t} |\mathbf{l}_{ij}| \le r$, то для удовлетворения неравенства (19) достаточно положить $\eta = 12r^2$. Тогда метод упругих решений для уравнений механического состояния (8), (14) сходится, если η и начальное приближение u_0 удовлетворяют неравенствам:

$$\eta \le 10^{-3}\ ;\quad \mathbf{l}_u^2(u_0) \le (1-\eta)M\ . \tag{20}$$

В промежутке времени $[0 - 8{,}7 \cdot 10^3$ ч] компоненты девиаторов напряжений и деформаций, соответствующие параметрам упругости и ползучести каменной соли, обеспечивают выполнение условий (12), (13) и (20). За начальное приближение u_0 принимается упругое решение.

Список литературы

1. Ержанов, Ж. С. Об оценке устойчивости формы осесимметричной полости в соляном массиве / Ж. С. Ержанов, Г. А. Аршинов, Э. И. Бергман // Известия АН КазССР. Сер. Физ.-мат. – 1974. – № 5.
2. Ержанов, Ж. С. Теория ползучести горных пород и ее приложения / Ж. С. Ержанов. – Алма-Ата : Наука, 1964.

3. Ержанов, Ж. С. Ползучесть соляных пород / Ж. С. Ержанов, Э. И. Бергман. – Алма-Ата : Наука, 1977.
4. Зенкевич, О. С. Метод конечных элементов в технике / О. С. Зенкевич. – М. : Мир, 1975.
5. Илюшин, А. А. Основы математической теории термовязкоупругости / А. А. Илюшин, Б. Е. Победря. – М. : Наука, 1970.
6. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Наука, 1965.
7. Победря, Б. Е. О сходимости метода упругих решений в нелинейной вязкоупругости / Б. Е. Победря // ДАН АН СССР. – 1970. – Т. 195. – № 2.