УДК 303.732.4

**КОЭФФИЦИЕНТ ЭМЕРДЖЕНТНОСТИ КЛАССИЧЕСКИХ И КВАНТОВЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Луценко Евгений Вениаминович
д.э.н., к.т.н., профессор
*Кубанский государственный аграрный университет, Россия, 350044, Краснодар, Калинина, 13,*
*prof.lutsenko@gmail.com*

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D.
*A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада*

В статье дано системное обобщение формулы Хартли для количества информации. Предложен коэффициент эмерджентности, применимый для систем, подчиняющихся классической или квантовой статистике. Дан алгоритм оценки уровня системности квантовых объектов. Рассмотрены квантовые системы, подчиняющиеся статистике Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна, а также классические системы подчиняющиеся статистике Максвелла-Больцмана. Установлено, что коэффициенты эмерджентности квантовых и классических систем отличаются между собой, как и коэффициенты квантовых систем ферми-частиц и бозе-частиц. Следовательно, коэффициент эмерджентности позволяет отличить классическую систему от квантовой системы, а квантовую систему ферми-частиц от квантовой системы бозе-частиц

Ключевые слова: КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА, СТАТИСТИКА ФЕРМИ-ДИРАКА, СТАТИСТИКА БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНА, СТАТИСТИКА МАКСВЕЛЛА-БОЛЬЦМАНА, СИСТЕМНАЯ ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ, ЭМЕРДЖЕНТНОСТЬ

UDC 303.732.4

**EMERGENCE PARAMETER OF CLASSICAL AND QUANTUM STATISTICAL SYSTEMS**

Lutsenko Evgeny Veniaminovich
Dr.Sci.Econ., Cand.Tech.Sci., professor
*Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia*

Alexander Trunev
Ph.D.
*A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada*

In this article we give a generalization of Hartley's model for the measure of information. We propose a rate of emergence, which is applicable to systems obeying classical or quantum statistics. Quantum systems that obey Fermi-Dirac statistics and Bose-Einstein condensate, as well as classical systems obeying the Maxwell-Boltzmann statistics have been considered. We found that the emergence parameter of quantum and classical systems differ as well as the emergence parameter of quantum systems of fermions and bosons. Consequently, the emergence parameter might be used to distinguish the classical system and quantum system, as well as quantum system of fermions and the quantum system of bosons

Keywords: COMPLEX SYSTEM, EMERGENCE, INFORMATION THEORY, QUANTUM STATISTICS, FERMI-DIRAC STATISTICS, BOSE-EINSTEIN STATISTICS, MAXWELL-BOLTZMANN STATISTICS

В классической теории информации Хартли-Шеннона понятие информации определяется на основе теоретико-множественных и комбинаторных представлений на основе анализа поведения классического макрообъекта, который может переходить только в четко фиксированные альтернативные редуцированные состояния, например монета, может упасть либо на "орел", либо на "решку". Если эти варианты равновероятны, то при реализации одного из них по формуле Хартли мы получаем информацию в 1 бит, при реализации одного из W равновероятных состояний мы получаем информацию $I=Log_2W$ бит, если неравновероятны, то для расчета количества информации используется формула Шеннона [1].

Однако квантовые объекты могут быть одновременно в двух и более альтернативных для классических объектов состояниях [2]. Такие состояния будем называть смешанными.

Например, электрон может интерферировать, проходя одновременно через две щели [2]. При этом наблюдаются эффекты, не сводящиеся к суперпозиции классических состояний, т.е. имеющие квантовый, системный, эмерджентный, нелинейный характер.

Поэтому классическая теория информации Хартли-Шеннона может быть обобщена путем рассмотрения квантовых систем в качестве объектов, на основе анализа поведения которых формируется само основополагающее понятие информации. Обобщенную таким образом теорию информации предлагается называть системной или эмерджентной теорией информации.

Основным отличием эмерджентной теории информации от классической является учет свойства системности, как фундаментального и универсального свойства всех объектов, на уровне самого понятия информации. Достаточно рассмотреть квантовое обобщение теории Хартли, т.к. путь вывода теории Шеннона из теории Хартли хорошо известен [1].

Ричард Фейнман [2] рассмотрел пример интерференции электрона на двух щелях при наблюдении этого процесса с помощью эффекта Комптона, т.е. путем рассеяния фотонов на электроне. В этом случае электрон всегда наблюдается в форме объекта с размером порядка длины волны света, и как выяснилось, его свойства самым существенным образом зависят от его наблюдаемого, а значит и фактического размера. Мы не будем детально приводить известную аргументацию Р. Фейнмана [2], но коснемся лишь моментов, играющих ключевую роль в квантовом (системном) обобщении понятия "информация".

Когда длина волны фотонов меньше расстояния между щелями, то видно, что электрон проходит через одну из щелей. В этом случае на экране за каждой щелью наблюдается классическое распределение плотности. Суммарная плотность $N_{12}$ является просто суммой распределений $N_1$ и $N_2$, полученных соответственно от щелей 1 и 2 – рис. 1. Следовательно, имеем в этом случае:

$$N_{12}(x) = N_1(x) + N_2(x) \quad (1)$$

Когда длина волны фотонов порядка расстояния между щелями или больше, то видно, как он проходит через экран "накрывая" обе щели одновременно. В этом случае за ними наблюдается сложная интерференционная картина, нисколько не напоминающая сумму или суперпозицию классических распределений за 1-й и 2-й щелями, т.е. не являющуюся их суммой – рис. 2.

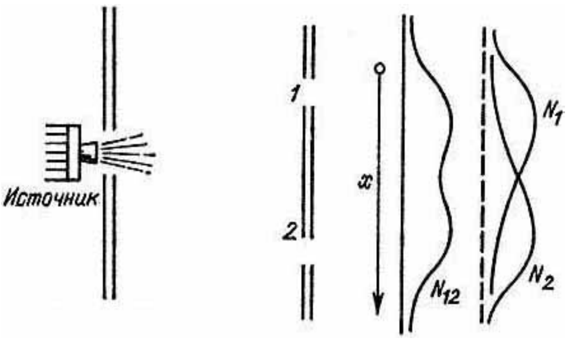


**Рисунок 1. Классический объект, интерференции нет**

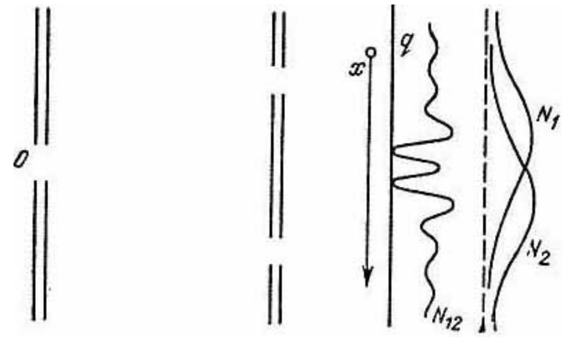


**Рисунок 2. Квантовый объект, интерференция есть**

Введем следующие обозначения:

$y_1(x)$ – волновая функция или амплитуда вероятности, квадрат модуля которой характеризует вероятность попадания электрона в точку х экрана через отверстие 1;

$y_2(x)$ – волновая функция, квадрат модуля которой характеризует вероятность попадания электрона в точку х экрана через отверстие 2;

$y_{12}(x)$ – суммарная амплитуда вероятности, квадрат модуля которой характеризует вероятность попадания электрона в точку х экрана через отверстия 1 и 2 одновременно.

Согласно законам квантовой механики, складываются волновые функции, а не вероятности, как в классическом случае, поэтому имеем:

$$y_{12}(x) = y_1(x) + y_2(x);$$
$$N_{12}(x) = \left|y_{12}(x)\right|^2;\ \ N_1(x) = \left|y_1(x)\right|^2;\ \ N_2(x) = \left|y_2(x)\right|^2 \qquad (2)$$

Отсюда находим, что

$$\left|y_{12}(x)\right| = \left|y_1(x) + y_2(x)\right|^2 = \left|a_1(x)e^{if_1} + a_2(x)e^{if_2}\right|^2$$
$$N_{12} = N_1(x) + N_2(x) + 2 \cdot \sqrt{N_1(x) \cdot N_2(x)}\cos(f_1 - f_2) \qquad (3)$$

Здесь $a_j(x), f_j$ – амплитуда и фаза волновой функции соответственно. Сравнивая выражения (1) и (3) видим, что квантовый эффект прохождения электрона через две щели одновременно приводит к появлению дополнительного слагаемого, описывающего интерференцию – рис. 2.

Это дополнительное слагаемое учитывает системный эффект состоящий в том, что состояния объекта, в классической теории считавшиеся альтернативными, т.е. одновременно не реализуемыми ни при каких условиях, в квантовой теории таковыми не являются и могут осуществляться одновременно, что приводит к возможности нахождения объекта в смешанных состояниях.

Если вероятность прохождения электрона через каждую из W щелей одинакова, то по классической теории Хартли в самом факте пролета электрона через одну из щелей содержится количество информации:

$$I = Log_2 W \qquad (4)$$

где W – количество щелей, или, в общем случае, классических состояний объекта.

В соответствии с концепцией эмерджентной теории информации, предлагается ввести в это выражение параметр, учитывающий квантовые системные эффекты нахождения объекта в смешанных состояниях. В результате количество состояний объекта возрастает и, следовательно, так же возрастает и количество информации, которое мы получаем, когда узнаем, что он перешел в одно из этих состояний:

$$I = Log_2 W^j \qquad (5)$$

где φ – степень эмерджентности системы (синоним: уровень системности объекта), в частности:

$$\begin{cases} j < 1 - \textit{деструктивная система}; \\ j = 1 - \textit{классическая система}; \\ j > 1 - \textit{синтетическая система}. \end{cases}$$

Для деструктивных систем свойства целого меньше свойств частей, для классических систем они совпадают, для синтетических систем свойства целого больше свойств частей и не сводятся к ним.

На первый взгляд можно было бы просто увеличить количество состояний системы W за счет учета смешанных состояний. Однако этот путь не удовлетворяет известному принципу соответствия, который в данном контексте требует, чтобы в предельном случае более общая теория переходила в уже известную, классическую теорию.

Здесь уместно привести теорему, впервые доказанную известным кибернетиком У. Эшби: у системы тем больше возможностей в выборе поведения, чем сильнее степень согласованности поведения ее частей.

Теорема Эшби описывает систему в точке бифуркации, причем, по сути, он при этом использует понятие "степень эмерджентности объекта", хотя в явном виде и не вводит его. Более того, он указывает на источник эмерджентности: – взаимодействие частей и связывает уровень системности или уровень системной организации со степенью взаимодействия этих частей.

В теории информации есть теорема, доказывающая, что энтропия системы в целом меньше суммы энтропии ее частей на величину взаимной информации частей друг о друге. Таким образом, можно утверждать, что способность системы к выбору прямо пропорциональная степени ее эмерджентности и самым непосредственным образом связана с ее способностью, противостоять действию закона возрастания энтропии.

Таким образом, и теоретико-информационное рассмотрение сложных активных самоорганизующихся систем, каким является человек и системы с участием человека, и рассмотрение квантовых систем, приводит к необходимости разработки эмерджентной теории информации, в которой используется обобщенное понятие информации, учитывающее эффект системности с помощью коэффициента эмерджентности.

Рассмотрим численный пример вычисления коэффициента эмерджентности для простого случая, когда все рассматриваемые места работы равновероятны. Пусть количество мест, куда может пойти работать выпускник после получения 1-й специальности будет равно: $W_1=6$, после получения 2-й специальности: $W_2=10$, а при *одновременном* получении обоих специальностей дополнительно появляется еще $\Delta W=16$ мест работы, откуда:

$$W_3= W_1+W_2+DW =32$$

Тогда в 1-м случае, если мы узнаем, что выпускник устроился на определенное место работы, то мы получаем

$$I_1=\mathrm{Log}_2 W_1\approx 2{,}58 \text{ бит}$$

информации, во 2-м случае, соответственно:

$$I_2=\mathrm{Log}_2 W_2\approx 3{,}32 \text{ бита}$$

Но в 3-м случае мы получаем не

$$I_3=\mathrm{Log}_2(W_1+W_2)=4 \text{ бита},$$

как можно было бы ожидать, если бы не было интерференции последствий, т.е. системного эффекта, а на 1 бит больше:

$$I_3=\mathrm{Log}_2 W_3=5 \text{ бит}. \quad (6)$$

Таким образом, при наблюдении за поведением объектов, при рассмотрении их как элементов некоторой системы, мы получаем больше информации, чем при рассмотрении их как автономных объектов, т.е. вне системы.

Это можно объяснить тем, что дополнительная информация – это и есть информация о системе, о том, как она влияет на поведение своего элемента.

Указанные 16 дополнительных состояний (мест работы) выпускника в 3-м случае образовались за счет системного эффекта (эмерджентности) и являются "смешанными", образующимися за счет одновременного наличия у выпускника свойств, полученных при окончании и 1-й, и 2-й специальности, поэтому, учитывая выражения (4) и (5), получаем:

$$I_3=Log_2W_3= Log_2(W_1+W_2)^j$$

Откуда:

$$j = \frac{Log_2(W_1 + W_2 + \Delta W)}{Log_2(W_1 + W_2)} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

Следовательно, одновременное окончание двух специальностей в рассмотренном случае дает системный эффект 1,25.

Таким образом, предлагаемый концептуальный подход к построению эмерджентной теории информации позволяет количественно учитывать системный эффект или эмерджентность непосредственно на уровне самого понятия "информация", что имеет большое значение для науки и практики применения теории информации и системного анализа для управления активными объектами.

Рассмотрим, что изложенный информационный подход может дать для оценки уровня системности квантовых объектов.

В 2002 году одним из авторов [1] было предложена идея, состоящая в том, что количество информации в системе больше количества информации во множестве образующих ее базовых элементов, т.к. подсистемы, состоящие из нескольких элементов, содержат информацию также как и базовые элементы [1]. Понятно, что базовые элементы также являются подсистемами, т.к. кроме систем в мире вообще ничего не существует, а подсистемы некоторого иерархического уровня системы, например, состоящие из m базовых элементов, могут рассматриваться как базовые элементы этого иерархического уровня [3-4].

Если базовое множество содержит W элементов, то по Хартли количество информации, которое мы получаем, когда выбираем некоторый элемент, равно:

$$I = Log_2 W \tag{7}$$

Если базовые элементы могут взаимодействовать друг с другом, то они могут образовывать подсистемы.

Здесь и возникают принципиальные вопросы о том:

– какие элементы могут образовывать подсистемы, а какие не могут;

– сколько подсистем различной сложности может быть образовано из W базовых элементов?

Ответы на эти вопросы зависят от того, какой квантовой статистике подчиняется образующаяся система.

Рассмотрим квантовую систему, состоящую из ряда подсистем, которые пронумеруем целым числом $j = 1, 2, 3,...$. Каждая подсистема характеризуется числом состояний $G_j$ и числом частиц $N_j$, которые находятся в этих состояниях и обладают энергией $e_j$. Определим число возможных способов распределения $N_j$ частиц по $G_j$ состояниям. В случае статистики Ферми в каждом состоянии может находиться не более чем одна частица, поэтому число способов равно [5-6]

$$\Delta\Gamma_j = \frac{G_j!}{N_j!(G_j - N_j)!} \tag{8}$$

В случае статистики Бозе в каждом состоянии может находиться любое число частиц, следовательно, число способов равно [5-6]

$$\Delta\Gamma_j = \frac{(G_j + N_j - 1)!}{N_j!(G_j - 1)!} \tag{9}$$

Энтропия, общее число частиц и энергия системы равны по определению

$$S = \sum_j \ln\Delta\Gamma_j,\ N = \sum_j N_j,\ E = \sum_j e_j N_j \qquad (10)$$

Найдем числа $n_j = N_j / G_j$, которые соответствуют экстремуму энтропии при условии постоянства общего числа частиц и энергии системы. Если число состояний и число частиц в каждой подсистеме достаточно велико, $N_j, G_j >> 1$, то можно воспользоваться приближенной формулой для логарифма факториала $\ln N_j! \approx N \ln(N/e)$. В этом случае выражение энтропии квантовых систем упрощается и принимает вид:

$$\begin{aligned} S_F &= -\sum_j G_j [n_j \ln n_j - (1-n_j)\ln(1-n_j)], \\ S_B &= \sum_j G_j [(1+n_j)\ln(1+n_j) - n_j \ln n_j] \end{aligned} \qquad (11)$$

Здесь первое выражение соответствует энтропии системы фермионов, а второе – системы бозонов.

Используя метод Лагранжа, составим функционал $S_k + aN + bE$, где $a, b$ - некоторые постоянные. Экстремум энтропии достигается при условии

$$\frac{\partial}{\partial n_j}(S_k + aN + bE) = 0$$

Отсюда находим два типа распределения

$$n_j = \frac{1}{\exp(a + be_j) \pm 1} \qquad (12)$$

Отметим, что знак плюс соответствует распределению Ферми, а знак минус – распределению Бозе.

Следовательно, в случае статистики Ферми на образование подсистем накладывается ограничение на число частиц, которые могут находиться в одном состоянии. С учетом этого ограничения все элементы базового множества могут образовывать подсистемы в любых сочетаниях, а их общее число определяется выражением (8), которое запишем в виде

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{13}$$

Здесь n – число состояний системы; m – число частиц находящихся в этих состояниях.

Ясно, что при фиксированном числе состояний в системе могут быть подсистемы из 1, 2, 3, …, W элементов. При этом подсистемы из 1-го элемента это сами базовые элементы, а подсистема из W элементов – это вся система в целом (булеан) [7-8].

На всех иерархических уровнях системы от 1-го до W, суммарно будет содержаться общее число подсистем:

$$N_{FD} = \sum_{m=1}^{W} C_n^m = \sum_{m=1}^{W} \frac{n!}{m!\,(n-m)\,!} \tag{14}$$

В работе [1] предложено считать, что количество информации в системе можно рассчитывать по формуле Хартли (7), полагая, что элементами системы являются не только ее базовые элементы, но и состоящие из них подсистемы, количество которых в системе определяется выражением (14). Таким образом, количество информации в системе будет:

$$I_{FD} = Log_2 N_{FD} = Log_2 \sum_{m=1}^{W} C_n^m = Log_2 \sum_{m=1}^{W} \frac{n!}{m!\,(n-m)\,!} \tag{15}$$

Или окончательно:

$$I_{FD} = Log_2 \sum_{m=1}^{W} C_n^m \tag{16}$$

Выражение (11) представляет собой системное обобщение формулы Хартли для количества информации в квантовой системе, подчиняющейся статистике Ферми-Дирака с заданным числом состояний и с переменным числом частиц.

В работе [1] предложено оценивать уровень системности или сложности системы отношением количества информации в системе (с учетом входящих в нее подсистем всех уровней иерархии) к количеству информации во множестве образующих ее базовых элементов:

$$H_{FD}(n,W) = \frac{Log_2 \sum_{m=1}^{W} C_n^m}{Log_2 W} \tag{17}$$

Это выражение было названо в работе [1] *коэффициентом эмерджентности Хартли*, в честь этого выдающегося ученого, внесшего большой вклад в становление научной теории информации, а также потому, что в нем использовано классическое выражение Хартли для количества информации (7) и его системное обобщение (16).

На рис. 3 представлена зависимость коэффициента эмерджентности Хартли (17), представляющая собой поверхность. Отметим, что в области параметров $n \le 137$, характерной для ядерных и атомных оболочек, коэффициент эмерджентности изменяется немонотонно с ростом W, что позволяет объяснить поведение энергии связи нуклонов в атомных ядрах [10].

Непосредственно из вида выражения для коэффициента эмерджентности Хартли (17) ясно, что он представляет собой относительное превышение количества информации в квантовой системе, подчиняющейся статистике Ферми-Дирака, при учете системных эффектов (смешанных состояний, иерархической структуры ее подсистем и т.п.) над количеством информации без учета системности.

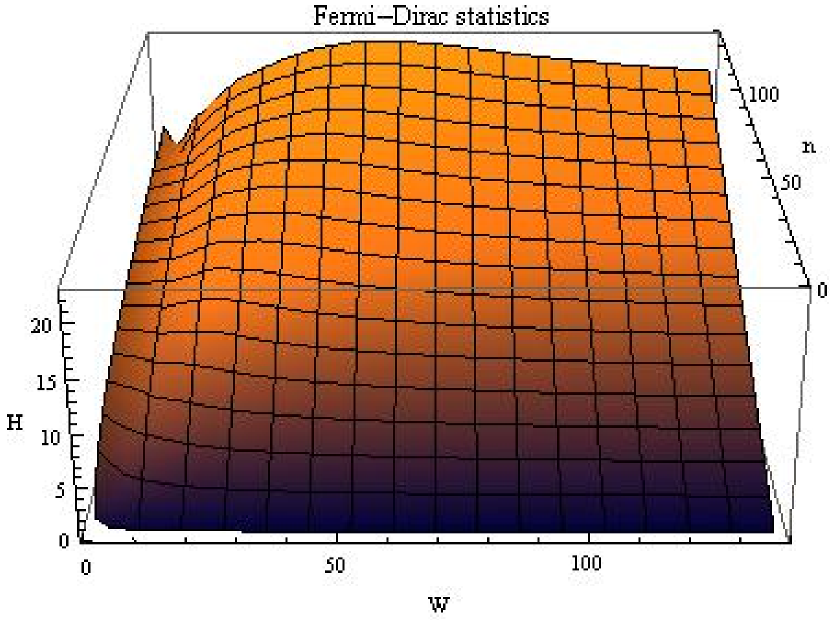


Рис. 3. Поведение коэффициента эмерджентности Хартли в случае статистики Ферми-Дирака.

В работе [1] показано, что при n=W выражение (16) приобретает вид:

$$N_{FD} = \sum_{m=1}^{W} C_W^m = 2^W - 1 \quad (18)$$

Выражение (11) для количества информации в системе с учетом (18):

$$I_{FD} = Log_2(2^W - 1) \quad (19)$$

Выражение (19) дает *оценку максимального количества информации*, которое может содержаться в системе при вхождении всех элементов во все подсистемы различных уровней иерархической структуры.

Из выражения (19) видно, что I достаточно быстро стремится к W, поскольку

$$\lim_{W \to \infty} I / W = 1 \quad (20)$$

При W > 4 различие I и W в выражении (20) не превышает 1%. Таким образом, коэффициент эмерджентности Хартли (17) отражает уровень системности объекта, подчиняющегося статистике Ферми-Дирака. Этот коэффициент изменяется от 1 (системность минимальна, т.е. отсутствует) до $W/Log_2W$ (системность максимальна).

Для каждого количества элементов системы существует свой максимальный уровень системности, который никогда реально не достигается из-за действия **правил запрета** на реализацию в системе ряда подсистем различных уровней иерархии. Например, не все сочетания букв русского алфавита образуют слова русского языка, и не все сочетания слов – предложения. В каждом состоянии может находиться только одна частица и т.п. По этой причине систему правил запрета в [1] предложено назвать информационным проектом системы. Различные системы, состоящие из равного количества одинаковых элементов, отличаются друг от друга именно по причине различия своих информационных проектов.

Одним из наиболее важных и известных в физике правил запрета, который действует на квантовые системы, подчиняющиеся статистике Ферми-Дирака, является принцип Паули. Это один из основополагающих принципов, влияющий на строение химических элементов, классифицированных в таблице Д. И. Менделеева [9-10].

Таким образом, в работе [1] по сути, предложено системное обобщение формулы Хартли и коэффициент эмерджентности Хартли для случая квантовых систем, подчиняющихся статистике Ферми-Дирака. Однако статистике Ферми-Дирака подчиняются только квантовые системы с полуцелым спином, тогда как квантовые системы с целым спином описываются статистикой Бозе-Эйнштейна.

Для этой статистики число различных подсистем рассчитывается по формуле (9), которую запишем в форме

$$C_{r+k-1}^{r} = \frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} \tag{21}$$

Здесь k – число состояний, r – число частиц в системе. На всех иерархических уровнях квантовой системы, подчиняющейся статистике Бозе-Эйнштейна, от 1-го до W, суммарно будет содержаться общее число подсистем

$$N_{BE} = \sum_{r=1}^{W} C_{r+k-1}^{r} = \sum_{r=1}^{W} \frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} \tag{22}$$

Предположим, что количество информации в квантовой системе, подчиняющейся статистике Бозе-Эйнштейна, можно рассчитывать по формуле Хартли (7), полагая, что элементами системы являются не только ее базовые элементы, но и состоящие из них подсистемы, количество которых в системе определяется выражением (22). Таким образом, количество информации в такой квантовой системе, подчиняющейся статистике Бозе-Эйнштейна, будет:

$$I_{BE} = Log_2 N_{BE} = Log_2 \sum_{r=1}^{W} C_{r+k-1}^{r} = Log_2 \sum_{r=1}^{W} \frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} \tag{23}$$

Или окончательно:

$$I_{BE} = Log_2 \sum_{r=1}^{W} C_{r+k-1}^{r} \tag{24}$$

Выражение (19) представляет собой системное обобщение формулы Хартли для количества информации в квантовой системе, подчиняющейся статистике Бозе-Эйнштейна.

Соответственно, выражение для коэффициента эмерджентности Хартли для случая квантовых систем, подчиняющихся статистике Бозе-Эйнштейна, будет иметь вид:

$$H_{BE}(k,W) = \frac{Log_2 \sum_{r=1}^{W} C_{r+k-1}^{r}}{Log_2 W} \tag{25}$$

На рис. 4 представлена зависимость коэффициента эмерджентности Хартли (25) в области параметров $k, W \leq 150$. Можно отметить существенное различие в поведении функции (25) и аналогичного коэффициента вычисленного для случая статистики Ферми-Дирака – см. рис. 3.

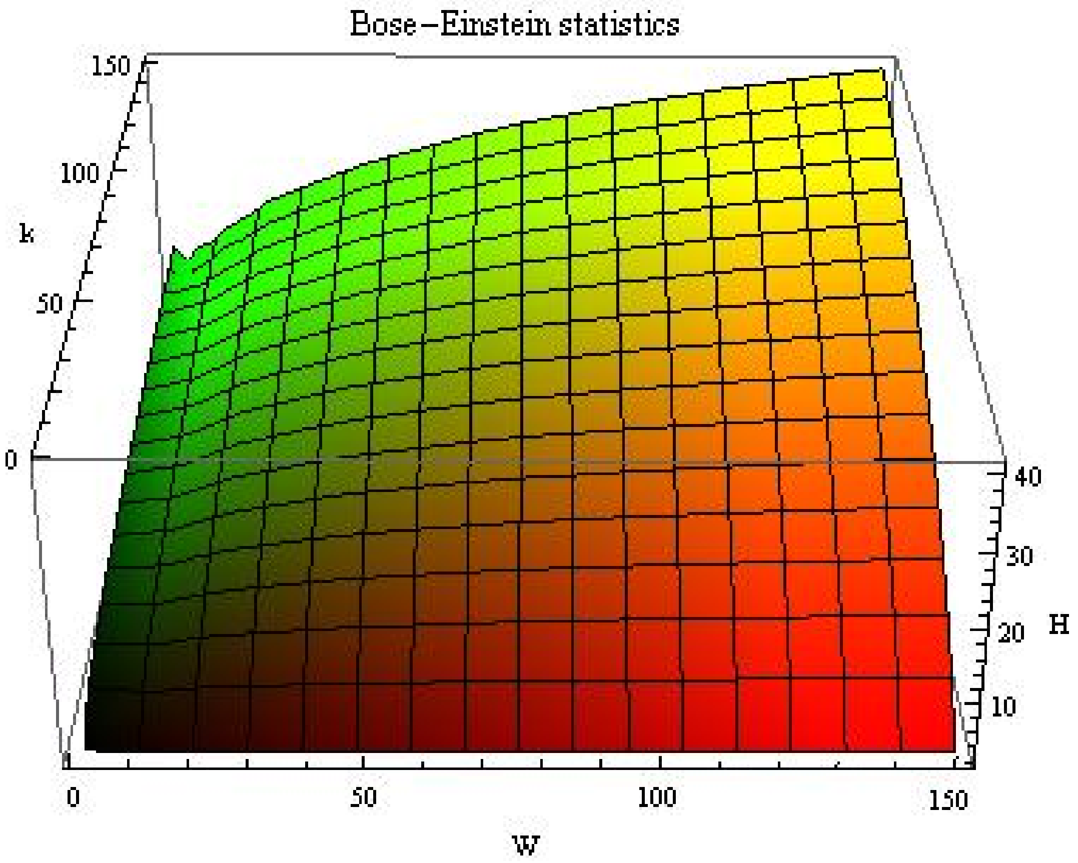


Рис. 4. Поведение коэффициента эмерджентности Хартли в случае статистики Бозе-Эйнштейна.

Отметим, что обе квантовые статистики – и Ферми-Дирака, и Бозе-Эйнштейна, асимптотически приближаются к статистике Максвелла-Больцмана в пределе высоких температур и низких плотностей, что непосредственно следует из выражения (12). В случае статистики Максвелла-Больцмана число подсистем, которое можно образовать при заданном значении числа состояний определяется согласно [5]

$$\Delta\Gamma_j = \frac{G_j^{N_j}}{N_j!} \tag{26}$$

Отсюда находим коэффициент эмерджентности классических систем в виде

$$H_{MB}(G,W) = \frac{Log_2 \sum_{N=1}^{W} G^N / N!}{Log_2 W} \tag{27}$$

Здесь N – число частиц, G – число состояний. На рис. 5 представлена зависимость (27) в области параметров $G, W \le 150$. По характеру поведения коэффициент эмерджентности классических систем при малом числе состояний и частиц занимает промежуточное положение между аналогичными коэффициентами, вы численными для ферми- и бозе-систем – см. рис 3-4.

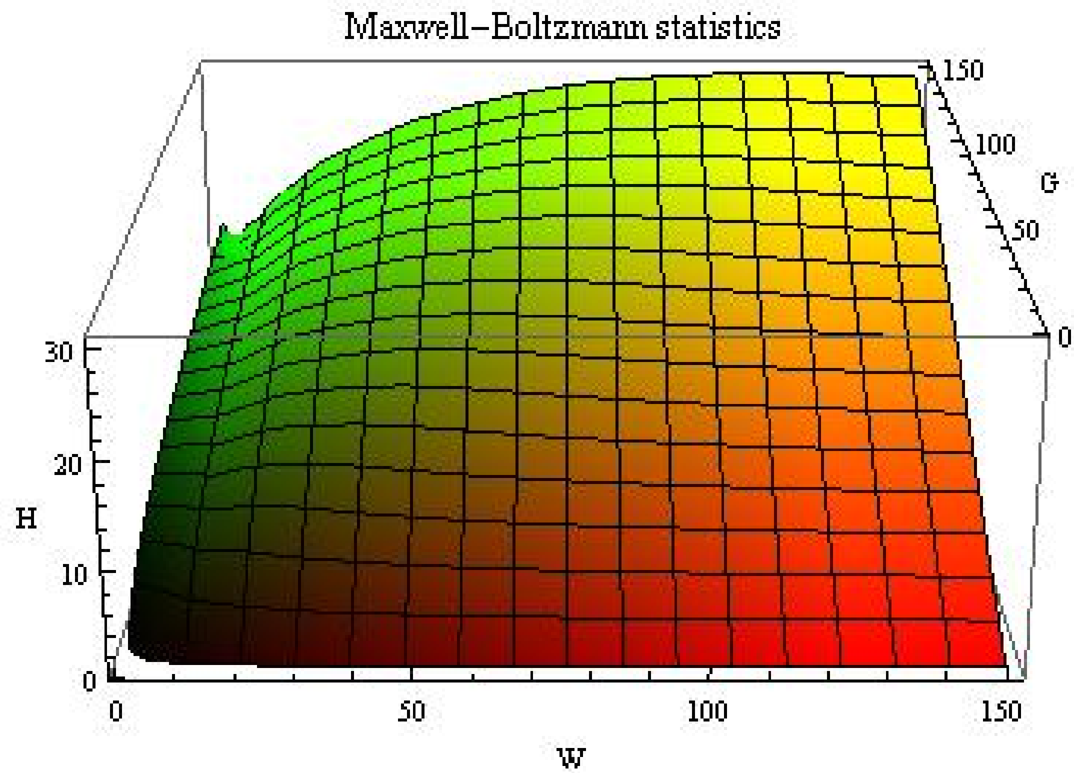


Рис. 5. Поведение коэффициента эмерджентности Хартли в случае статистики Максвелла-Больцмана.

Наконец, рассмотрим поведение коэффициента эмерджентности всех трех систем для больших значений параметров числа состояний и частиц – рис. 6. Отметим, что максимальное число подсистем для данных, приведенных на рис. 6 составляет:

- статистика Ферми-Дирака - $3.50746621\times10^{451}$.
- статистика Бозе-Эйнштейна - $1.79196794\times10^{901}$.
- статистика Максвелла-Больцмана - $1.4015754\times10^{651}$.

При этом максимальное число состояний и частиц в каждом случае равно 1500. Общее число подсистем на всех уровнях иерархии, т.е. включающих по W=1, 2, 3, …, 10 элементов, для статистки Ферми-Дирака согласно выражения (14) для этого случая, т.е. при n=1500 уровней имеет вид:

{W, $N_{FD}$}
{1, 1500}
{2, 1125750}
{3, 562501250}
{4, 210657282125}
{5, 63071015719925}
{6, 15725776993138425}
{7, 3358594738459315425}
{8, 627221514672084598050}
{9, 104049830019224187006550}
{10, 15524360758047942656113900}

Все результаты, представленные на рис. 3-6, получены с использованием системы Wolfram Mathematica 9.0 [11]. В этой системе максимальное число в вычислениях с плавающей точкой равно $MaxMachineNumber = $1.79769*10^{308}$. Максимальное же число, которое может быть представлено на компьютере, использованном в вычислениях приведенных выше данных, составляет $MaxNumber= 2.174188391646043*10$^{20686623745}$.

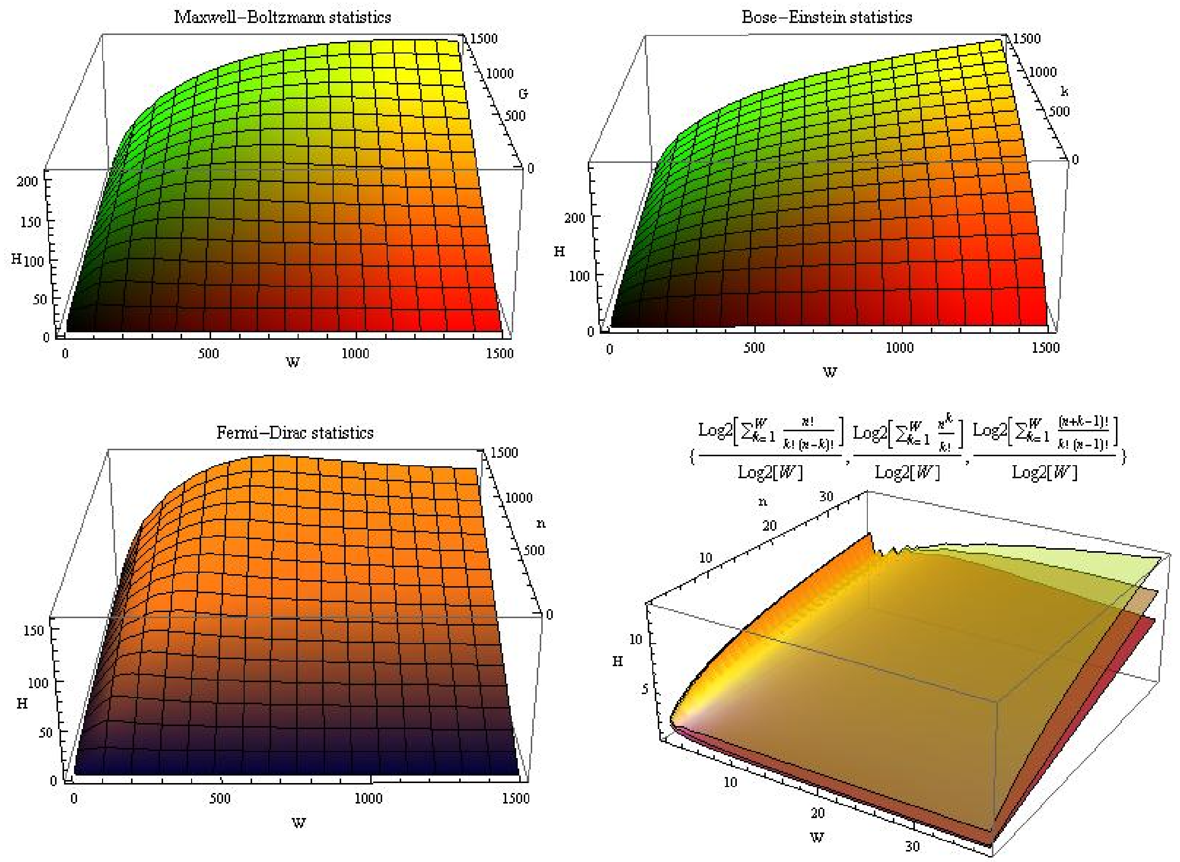


Рис. 6. Поведение коэффициента эмерджентности Хартли в случае классической и квантовой статистики. На правом нижнем рисунке поверхности коэффициента эмерджентности изображены для малого числа частиц и состояний.

Из приведенных на рис. 6 данных следует, что с ростом числа состояний и числа частиц коэффициенты эмерджентности квантовых и классических систем отличаются между собой, как и коэффициенты квантовых систем ферми-частиц и бозе-частиц. Следовательно, коэффициент эмерджентности позволяет отличить классическую систему от квантовой системы, а квантовую систему ферми-частиц от квантовой системы бозе-частиц.

Полученные результаты могут оказаться полезными в молекулярной, атомной и ядерной физике, в физике высоких энергий в исследованиях структуры элементарных частиц, а также в математике, экономике, социологии, биологии и других науках, связанных с исследованием сложных систем [12-23].

**Список литературы**

1. Луценко Е.В.. Автоматизированный системно-когнитивный анализ в управлении активными объектами (системная теория информации и ее применение в исследовании экономических, социально-психологических, технологических и организационно-технических систем): Монография (научное издание). – Краснодар: КубГАУ. 2002. – 605 с.

2. Feynman, Richard P. The Character of Physical Law: The 1964 Messenger Lectures. MIT Press, 1967.

3. Луценко Е.В. Количественные меры возрастания эмерджентности в процессе эволюции систем (в рамках системной теории информации) / Е.В. Луценко // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2006. – №05(021). С. 355 – 374. – Шифр Информрегистра: 0420600012\0089, IDA [article ID]: 0210605031. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2006/05/pdf/31.pdf, 1,25 у.п.л., импакт-фактор РИНЦ=0,577

4. Луценко Е.В. Универсальный информационный вариационный принцип развития систем / Е.В. Луценко // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2008. – №07(041). С. 117 – 193. – Шифр Информрегистра: 0420800012\0091, IDA [article ID]: 0410807010. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2008/07/pdf/10.pdf, 4,812 у.п.л., импакт-фактор РИНЦ=0,577

5. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Statistical Physics. Vol. 5 (3rd ed.). Butterworth-Heinemann. 1980.

6. Feynman, Richard P. Statistical Mechanics: A Set of Lectures. Reading, Mass: W. A. Benjamin, 1972.

7. Луценко Е.В. Реализация операции объединения систем в системном обобщении теории множеств (объединение булеанов) / Е.В. Луценко // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2011. – №01(065). С. 354 – 391. – Шифр Информрегистра: 0421100012\0001, IDA [article ID]: 0651101029. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2011/01/pdf/29.pdf, 2,375 у.п.л., импакт-фактор РИНЦ=0,577

8. Луценко Е.В. Обобщенный коэффициент эмерджентности Хартли как количественная мера синергетического эффекта объединения булеанов в системном обобщении теории множеств / Е.В. Луценко // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2011. – №02(066). С. 535 – 545. – Шифр Информрегистра: 0421100012\0031, IDA [article ID]: 0661102045. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2011/02/pdf/45.pdf, 0,688 у.п.л., импакт-фактор РИНЦ=0,577

9. Вяткин В.Б. Орбитальная система распределения электронов в атоме и структура периодической системы элементов / В.Б. Вяткин // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №05(089). С. 1453 – 1485. – IDA [article ID]: 0891305100. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2013/05/pdf/100.pdf, 2,062 у.п.л., импакт-фактор РИНЦ=0,577

10. Трунев А.П. Ядерные оболочки и периодический закон Д.И.Менделеева. Часть 2. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №07(81). С. 491 – 514. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/07/pdf/37.pdf

11. Wolfram Mathematica 9.0/ http://www.wolfram.com/mathematica/

12. Bar-Yam, Yaneer. A Mathematical Theory of Strong Emergence using Multiscale Variety, Complexity 9 (6): 15–24, 2004.

13. Blitz, David. Emergent Evolution: Qualitative Novelty and the Levels of Reality. Dordrecht: Kluwer Academic, 1992.

14. Bunge, Mario Augusto. Emergence and Convergence: Qualitiative Novelty and the Unity of Knowledge, Toronto: University of Toronto Press, 2003.

15. Philip Clayton. Mind and Emergence: From Quantum to Consciousness Oxford: OUP, 2005.

16. Philip Clayton & Paul Davies (eds.). The Re-Emergence of Emergence: The Emergentist Hypothesis from Science to Religion Oxford: Oxford University Press. 2006.

17. Delsemme, Armand. Our Cosmic Origins: From the Big Bang to the Emergence of Life and Intelligence, Cambridge University Press, 1998.

18. Fromm, Jochen. The Emergence of Complexity, Kassel University Press, 2004.

19. Fromm, Jochen. Types and Forms of Emergence, arXiv, arXiv:nlin.AO/0506028, 2005.

20. Fromm, Jochen. Ten Questions about Emergence, arXiv, arXiv:nlin.AO/0509049, 2005.

21. Felipe Cucker and Stephen Smale. The Mathematics of Emergence// The Japanese Journal of Mathematics, 2007.

22. Stephen Wolfram, Universality and complexity in cellular automata, Physica D 10 (1984) 1-35. http://www.stephenwolfram.com/publications/articles/ca/84-universality/

23. Stephen Wolfram, A New Kind of Science, Wolfram Media, 2002, http://www.wolframscience.com/nksonline

**References**

1. Lucenko E.V. Avtomatizirovannyj sistemno-kognitivnyj analiz v uprav-lenii aktivnymi ob#ektami (sistemnaja teorija informacii i ee primenenie v issle-dovanii jekonomicheskih, social'no-psihologicheskih, tehnologicheskih i organizaci-onno-tehnicheskih sistem): Monografija (nauchnoe izdanie). – Krasnodar: KubGAU. 2002. – 605 s.

2. Feynman, Richard P. The Character of Physical Law: The 1964 Messenger Lectures. MIT Press, 1967.

3. Lucenko E.V. Kolichestvennye mery vozrastanija jemerdzhentnosti v processe jevoljucii sistem (v ramkah sistemnoj teorii informacii) / E.V. Lucenko // Polite-maticheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo ag-rarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2006. – №05(021). S. 355 – 374. – Shifr Informregistra: 0420600012\0089, IDA [article ID]: 0210605031. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2006/05/pdf/31.pdf, 1,25 u.p.l., impakt-faktor RINC=0,577

4. Lucenko E.V. Universal'nyj informacionnyj variacionnyj princip raz-vitija sistem / E.V. Lucenko // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhur-nal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2008. – №07(041). S. 117 – 193. – Shifr Informregistra: 0420800012\0091, IDA [article ID]: 0410807010. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2008/07/pdf/10.pdf, 4,812 u.p.l., impakt-faktor RINC=0,577

5. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Statistical Physics. Vol. 5 (3rd ed.). Butterworth-Heinemann. 1980.

6. Feynman, Richard P. Statistical Mechanics: A Set of Lectures. Reading, Mass: W. A. Benjamin, 1972.

7. Lucenko E.V. Realizacija operacii ob#edinenija sistem v sistemnom obobshhe-nii teorii mnozhestv (ob#edinenie buleanov) / E.V. Lucenko // Politematicheskij se-tevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo univer-siteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2011. – №01(065). S. 354 – 391. – Shifr Informregistra: 0421100012\0001, IDA [article ID]: 0651101029. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2011/01/pdf/29.pdf, 2,375 u.p.l., im-pakt-faktor RINC=0,577

8. Lucenko E.V. Obobshhennyj kojefficient jemerdzhentnosti Hartli kak kolichestvennaja mera sinergeticheskogo jeffekta ob#edinenija buleanov v sistemnom obobshhe-nii teorii mnozhestv / E.V. Lucenko // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauch-nyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2011. – №02(066). S. 535 – 545. – Shifr Informregistra: 0421100012\0031, IDA [article ID]: 0661102045. – Rezhim dos-tupa: http://ej.kubagro.ru/2011/02/pdf/45.pdf, 0,688 u.p.l., impakt-faktor RINC=0,577

9. Vjatkin V.B. Orbital'naja sistema raspredelenija jelektronov v atome i struktura periodicheskoj sistemy jelementov / V.B. Vjatkin // Politematicheskij sete-voj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universi-teta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №05(089). S. 1453 – 1485. – IDA [article ID]: 0891305100. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2013/05/pdf/100.pdf, 2,062 u.p.l., impakt-faktor RINC=0,577

10. Trunev A.P. Jadernye obolochki i periodicheskij zakon D.I.Mendeleeva. Chast' 2. // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosu-darstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj re-surs]. – Krasnodar: KubGAU, 2012. – №07(81). S. 491 – 514. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2012/07/pdf/37.pdf

11. Wolfram Mathematica 9.0/ http://www.wolfram.com/mathematica/

12. Bar-Yam, Yaneer. A Mathematical Theory of Strong Emergence using Multiscale Variety, Complexity 9 (6): 15–24, 2004.

13. Blitz, David. Emergent Evolution: Qualitative Novelty and the Levels of Reality. Dordrecht: Kluwer Academic, 1992.

14. Bunge, Mario Augusto. Emergence and Convergence: Qualitiative Novelty and the Unity of Knowledge, Toronto: University of Toronto Press, 2003.

15. Philip Clayton. Mind and Emergence: From Quantum to Consciousness Oxford: OUP, 2005.

16. Philip Clayton & Paul Davies (eds.). The Re-Emergence of Emergence: The Emergentist Hypothesis from Science to Religion Oxford: Oxford University Press. 2006.

17. Delsemme, Armand. Our Cosmic Origins: From the Big Bang to the Emergence of Life and Intelligence, Cambridge University Press, 1998.

18. Fromm, Jochen. The Emergence of Complexity, Kassel University Press, 2004.

19. Fromm, Jochen. Types and Forms of Emergence, arXiv, arXiv:nlin.AO/0506028, 2005.
20. Fromm, Jochen. Ten Questions about Emergence, arXiv, arXiv:nlin.AO/0509049, 2005.
21. Felipe Cucker and Stephen Smale. The Mathematics of Emergence// The Japanese Journal of Mathematics, 2007.
22. Stephen Wolfram, Universality and complexity in cellular automata, Physica D 10 (1984) 1-35. http://www.stephenwolfram.com/publications/articles/ca/84-universality/
23. Stephen Wolfram, A New Kind of Science, Wolfram Media, 2002, http://www.wolframscience.com/nksonline