

УДК 518.8:53

UDC 518.8:53

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД  
ИССЛЕДОВАНИЯ КИНЕТИКИ ПРОЦЕССА  
РАСТЕКАНИЯ КАПЛИ****ANALYTICAL METHOD OF THE RESEARCH  
OF KINETICS FOR THE PROCESS OF  
DROPLET DISPERSION**

Лесев Вадим Николаевич  
к.ф.-м.н., доцент  
*Кабардино-Балкарский государственный  
университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик, Россия*

Lesev Vadim Nikolaevich  
Cand.Phys.-Math.Sci., associate professor  
*Kabardino-Balkarian State University named after  
H.M. Berbekov, Nalchik, Russia*

В работе исследована математическая модель процесса растекания капли, лежащей на горизонтальной подложке. На основе асимптотического метода и метода разделения переменных получено приближенное аналитическое решение задачи

In the article we have concerned the researched mathematical method for the process of droplet dispersion on a horizontal surface. On the basis of the asymptotical method and the method of the division of variables we have found the approximate analytical solution of the problem

Ключевые слова: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, КАПЛЯ, РАСТЕКАНИЕ, АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Keywords: MATHEMATICAL MODEL, DROPLET, DISPERSION, ANALYTICAL SOLUTION

### **Введение**

На сегодняшний день существует несколько подходов описания процессов растекания капель по горизонтальным поверхностям. Подобная неоднозначность объясняется тем, что на линии трехфазного контакта прямой гидродинамический подход не всегда дает удовлетворительные результаты, а в некоторых случаях приводит к сингулярности получаемых решений.

Один из способов регуляризации решений состоит в исследовании процесса растекания жидкой фазы по смоченной поверхности или пленке [1-3]. При этом авторы подобных исследований оправдывают такой способ описания тем, что при растекании хорошо смачивающей жидкости по твердой фазе на последней из-за адсорбции паров может возникать тонкая пленка. Другие [4-6] объясняют появление пленки наличием микрошероховатостей и микротрещин, по которым жидкость распространяется гораздо быстрее благодаря капиллярным эффектам.

### 1. Постановка задачи

В данной работе будем предполагать, что твердая фаза в системе газ–жидкость–подложка, остается сухой вплоть до линии контакта трех сред. При таком подходе в случае изотермического растекания роль главенствующей из движущих сил играет расклинивающее давление [7-9].

Выбор такого подхода подразумевает, что вблизи линии трехфазного контакта высота капли стремительно уменьшается и становится доступной действию поверхностных сил вплоть до уровня подложки, т.е. ограничимся изучением капель, геометрические характеристики профиля которых в начальный момент времени удовлетворяет условию  $\frac{h}{r} \ll 1$  (рис. 1). В этом случае давление в капле будет определяться равенством [10, 11]:

$$P = P_0 - \frac{s}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \Pi(h), \quad (1)$$

где  $P_0$  – давление газа,  $\Pi(h)$  – изотерма расклинивающего давления.

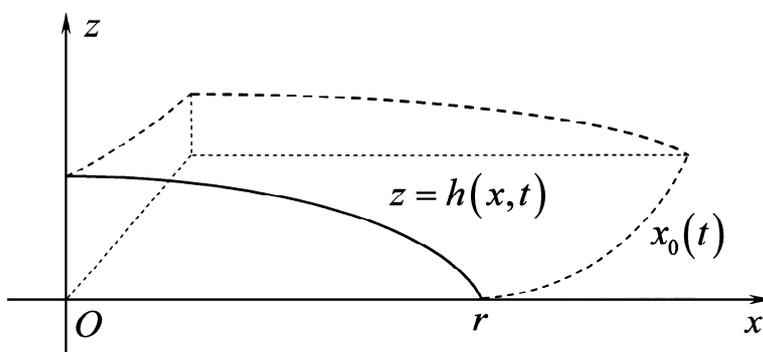


Рис. 1. К выводу уравнения растекания капли

Отметим, что довольно часто  $\Pi(h)$  имеет степенную зависимость [8, 12] от  $h$ :

$$\Pi(h) = \frac{A}{h^n}, \quad n \geq 2, \quad (2)$$

где  $A$  – постоянная Гамакера.

Причем, выражение  $\Pi(h) = \frac{A}{h^2}$  характеризует электростатическую составляющую давления и учет шероховатостей подложки; соотношение  $\Pi(h) = \frac{A}{h^3}$  соответствует дисперсионному взаимодействию жидких неполярных фаз на стекле или кварце; а изотерма  $\Pi(h) = \frac{A}{h^4}$  свойственна достаточно толстым пленкам как результат ослабления действия электромагнитных сил.

Принимая во внимание (1) и (2), по аналогии с [9, 10], можем записать

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{s}{3mx} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ xh^3 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) - \frac{nA}{sh^{n+1}} \frac{\partial h}{\partial x} \right] \right\}, \quad (3)$$

где  $m$  – вязкость,  $n \in N$ .

Соотношение (3) представляет собой общее уравнение растекания капли по сухой подложке. Отметим, что при  $A = 0$ , т.е. в случае отсутствия расклинивающего давления, уравнение (3) переходит в известное уравнение растекания [9].

Вводя безразмерные переменные:  $\bar{t} = t/t_*$ ,  $\bar{h} = h/h_*$ ,  $\bar{x} = x/x_*$ , где нижним индексом “\*” обозначены характерные значения времени, высоты и абсциссы, запишем (3) в виде:

$$a \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} = -\frac{1}{\bar{x}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ \bar{x} \bar{h}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{1}{\bar{x}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \bar{x} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \right) \right) - \frac{b}{\bar{h}^{n+1}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \right] \right\}. \quad (4)$$

где  $a = \frac{3mx_*^3 V_*}{s h_*^3} \ll 1$ ,  $b = \frac{nx_*^2 A}{s h_*^{n+1}} < a$ .

Требования  $a \ll 1$  и  $b < a$ , гарантируют превосходство капиллярных сил над вязкими, и в свою очередь, действие расклинивающего давления над капиллярными силами для абсцисс, при которых высота капли остается пока значительной.

Опуская для удобства записи обозначения безразмерных переменных, перепишем (4) в виде:

$$a \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x h^3 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) - \frac{b}{h^{n+1}} \frac{\partial h}{\partial x} \right] \right\}. \quad (5)$$

Зададим граничные условия:

$$\int_0^r x h \, dx = s, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (7)$$

$$h|_{r=x_0(t)} = 0, \quad (8)$$

где  $s = const > 0$ .

Условия (6–8) представляют собой условия сохранения объема, симметрии профиля капли относительно вертикальной оси и обращения в ноль высоты жидкой пленки при ее растекании на линии трехфазного контакта. Здесь необходимо отметить, что при формулировке условия (6) для определения объема было принято соотношение  $V = 2p \cdot x_*^2 \cdot h_*$ .

## 2. Построение приближенного аналитического решения задачи

Очевидно, что нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка (5) не допускает построения точного аналитического решения, поэтому, на начальном этапе, применим для его исследования асимптотический метод.

Положим  $a = b = 0$ . В результате уравнение (5) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ x h^3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) \right\} = 0.$$

Интегрируя дважды последнее равенство и принимая во внимание (8), получим:

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \Psi(t),$$

где  $\Psi(t)$  – произвольная функция интегрирования.

Последнее равенство является неоднородным уравнением второго порядка параболического типа. Умножая обе его части на  $x$ , а затем, интегрируя, с учетом (7) будем иметь:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{x}{2} \Psi(t).$$

Интегрируя последнее равенство по  $x$  в границах от  $x$  до  $r = x_0(t)$ , находим:

$$h(x, t) = \frac{\Psi(t)}{4} [x_0^2(t) - x^2].$$

Пользуясь произвольностью выбора функции  $\Psi(t)$ , перепишем последнее равенство в виде:

$$h(x, t) = 4f^4(t) [x_0^2(t) - x^2], \quad (9)$$

где для удобства записи итоговых результатов положили  $\Psi(t) = 16f^4(t)$ .

Далее, удовлетворяя (9) условию (6), будем иметь

$$4f^4(t) \int_0^r x [x_0^2(t) - x^2] dx = f^4(t) r^4 = f^4(t) x_0^4(t) = s,$$

откуда находим:

$$x_0(t) = \frac{\sqrt[4]{s}}{f(t)}. \quad (10)$$

Подставляя полученное значение для радиуса растекания капли (10) в (9), получим:

$$h(x, t) = 4f^2(t) [1 - x^2 f^2(t)]. \quad (11)$$

Заметим, что функцию  $x = x \cdot f(t)$  можно рассматривать как новую переменную, характеризующую геометрию профиля вблизи линии

трехфазного контакта, а параметр  $s$  выбран равным единице, что не нарушает общности рассуждений.

Полученное решение (11) определяет профиль капли в области апекса и соответствует требованию пологости капли как решение параболического уравнения. При этом равенство  $x = 1$  соответствует линии трехфазного контакта. Решение (11) для  $x < 1$  по отношению к исходной задаче принято называть внешним [13]. В целях его продолжения на оставшиеся значения аргумента, т.е. для нахождения внутреннего решения и согласования полученных решений необходимо определить функцию  $f(t)$ .

Для определения функции  $f(t)$  подставим выражение (11) в уравнение (5), предварительно определив производные от функции  $h(x, t)$ .

Дифференцируя (11), будем иметь:

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = -8f^4(t)x, \quad (12)$$

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = 4 \frac{\partial}{\partial t} [f^2(t) - x^2 f^4(t)] = 8f'(t)[f(t) - 2x^2 f^3(t)]. \quad (13)$$

Из (5), принимая во внимание соотношения (12), (13), а также выражение (11), получим

$$\begin{aligned} & 8af'(t)[f(t) - 2x^2 f^3(t)] = \\ & = -\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x h^3 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) + \frac{8bf^4(t)x}{h^{n+1}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим отдельно выражение, стоящее в квадратных скобках в правой части равенства (14).

Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) + \frac{8bf^4(t)x}{h^{n+1}} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} [\Psi(t)] + \frac{8bf^4(t)x}{h^{n+1}} = \frac{8bf^4(t)x}{h^{n+1}}.$$

С учетом полученного равенства, (14) примет вид:

$$8af'(t)[f(t) - 2x^2f^3(t)] = -\frac{8bf^4(t)}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{x^2h^3}{h^{n+1}} \right].$$

Отсюда, в результате элементарных преобразований, будем иметь

$$gf'(t) \frac{f(t) - 2x^2f^3(t)}{f^4(t)} = -\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{x^2}{h^{n-2}} \right], \quad (15)$$

где  $g = \frac{a}{b}$ .

Раскрывая скобки в правой части последнего равенства, перепишем (15) в виде:

$$gf'(t) \frac{f(t) - 2x^2f^3(t)}{f^4(t)} = \frac{(n-2)x^2h^{n-3}h'_x - 2xh^{n-2}}{xh^{2(n-2)}}$$

или

$$\frac{gf'(t)}{f(t)} \left[ \frac{1}{f^2(t)} - 2x^2 \right] = \frac{(n-2)xh^{n-3}h'_x - 2h^{n-2}}{h^{2(n-2)}}. \quad (16)$$

Дальнейшие исследования проведем для случая, когда изотерма расклинивающего давления определяется равенством  $\Pi(h) = \frac{A}{h^2}$ , т.е.  $n = 2$ .

Соотношение (16) при  $n = 2$  принимает вид:

$$gf'(t) \left[ 2x^2 - \frac{1}{f^2(t)} \right] = 2f(t). \quad (17)$$

Разделяя переменные в уравнении (17), получим

$$x^2 = \frac{f(t)}{gf'(t)} + \frac{1}{2f^2(t)}. \quad (18)$$

Из равенства (18) очевидно следует, что функции разных аргументов могут совпадать лишь в случае, когда каждая из частей равенства является

постоянной величиной. Таким образом, на основании (18), получаем однопараметрическое уравнение:

$$\frac{f(t)}{g f'(t)} + \frac{1}{2f^2(t)} = I. \quad (19)$$

Нелинейное дифференциальное уравнение (19) будет иметь явные решения лишь при  $I = 0$ . В этом случае (19), в результате элементарных преобразований примет вид:

$$\frac{2}{g} dt = -\frac{df}{f^3(t)}. \quad (20)$$

Интегрируя (20), будем иметь:

$$\frac{1}{f^2(t)} = \frac{4}{g} t + c$$

или

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{4t/g + c}},$$

где  $c$  – постоянная интегрирования.

Для определения  $c$  положим в последнем равенстве  $t = 0$ . Принимая высоту безразмерной капли в апексе в начальный момент времени равной единице, с учетом (11) получим  $f(0) = 0.5$ .

Таким образом, окончательно устанавливаем, что

$$c = 4.$$

Следовательно, для  $f(t)$  будем иметь:

$$f(t) = \frac{1}{2 \left( \frac{t}{g} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (21)$$

Из (10) и (21) находим:

$$x_0(t) = 2 \left( \frac{t}{g} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (22)$$

где, как уже было отмечено выше,  $s = 1$ .

Для размерных переменных равенство (22) примет вид:

$$x_0(t) = 2x_* \left( \frac{t}{g \cdot t_*} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (23)$$

Положив в (23)  $t = 0$ , получим:

$$x_0(0) = 2x_*. \quad (24)$$

Соотношение (24) устанавливает связь между радиусом растекания капли в начальный момент времени и нормализованным горизонтальным размером.

Скорости растекания капли для размерных переменных определим из (23). В результате будем иметь:

$$\dot{x}_0(t) = \frac{x_*}{g \cdot t_*} \left( \frac{t}{g \cdot t_*} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Полагая здесь  $t = 0$ , приходим к равенству:

$$\dot{x}_0(0) = \frac{x_*}{g \cdot t_*}.$$

Считая, что в начальный момент времени значение  $x_0(0)$  согласно (24) имеет приращение  $\approx 2x_*$ , а приращение по времени  $dt \approx t_*$ , из последнего соотношения заключаем:

$$g \approx \frac{1}{2}, \quad t_* \approx 0.2. \quad (25)$$

Следовательно, выражение (21) для  $f(t)$  может быть записано в виде:

$$f(t) = \frac{1}{2} (2t + 1)^{-\frac{1}{2}}. \quad (26)$$

Также могут быть преобразованы выражения для радиуса растекания капли в безразмерных (22):

$$x_0(t) = 2 (2t + 1)^{\frac{1}{2}}$$

и размерных переменных (23):

$$x_0(t) = 2x_* \left( \frac{2t}{t_*} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (27)$$

Абсолютно аналогично, принимая во внимание (26) и (11), получаем выражения для высоты капли в аперке для безразмерных:

$$h_0(t) = h(0, t) = (2t + 1)^{-1}$$

и размерных переменных:

$$h_0(t) = h_* \left( \frac{2t}{t_*} + 1 \right)^{-1}. \quad (28)$$

Из (27), (28) следует, что выбор нормализующих параметров  $x_*$ ,  $h_*$  равносильно заданию геометрических параметров размерной капли  $x_0$  и  $h_0$  в начальный момент времени  $t = 0$ , определение которых для натуральных экспериментов также может быть определено на основе методов математического моделирования [14, 15]. И, наоборот, при априори известных  $x_0(0)$  и  $h(0,0)$  переход к безразмерным параметрам должен осуществляться по соответствующим характерным значениям длины  $x_*$ , высоты  $h_*$  и времени  $t_*$ .

При этом функция  $h(x, t)$ , принимая во внимание (11) и (21), окончательно, для случая безразмерных переменных, примет вид:

$$h(x, t) = \frac{g}{t + g} \left[ 1 - \frac{g x^2}{4(t + g)} \right].$$

### Заключение

Полученные результаты учитывают большинство параметров системы и позволяют проводить более глубокий анализ кинетики процесса. Кроме того, установленные зависимости для функций, описывающих профиль капли и радиус ее растекания, хорошо согласуются с результатами аналогичных исследований [10, 16-19].

### Список литературы

1. Гребенник И.П. Кинетические особенности растекания расплавов по поверхности тонких пленок // Украинский физический журнал. 1980. Т. 25. № 3. С. 497-503.
2. Brochard F., De Gennes P.G. Spreading laws for liquid polymer droplets: interpretation of the "foot" // J. Physique Lett. 1984. Vol. 45. № 12. P. 597-602.
3. Joanny J.-F. Wetting of a liquid substrate // Physicochem. Hydrodyn. 1987. Vol. 9. № 1. P. 183-196.
4. Старов В.М., Чураев Н.В. Толщина смачивающих пленок на шероховатых подложках // Коллоидный журнал. 1977. Т. 39. № 6. С. 1112-1117.
5. Cazabat A.-M., Cohen Stuart M.A. Dynamics of wetting on smooth and rough surfaces // Progress in Coll. and Polymer Sci. 1987. Vol. 74. P. 69-75.
6. Cox R.G. The spreading of a liquids on a rough solid surface // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 131. P. 1-26.
7. Воинов О.В. Динамическая теория смачивания твердых тел вязкими жидкостями под действием сил Ван-дер-Ваальса // ПМТФ. 1994. № 6. С. 69-85.
8. Дерягин Б.В., Чураев Н.В. К вопросу об определении понятия расклинивающего давления // Коллоидный журнал. 1976. Т. 38. № 3. С. 438-448.
9. Старов В.М. О растекании капель нелетучих жидкостей по плоской твердой поверхности // Коллоидный журнал. 1983. Т. 45. № 6. С. 1154-1161.
10. Калинин В.В., Старов В.М. Растекание капель жидкости с учетом действия поверхностных сил // Коллоидный журнал. 1988. Т. 50. № 1. С. 25-32.
11. Старов В.М., Чураев Н.В., Хворостянов А.Г. О форме движущегося мениска в плоских капиллярах // Коллоидный журнал. 1977. Т. 39. № 1. С. 201-205.
12. Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М. Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 398 с.
13. Найфе А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
14. Лесев В.Н., Созаев В.А. О новом методе обработки экспериментальных данных для малых капель расплавов // Известия КБГУ. 2011. Т.1. № 1. С. 3-8.
15. Директор Л.Б., Зайченко В.М., Майков И.Л. Усовершенствованный метод лежащей капли для определения поверхностного натяжения жидкостей // ТВТ. 2010. Т. 48. № 2. С. 193-197.
16. Бородин С.А. Исследование процесса растекания капли жидкости, наносимой на поверхность подложки // Компьютерная оптика. 2005. № 28. С. 66-68.
17. Вавкушевский А.А., Арсланов В.В., Огарев В.Л. Растекание капель полимеров по гладким твердым поверхностям // Коллоидный журнал. 1984. Т. 46. № 6. С. 1076-1081.
18. Лесев В.Н., Бжеумихова О.И. Математическая модель растекания капли под действием гравитационных сил // XLIV Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии: Тезисы докладов; РУДН. М., 2008. С. 33-34.
19. Пономарева М.А., Якутенок В.А. Моделирование растекания капли вязкой жидкости в плоской постановке при больших числах бонда // Вестник томского государственного университета. Математика и механика. 2007. № 1. С. 79-83.

### References

1. Grebennik I.P. Kineticheskie osobennosti rastekaniya rasplavov po poverhnosti tonkih plenok // Ukrainskij fizi-cheskij zhurnal. 1980. T. 25. № 3. S. 497-503.
2. Brochard F., De Gennes P.G. Spreading laws for liquid polymer droplets: interpretation of the "foot" // J. Physique Lett. 1984. Vol. 45. № 12. P. 597-602.

3. Joanny J.-F. Wetting of a liquid substrate // *Physicochem. Hydrodyn.* 1987. Vol. 9. № 1. P. 183-196.
4. Starov V.M., Churaev N.V. Tolshhina smachivajushhijh plenok na shero-hovatyh podlozh-kah // *Kolloidnyj zhurnal.* 1977. T. 39. № 6. S. 1112-1117.
5. Cazabat A.-M., Cohen Stuart M.A. Dynamics of wetting on smooth and rough surfaces // *Progress in Coll. and Polymer Sci.* 1987. Vol. 74. P. 69-75.
6. Cox R.G. The spreading of a liquids on a rough solid surface // *J. Fluid Mech.* 1983. Vol. 131. P. 1-26.
7. Voinov O.V. Dinamicheskaja teorija smachivaniya tverdyh tel vjazkimi zhidkostjami pod dejstviem sil Van-der-Vaal'sa // *PMTF.* 1994. № 6. S. 69-85.
8. Derjagin B.V., Churaev N.V. K voprosu ob opredelenii ponjatija raskli-nivajushhego davlenija // *Kolloidnyj zhurnal.* 1976. T. 38. № 3. S. 438-448.
9. Starov V.M. O rastekanii kapel' neletuchih zhidkostej po ploskoj tverdoj poverhnosti // *Kolloidnyj zhurnal.* 1983. T. 45. № 6. S. 1154-1161.
10. Kalinin V.V., Starov V.M. Rastekanie kapel' zhidkosti s uchetom dejstvija poverh-nostnyh sil // *Kolloidnyj zhurnal.* 1988. T. 50. № 1. S. 25-32.
11. Starov V.M., Churaev N.V., Hvorostjanov A.G. O forme dvizhushhegosja meniska v ploskih kapilljarah // *Kolloidnyj zhurnal.* 1977. T. 39. № 1. S. 201-205.
12. Derjagin B.V., Churaev N.V., Muller V.M. *Poverhnostnye sily.* M.: Nauka, 1985. 398 s.
13. Najfe A. *Vvedenie v metody vozmushhenij.* M.: Mir, 1984. 535 s.
14. Lesev V.N., Sozaev V.A. O novom metode obrabotki jeksperimen-tal'nyh dannyh dlja malyh kapel' rasplavov // *Izvestija KBGU.* 2011. T.1. № 1. S. 3-8.
15. Direktor L.B., Zajchenko V.M., Majkov I.L. Uovershenstvovannyj metod lezhashhej kapli dlja opredelenija poverhnostnogo natjazhenija zhidkostej // *TVT.* 2010. T. 48. № 2. S. 193-197.
16. Borodin S.A. Issledovanie processa rastekaniya kapli zhidkosti, nanosimoj na poverhnost' podlozhki // *Komp'juternaja optika.* 2005. № 28. S. 66-68.
17. Vavkushevskij A.A., Arslanov V.V., Ogarev V.L. Rastekanie kapel' polimerov po gladkim tverdym poverhnostjam // *Kolloidnyj zhurnal.* 1984. T. 46. № 6. S. 1076-1081.
18. Lesev V.N., Bzheumihova O.I. Matematicheskaja model' rastekaniya kapli pod dejstviem gravitacionnyh sil // *XLIV Vseros-sijskaja konferencija po problemam matematiki, informatiki, fiziki i himii: Tezisy dokladov;* RUDN. M., 2008. S. 33-34.
19. Ponomareva M.A., Jakutenok V.A. Modelirovanie rastekaniya kapli vjazkoj zhidkosti v ploskoj postanovke pri bol'shijh chislah bonda // *Vestnik tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matema-tika i mehanika.* 2007. № 1. S. 79-83.