

УДК 533.517.4

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И РАСЧЕТ
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК
ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ**

Лаптев Анатолий Григорьевич
д.т.н., профессор
ФГБОУ ВПО «Казанский государственный
энергетический университет», Казань, Россия

Фарахов Тимур Мансурович
к.т.н.
инженер, ООО Инженерно Внедренческий Центр
«Инжсехим», Казань, Россия

Рассмотрены процессы переноса импульса в ламинарном и турбулентном пограничном слое. Получены оригинальные модели для расчета касательного напряжения, турбулентной вязкости, коэффициентов трения, толщины пограничного слоя и коэффициентов переноса импульса (импульсоотдачи) в пограничных слоях при различных условиях движения сред. Показаны примеры расчета данных характеристик и согласование с известными экспериментальными данными. Полученные уравнения и методы определения характеристик пограничного слоя могут использоваться при расчетах промышленных тепло- и массообменных аппаратов различных конструкций и другого оборудования

Ключевые слова: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ, МАССОПЕРЕДАЧА,
ТЕПЛОПЕРЕДАЧА

UDC 533.517.4

**MATHEMATICAL MODELS AND
CALCULATION OF THE HYDRODYNAMIC
CHARACTERISTICS OF A BOUNDARY LAYER**

Laptev Anatoliy Grigorievich
Dr.Sci.Tech., professor
Kazan State Power Engineering University (KSPEU),
Kazan, Russia

Farakhov Timur Mansurovich
Cand.Tech.Sci., engineer
LLC Engineering-Promotional Center "Inzhexhim",
Kazan, Russia

The processes of momentum transfer in laminar and turbulent boundary layers are considered. We have obtained the proprietary models for calculation of shear stresses, turbulent viscosity, friction factors, boundary layer thickness and momentum transfer coefficients in boundary layers under different conditions of motion of media. The examples of the calculation of the above characteristics and their agreement with known experimental data are shown. The obtained equations and the methods of calculation of the boundary layer characteristics can be used for calculations of industrial heat and mass transfer apparatuses of various designs as well as of some other types of equipment

Keywords: MATHEMATICAL MODELING, MASS
TRANSFER, HEAT TRANSFER

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

К явлениям переноса в пограничном слое не ослабевает интерес многих исследователей, как с точки зрения развития различных теорий, так и для прикладных расчетов гидравлических и тепломассообменных характеристик [1-3].

Движение вязких сред практически всегда связано с явлениями переноса в пограничном слое, где локализуются сопротивления трения, тепло- и массоотдачи. Одним из первых концепцию пограничного слоя в 1904 году предложил Л. Прандтль, исходя из гипотезы о том, что сопротивление, вызванное трением и вязкостью при движении среды существенно зависит от пристеночной зоны (слоя).

Теоретические методы моделирования и исследования явлений переноса в пограничном слое условно можно классифицировать на точные, асимптотические, численные и приближенные. В связи с большим разнообразием конструкций аппаратов химической технологии и одновременно происходящих процессов переноса импульса, массы и энергии получить точные аналитические решения практически невозможно, особенно для аппаратов большого масштаба. Поэтому для математического моделирования явлений переноса и определения эффективности проводимых процессов в промышленных аппаратах чаще используются приближенные и численные методы. К приближенным методам относятся, например, однопараметрические интегральные методы в теории пограничного слоя, пленочная и пенетрационная модели, модель диффузионного пограничного слоя, методы линеаризации уравнений и др. Преимущество приближенных методов заключается в возможности получать необходимые формулы для выполнения конкретных инженерных расчетов [3–7].

Приближенное математическое описание процессов переноса в пограничном слое в первую очередь связано с моделями Прандтля и Кармана, гидродинамической аналогией Рейнольдса и Чилтона-Кальборна и далее моделью диффузионного пограничного слоя Ландау-Левича. Кроме этого, важное значение имеют консервативные свойства пограничного слоя – т.е. весьма слабые зависимости некоторых характеристик осредненного течения по отношению к внешним возмущениям, на которые одними из первых обратили внимание С.С. Кутателадзе и А.И. Леонтьев.

Теоретическая основа рассматриваемых далее подходов заключается в использовании известных свойств консервативности законов трения к возмущающим воздействиям (например, продольному градиенту давления), т.е. структура математического описания элементарных актов

переноса инвариантна к различным возмущениям и масштабу аппарата. Влияние возмущений не изменяет форму математического описания пограничного слоя, а учитывается параметрически. Определение корректирующих параметров выполняется путем удовлетворения баланса импульса [3, 5–7].

В данной статье рассматриваются различные модели пограничного слоя для вычисления напряжения трения и других характеристик на поверхности различных обтекаемых тел при ламинарном и турбулентном режиме. Касательное напряжение трения очень важно при определении коэффициентов гидравлического сопротивления обтекаемых тел, а также при решении тепломассообменных задач с использованием различных вариантов гидродинамической аналогии.

Рассматриваются пограничные слои при движении несжимаемой вязкой жидкости с постоянными физическими свойствами применительно к задачам химической технологии. В статье широко используется понятие коэффициента переноса импульса (импульсоотдачи), которое позволяет получить в аналитическом виде расчетные формулы для коэффициента трения и толщины пограничного слоя. Даны результаты расчета этих характеристик и сравнение с экспериментальными данными. Особый теоретический и практический интерес представляет расчет аппаратов с насадочными (зернистыми) слоями, гидроциклонов, пучков труб в теплообменниках и аппаратов с подводом внешней энергии в контактирующие фазы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ ТРЕНИЯ

Для расчета коэффициентов переноса в тепло- и массообменных аппаратах различных конструкций необходимо определить среднее значение касательного напряжения на стенке $\tau_{ст}$ (или динамической скорости $u_* = \sqrt{\tau_{ст}/\rho}$), где ρ – плотность среды, кг/м³.

Рассмотрим общий метод определения касательного напряжения трения (локального потока импульса) на стенке – поверхности обтекаемого тела. Пусть ось Oy направлена по нормали к стенке. В этом случае касательное напряжение на ось Oy в любой точке пограничного слоя будет определяться по известному выражению с учетом молекулярного и турбулентного переноса

$$\tau = -\mu \frac{du}{dy} - \mu_T(y) \frac{du}{dy} = -\rho(\nu + \nu_T) \frac{du}{dy}, \quad (1)$$

где

μ, μ_T – динамическая молекулярная и турбулентная вязкость, Па·с;

ν, ν_T – коэффициенты кинематической молекулярной и турбулентной вязкости, м²/с;

$\frac{du}{dy}$ – градиент скорости.

Касательное напряжение на стенке, то есть при $y = 0$, может быть выражено, используя уравнение импульсоотдачи (потока импульса) в виде:

$$\tau_{ст} = \rho\gamma(u_\infty - u_{ст}) = \rho\gamma u_\infty, \quad (2)$$

где

γ – коэффициент переноса импульса (импульсоотдачи), м/с;

$u_\infty, u_{ст}$ – скорость в ядре потока и на стенке, м/с.

В уравнении (2) учитывая условие прилипания, имеем $u_{ст} = 0$.

В литературе [8] γ имеет размерность кг/(м²·с). Однако, как показано ниже удобнее использовать размерность γ – м/с.

Еще в середине XIX столетия изучением процесса трения в трубах занимались сначала Дарси, а потом Фаннинг, которые и ввели понятие о коэффициенте трения:

$$C_f = \frac{2\tau_{ст}}{\rho u_\infty^2} = \frac{2\gamma}{u_\infty}, \quad (3)$$

при $u_\infty = u_{cp}$, где u_{cp} – средняя скорость потока, м/с.

Комплекс (3) соответствует критерию Стантона St_T для потока теплоты и критерию Стантона St_d для потока компонента при массообмене.

Полный поток импульса (сила P_s) в единицу времени, который переходит от среды к стенке, записывается в виде:

$$P_s = J_p = \rho \gamma F u_\infty, \quad (4)$$

где

F – площадь поверхности канала (тела), m^2 .

Аналогично записываются потоки массы компонента и теплоты:

$$M = \beta F \Delta C, \quad (5)$$

$$Q = \alpha F \Delta T, \quad (6)$$

где

α, β – коэффициенты массоотдачи и теплоотдачи;

$\Delta C, \Delta T$ – движущие силы соответствующих процессов.

Размерности α – $Вт/(м^2 \cdot К)$, а β зависит от способа выражения концентрации C компонента. Если C – $кг/м^3$, то β – $м/с$. Чтобы получить размерность $м/с$, то α надо разделить на ρc_p , где c_p – удельная теплоемкость, $Дж/(кг \cdot К)$.

При полной гидродинамической аналогии (аналогия Рейнольдса) коэффициенты переноса, приведенные к одинаковой размерности, равны

$$\alpha = \beta = \alpha / \rho c_p. \quad (7)$$

При $Sc \neq Pr \neq 1$ используются различные модификации гидродинамической аналогии [3, 7–9], где Sc, Pr – числа Шмидта и Прандтля.

При использовании любых модификаций гидродинамической аналогии необходимо вычисление или экспериментальное определение коэффициента трения C_f (3), который связан с касательным напряжением $\tau_{ст}$ (или динамической скоростью трения u_*).

Например, для трубы динамическую скорость можно определить из уравнения баланса сил

$$\Delta p S = \tau_{ст} F, \tag{8}$$

$$u_* = \sqrt{\frac{\Delta p S}{\rho F}} = u_{ср} \sqrt{\lambda/8}, \tag{9}$$

где

Δp – перепад давления канала, Па;

S – площадь поперечного сечения, м²;

F – поверхность канала, м²;

λ – коэффициент гидравлического сопротивления;

Δp записано в форме выражения Дарси-Вейсбаха.

Для пластины из выражения (3) имеем:

$$u_* = \overline{u_\infty} \sqrt{C_f/2}. \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует связь $C_f = \lambda/4$.

Запишем значение динамической скорости, используя выражение (2)

$$u_* = \sqrt{\gamma u_\infty}. \tag{11}$$

Рассмотрим подход определения коэффициента переноса импульса [3,7].

Введем относительный поток импульса $\tau^*(y) = \tau(y)/\tau_{ст}$. Тогда из выражения (1) запишем

$$\frac{\int_{u_\infty}^{u_{ст}} du}{\tau_{ст}} = \int_0^\delta \frac{\tau^*(y) dy}{v + v_\tau(y)}, \tag{12}$$

где

δ – толщина гидродинамического пограничного слоя, м.

Сравнивая (12) и (2) приходим к следующему выражению для определения коэффициента импульсоотдачи

$$\gamma = \left[\int_0^\delta \frac{\tau^*(y) dy}{v + v_\tau(y)} \right]^{-1}. \tag{13}$$

Выражение (13) является достаточно общим и позволяет рассчитать коэффициент переноса импульса на основе известного коэффициента молекулярной вязкости, а также известного характера изменения коэффициента турбулентной вязкости $\nu_t(y)$ и относительного потока импульса $\tau^*(y)$ в пограничном слое. Применение выражения (13) рассмотрено ниже.

В тех случаях, когда значения C_f или λ неизвестны (например, в аппаратах с вводом внешней энергии в контактирующие фазы), находят применение подход вычисления динамической скорости, с использованием средней диссипируемой энергии в единице объема среды [3, 5–7, 10–12].

В общем случае для несжимаемой жидкости количество диссипирующейся энергии, т.е. количество механической энергии, превращающейся в тепловую, отнесенное к единице времени и единице объема, определяется по выражению:

$$\varepsilon = \mu \left\{ 2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 \right\}, \quad (14)$$

где

μ – динамическая вязкость, Па·с;

x, y, z – пространственные координаты, м;

v_x, v_y, v_z – составляющие вектора скорости среды по соответствующим координатам, м/с.

Применение данного выражения для прикладных расчетов сопряжено со значительными трудностями, поэтому скорость диссипации энергии ε в жидкости, обусловленной вязкостью, при градиенте скорости du/dy записывают в виде [13]

$$\varepsilon = \frac{de}{dy} = \tau \frac{du}{dy}, \quad (15)$$

где

e – плотность потока энергии, $e = \tau u$;

τ – касательное напряжение, Па;

u – скорость среды, м/с;

y – поперечная координата, м.

Ниже рассмотрены различные примеры применения выражения (15) для расчета касательного напряжения (и динамической скорости) при ламинарном и турбулентном режимах.

ЛАМИНАРНЫЙ РЕЖИМ

Касательное напряжение (поток импульса) на стенке по уравнению Ньютона имеет следующий вид:

$$\tau_{ст} = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0}. \quad (16)$$

Из (15), (16) следует уравнение, характеризующее диссипацию энергии для ε_0 для ламинарного подслоя [11]:

$$\varepsilon_0 = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2. \quad (17)$$

Исключив из уравнений (16) и (17) величину производной $\frac{du}{dy}$ и подставив найденное при этом значение

$$t_{ст} = (\mu \varepsilon_0)^{1/2} \quad (18)$$

записывают [11]:

$$u_* = \sqrt{\tau_{ст}/\rho} = \left(\frac{\varepsilon_0 \nu}{\rho} \right)^{1/4}. \quad (19)$$

Первоначально рассмотрим ламинарное течение на пластине и в трубе.

Диссипация энергии на пластине:

$$\varepsilon = \frac{\tau_{ст} F u_\infty}{V_{сл}} = \frac{\tau_{ст} u_\infty}{\delta}, \quad (20)$$

и в трубе:

$$\varepsilon = \frac{\tau_{ст} F u_\infty}{V_{сл}} = \frac{4 \tau_{ст} u_\infty}{d}, \quad (21)$$

где

$V_{\text{сл}}$ – объем пристенного слоя, м^3 ;

d – диаметр трубы, м .

Отсюда на участке стабилизированного течения в трубе $\delta = 0,25d$.

Из (19) – (20) для пластины получим

$$u_* = \left(\frac{\tau u_\infty \nu}{\rho \delta} \right)^{0,25} = \left(\frac{u_\infty \nu}{\delta} \right)^{0,5}. \quad (22)$$

Локальная толщина пограничного слоя на пластине [14]:

$$\delta \approx 5 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}, \quad (23)$$

где

x – продольная координата пограничного слоя, м .

Из (22) – (23) значение динамической скорости по координате x :

$$u_*(x) = 0,447 u_\infty^{0,75} (\nu/x)^{0,25}. \quad (24)$$

Или используя выражение (10) с локальным коэффициентом трения [14]:

$$u_*(x) = u_\infty \sqrt{C_{fx}/2} = 0,407 u_\infty^{0,75} (\nu/x)^{0,25}, \quad (25)$$

где

$$C_{fx} = \frac{0,332}{\sqrt{\text{Re}_x}},$$

$\text{Re}_x = u_\infty x / \nu$ – число Рейнольдса.

Из выражений (23) – (25) следует, что полное совпадение уравнений (24) и (25) обеспечивается при толщине пограничного слоя (23) с численным коэффициентом 6,04.

Если в выражении (20) использовать среднее значение толщины пограничного слоя по длине пластины L :

$$\delta \approx \frac{5}{L} \int_0^L \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} dx = 3,33 \sqrt{\frac{\nu L}{u_\infty}}, \quad (26)$$

то из формулы (20) получим

$$u_* = 0,548 u_\infty^{0,75} (\nu/L)^{0,25}, \quad (27)$$

а из выражения (10) со средним коэффициентом трения пластины [14] $C_f = 1,328 Re_L^{-0,5}$ следует

$$u_* = 0,576 u_\infty^{0,75} (v/L)^{0,25}. \quad (28)$$

Расхождение численных коэффициентов в (27) и (28) около 5%.

Для трубы из (21) запишем:

$$u_* = \left(\frac{4u_\infty v}{d} \right)^{0,5}. \quad (29)$$

Или по выражению (9):

$$u_* = u_{cp} \sqrt{\lambda/8} = \left(\frac{8u_{cp} v}{d} \right)^{0,5}. \quad (30)$$

В ламинарном потоке $\lambda = 64/Re$; $Re = u_{cp} d/v$.

Учитывая, что для трубы $u_\infty = 2u_{cp}$, получаем полную идентичность выражений (29) и (30).

Приведенные выражения и сопоставления подтверждают справедливость уравнения (19) для ламинарного течения с погрешностью не более $\pm 5\%$.

ТУРБУЛЕНТНЫЙ РЕЖИМ

Получим значение динамической скорости на основе уравнения (15) и известного характера переноса импульса в турбулентном пограничном слое.

В уравнении (15) значение производной найдем из выражения:

$$\tau_{ct} = -\rho(v + v_T) \frac{du}{dy} \Big|_{y=0}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{\tau_{ct}}{\rho(v + v_T)}, \quad (31)$$

где

v, v_T – коэффициенты кинематической и турбулентной вязкости, m^2/c .

Из (15) и (31) получим:

$$\varepsilon = \frac{\tau_{ct}^2}{\rho(v + v_T)}, \quad v_T = v_T(y). \quad (32)$$

Среднее значение скорости диссипируемой энергии в пограничном слое толщиной δ запишем в виде:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\tau_{\text{ст}}^2}{\delta \rho} \int_0^{\delta} \frac{dy}{v + v_T(y)}, \quad (33)$$

где подынтегральная функция определяет сопротивление переносу импульса в турбулентном пограничном слое (13), и тогда уравнение (33) получит форму:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\tau_{\text{ст}}^2}{\delta \rho \gamma} = \frac{u_*^4 \rho}{\delta \gamma}. \quad (34)$$

Отсюда найдем среднее значение динамической скорости:

$$u_* = \left(\frac{\bar{\varepsilon} \delta \gamma}{\rho} \right)^{0,25}. \quad (35)$$

Применение выражения (35) рассмотрено в следующих разделах.

ТУРБУЛЕНТНАЯ ВЯЗКОСТЬ

В промышленных аппаратах химической технологии и энергетических установках движение газов (паров) и жидкостей практически всегда происходит при турбулентном режиме. Поэтому для поиска путей совершенствования технологического и энергетического оборудования важное значение имеет достоверный расчет турбулентных течений.

Первые фундаментальные исследования турбулентных течений были выполнены еще в 19 веке Г.Гагеном, О.Рейнольдсом, Ж.Буссинеском, Г.Лоренцем и в начале 20 века развиты многими учеными (Л.Прандтль, Т.Кармен, В.Экман, И.Бюргерс, А.Колмогоров, Х.Драйден, Г.Клаузер, Дж.Тейлор, Г.Шлихтинг, Л.Лойцянский и др). Разработаны различные полуэмпирические теории пристенной турбулентности и отрывных течений. Осреднение по Рейнольдсу уравнений динамики вязкой жидкости приводит к системе уравнений Рейнольдса, называемые уравнениями для первых моментов. В общем случае проблема замыкания этих уравнений сводится к установлению связи тензора турбулентных напряжений с тензором осредненных скоростей деформаций.

Одна из первых попыток упростить расчет турбулентных течений принадлежит Буссинеску, который ввел понятие турбулентной вязкости. Далее эта гипотеза была развита Прандтлем и Карманом. При этом делались различные допущения о характере изменения коэффициента $\nu_T(y)$. Опытами было установлено, что ν_T изменяется по поперечному сечению потока, возрастая по мере удаления от стенки до некоторого максимума и затем убывая на оси потока. Часто с достаточной для практических расчетов принимают среднее значение $\nu_T \approx const$ в ядре потока, т.е. за пределами пристенного слоя.

Рассмотрим теоретический подход определения коэффициента турбулентной вязкости в ядре потока, связанный с диссипацией энергии.

Для энергии турбулентности ε изотропного движения за пределами пограничного слоя следует соотношение [15]:

$$\varepsilon = \frac{15}{2} \nu \left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2. \quad (36)$$

Используя приближенное соотношение

$$\left(\overline{\frac{\partial u'}{\partial y}} \right)^2 = \overline{\frac{\partial u'}{\partial y}} \cdot \overline{\frac{\partial u'}{\partial y}} \quad (37)$$

получим

$$\varepsilon = \frac{15}{2} \nu \overline{\frac{\partial u'}{\partial y}} \cdot \overline{\frac{\partial u'}{\partial y}}. \quad (38)$$

Принимая турбулентность в канале, близкой к изотропной, Таунсенд записал скорость диссипации энергии ($\text{м}^2/\text{с}^3$) в виде [16]

$$\varepsilon \sim \frac{(v')^3}{l}, \quad (39)$$

где

v' – пульсационная скорость, м/с;

l – масштаб турбулентности, м.

По определению турбулентная вязкость записывается в виде $\nu_T = \overline{v'l}$, а касательное напряжение $\tau = \rho \overline{v'u'}$, где v' и u' – поперечная и продольная составляющие пульсационной скорости. При изотропной турбулентности имеем $\overline{v'} = \overline{u'} = u_*$. Тогда из выражений (36) – (39) получим среднее значение коэффициента турбулентной вязкости в ядре потока (т.е. при $y \geq \delta$):

$$\nu_T = 7,5 \frac{u_*^4}{\bar{\varepsilon}}, \quad (40)$$

где

$\bar{\varepsilon}$ – средняя объемная диссипация энергии, $\text{м}^2/\text{с}^3$.

По модели Прандтля средняя турбулентная вязкость при $y \geq \delta$:

$$\nu_T = \chi u_* \delta. \quad (41)$$

Рассмотрим применение выражений (40) и (41) для турбулентного потока в трубе.

Динамическую скорость в трубе вычислим по выражению (9).

Средняя скорость диссипации энергии в пристенном слое равна

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\tau u_{cp} F}{\rho F \delta} = \frac{u_{cp} u_*^2}{\delta} = \frac{u_{cp}^3 \lambda}{8\delta}, \quad (42)$$

где

F – площадь поверхности трубы, м^2 .

Среднюю толщину турбулентного пограничного слоя найдем, используя логарифмический профиль скорости в трубе [17]:

$$\frac{u}{u_*} = 5,75 \ln \frac{yu_*}{\nu} + 5,5 = 2,5 \ln \frac{yu_*}{\nu} + 5,5. \quad (43)$$

Отсюда при $y = \delta$ и $u = u_{cp}$ получим

$$\delta = \frac{\nu}{u_*} \exp \left[\frac{1}{2,5} \left(\frac{u_{cp}}{u_*} - 5,5 \right) \right]. \quad (44)$$

Из (40) с (42) получаем средние значения ν_T при $y \geq \delta$

$$\nu_T = 0,93 u_{cp} \delta \lambda. \quad (45)$$

Из (41) с u_* (9) запишется:

$$v_T = 0,14u_{cp}\delta\sqrt{\lambda}. \quad (46)$$

На рисунке 1 представлены зависимости v_T от числа Re по формулам (45) и (46).

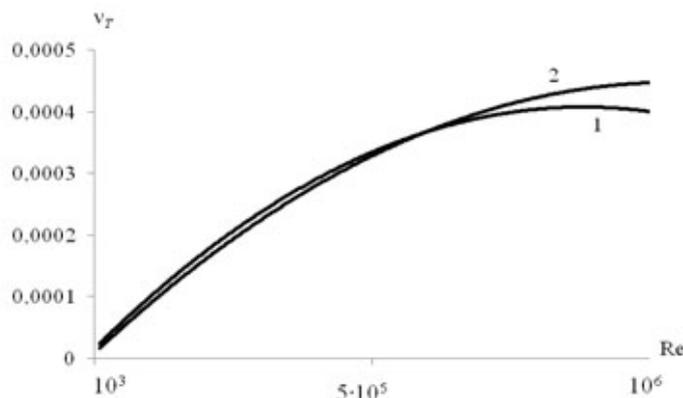


Рисунок 1. Зависимость средней турбулентной вязкости в трубе от числа Рейнольдса. 1 - расчет по формуле (45); 2 - расчет по формуле (46).

Из представленных расчетов видно удовлетворительное согласование результатов расчета средних v_T в ядре потока с использованием теории изотропной турбулентности и модели пограничного слоя Прандтля.

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА ИМПУЛЬСА ЛАМИНАРНЫЙ РЕЖИМ

Для плоского ламинарного пограничного слоя значение γ можно определить из выражения (3) с локальным или полным сопротивлением пластины

$$C_{f_x} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}}; C_{f_L} = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}}. \quad (47)$$

Отсюда из (3) и (47) локальный и средний коэффициент переноса импульса

$$\gamma_x = 0,332\sqrt{\frac{\nu u_\infty}{x}}, \gamma = 0,664\sqrt{\frac{\nu u_\infty}{L}}. \quad (48)$$

Данные выражения справедливы для плоского ламинарного пограничного слоя без возмущений. Рассмотрим подход [3], определения γ для градиентных течений.

В прикладной аэрогазовой динамике [18, 19] получил применение метод «эффективной длины». В этом случае влияние градиента давления учитывается соответствующим подбором эффективной длины при условии равенства толщины потери энергии пограничного слоя. При известной эффективной длине характеристики пограничного слоя рассчитываются с помощью соответствующих формул для пластины. Следовательно, чтобы получить выражение для γ , воспользуемся известными свойствами консервативности законов трения к различным возмущениям. Для этого осредним параметры градиентного потока по длине обтекаемого тела и приведем их к плоскому пограничному слою без гидродинамических возмущений [3, 20].

Предположим, что средний поток импульса на поверхности тела известен. Тогда в рамках плоского ламинарного пограничного слоя запишем [14]:

$$\tau_{ст} = \mu \rho \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \nu \rho \frac{3}{2} \frac{\overline{u_\infty}}{\delta}, \quad (49)$$

где

$$\delta = \frac{4,64}{L} \int_0^L \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} dx = 3,09 \sqrt{\frac{\nu L}{u_\infty}}.$$

Из данных выражений найдем осредненную скорость $\overline{u_\infty}$, приведенную к плоскому безградиентному пограничному слою:

$$\overline{u_\infty} = 1,62 (\tau_{ст} / \rho)^{2/3} (L / \nu)^{1/3}. \quad (50)$$

В данном случае эквивалентными параметрами градиентного и безградиентного потоков являются касательное напряжение $\tau_{ст}$ и характерный размер тела L , а влияние градиента давления учитывается путем расчета эффективной скорости $\overline{u_\infty}$, на основе известного

коэффициента трения плоской поверхности, т.е. удовлетворяя балансу импульса.

Это дает возможность применить выражение (3)

$$\gamma = \frac{\tau_{ст}}{\rho u_{\infty}}. \quad (51)$$

Отсюда с учетом (50) запишем

$$\gamma = 0,62 \left(\frac{\tau_{ст} v}{\rho L} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (52)$$

Выражение (52) является достаточно общим для ламинарных течений и в частном случае из него следует уравнение (48) с $\tau_{ст} = u_*^2 r$ (10) и C_f (47).

ТУРБУЛЕНТНЫЙ РЕЖИМ

Для турбулентного пограничного слоя на плоской пластине коэффициенты импульсоотдачи найдем аналогично, как для ламинарного течения, только с локальным и средним коэффициентом трения при турбулентном режиме [21]:

$$C_{f_x} = \frac{0,058}{Re_x^{0,2}}; C_f = \frac{0,074}{Re_L}. \quad (53)$$

Из (3) с C_{f_x} и C_f (53), получим

$$\gamma_x = 0,029 u_{\infty}^{-0,8} (v/x)^{0,2}, \quad (54)$$

$$\gamma = 0,037 u_{\infty}^{-0,8} (v/L)^{0,2}. \quad (55)$$

В общем случае в выражении (35) коэффициент переноса импульса определим путем интегрирования зависимости (13):

$$\frac{1}{\gamma} = \int_0^{\delta} \frac{\tau^*(y) dy}{v + v_T(y)}. \quad (56)$$

Для наглядности получим формулу для γ на основе применения двухслойной модели пограничного слоя Прандтля. Запишем интеграл (56) в виде сопротивлений переносу импульса в вязком подслое ($v_T = 0$) и турбулентной области ($v_T = \chi u_* y$):

$$\frac{1}{\gamma} = \int_0^{\delta_1} \frac{dy}{v} + \int_{\delta_1}^{\delta} \frac{dy}{\delta_1 \chi u_* y}, \quad (57)$$

получим

$$\gamma = \frac{u_*}{R_1 + \frac{1}{\chi} \ln(R_\delta / R_1)}, \quad (58)$$

где

$R_\delta = u_* \delta / v$ – безразмерная толщина турбулентного пограничного слоя;

$R_1 = u_* \delta_1 / v = 11,6$ – безразмерная толщина вязкого подслоя на пластине;

$\chi = 0,4$ – константа Прандтля.

Результаты расчета γ для пластины по (55) и (58) согласуются с расхождением $\pm 7\%$.

Далее с применением трехслойной модели Кармана выражение (56) получит вид:

$$\frac{1}{\gamma} = \int_0^{\delta_1} \frac{dy}{v} + 5 \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{dy}{u_* y} + 2,5 \int_{\delta_2}^{\delta} \frac{dy}{u_* y}, \quad (59)$$

где

$$\delta_1 = 5v / u_*;$$

$$\delta_2 = 30v / u_*.$$

Первое слагаемое в выражении (59) определяет сопротивление переносу импульса в вязком подслое толщиной δ_1 , второе – в переходной (буферной) области толщиной $(\delta_2 - \delta_1)$, а третье – в турбулентной области толщиной $(\delta - \delta_2)$.

Для удобства далее используем безразмерные числа

$$\tilde{R}_1 = \frac{u_* \delta_1}{v}; \quad \tilde{R}_2 = \frac{u_* \delta_2}{v},$$

где согласно модели Кармана $\tilde{R}_1 = 5, \tilde{R}_2 = 30$.

После интегрирования (59) получим

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{\tilde{R}_1}{u_*} + \frac{\tilde{R}_1}{u_*} \ln 6 + \frac{2,5}{u_*} \ln(R_\delta / \tilde{R}_2), \quad (60)$$

или

$$\gamma = \frac{u_*}{2,792\tilde{R}_1 + 2,5\ln(R_\delta/\tilde{R}_2)}. \quad (61)$$

Как известно, в моделях Прандтля и Кармана в вязком подслое $v_T = 0$.

Согласно теории Ландау и Левича, подтвержденной Дайслером, турбулентность в вязком подслое описывается функцией

$$\frac{v_T}{\nu} = (0,124y^+)^4, \text{ при } y^+ \leq 6, \quad (62)$$

тогда после интегрирования аналогичного выражения (59) с $v_T(y)$ (62) получим

$$\gamma = \frac{u_*}{2,288\tilde{R}_1 + 2,5\ln(R_\delta/\tilde{R}_2)}, \quad (63)$$

где

$\tilde{R}_1 = 6$ для плоского пограничного слоя.

Как следует из расчета по выражениям (61) и (63) учет затухания турбулентных пульсаций в вязком подслое в модели Кармана практически слабо влияет на значение коэффициента переноса импульса. Наиболее значительное влияние наблюдается для двухфазных сред [3, 5, 6].

В работах [3,7] выполнено интегрирование выражения (13) с различными функциями турбулентной вязкости в пограничном слое. Например, с функциями $v_T(y)$ Owen P. получено:

$$\gamma = \frac{u_*}{11,73 + 2,5\ln[(0,4u_*\delta - 3\nu)/(5\nu)]}. \quad (64)$$

Или с функциями Дайслера и Ханратти

$$\gamma = \frac{u_*}{5,309 + 2,5\ln R_\delta}. \quad (65)$$

Ниже показано, что использование полученных выражений для коэффициента импульсоотдачи позволяют получать в явном виде ряд важных характеристик турбулентного пограничного слоя.

ТОЛЩИНА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Локальная и средняя толщина турбулентного пограничного слоя на пластине имеет вид [21]:

$$\delta_x = \frac{0,37x}{\text{Re}_x^{0,2}}, \quad \delta = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{0,37x dx}{\text{Re}_x^{0,2}} = \frac{0,205L}{\text{Re}_l^{0,2}}, \quad (66)$$

где

L – длина пластины, м;

x – продольная координата;

числа Рейнольдса $\text{Re}_x = u_\infty x / \nu$; $\text{Re}_l = u_\infty L / \nu$.

С применением выражения для γ , толщину пограничного слоя найдем из потокового соотношения (2):

$$\tau_{\text{ст}} = u_*^2 \rho = \rho \gamma \Delta \bar{u}_\infty, \quad (67)$$

где

$\Delta \bar{u}_\infty$ – средняя движущая сила переноса импульса; $\Delta \bar{u}_\infty = \bar{u}_\infty \pm \bar{u}_{\text{зр}}$,

где

\bar{u}_∞ – скорость на оси потока, м/с;

$\bar{u}_{\text{зр}}$ – скорость на границе раздела, м/с. Для твердых поверхностей $\bar{u}_{\text{зр}} = 0$.

На основе (67) с учетом коэффициента переноса импульса (65) получено [7, 22]:

$$R_\delta = \exp \left[0,4 \left(\frac{u_\infty}{u_*} - 5,309 \right) \right]. \quad (68)$$

Аналогичные выражения для δ или R_δ можно получить из (67) с коэффициентами γ (58) и (61):

$$R_\delta = R_1 \exp \left[0,4 \left(\frac{u_\infty}{u_*} - R_1 \right) \right], \quad (69)$$

$$R_\delta = \tilde{R}_2 \exp \left[0,4 \left(\frac{u_\infty}{u_*} - 2,792 \tilde{R}_1 \right) \right], \quad (70)$$

где

$$\tilde{R}_1 = 5;$$

$$\tilde{R}_2 = 30;$$

$$R_1 = 11,6.$$

При использовании вышеприведенных выражений для каналов необходимо учитывать, что скорость на оси потока [21]:

$$u_{\infty} \approx 1,15u_{\text{cp}} \text{ или } u_{\infty} = u_{\text{cp}} + 3,75u_*.$$

В итоге уравнение (35) решается итерационным методом с одним из выражений для δ . Результатом решения являются средние значения динамической скорости и толщины турбулентного пограничного слоя.

Для проверки полученных уравнений выполнены сравнения результатов расчета толщины пограничного слоя для пластины (рис. 2, 3).

На рисунке 2 представлена зависимость толщины пограничного слоя на пластине от продольной координаты x .

Толщина пограничного слоя вычислялась по уравнению (66) и выражению (69).

В уравнении (69) динамическая скорость определена по уравнению (10), где локальный коэффициент трения на пластине $C_{f_x} = 0,058/\text{Re}_x^{0,2}$.

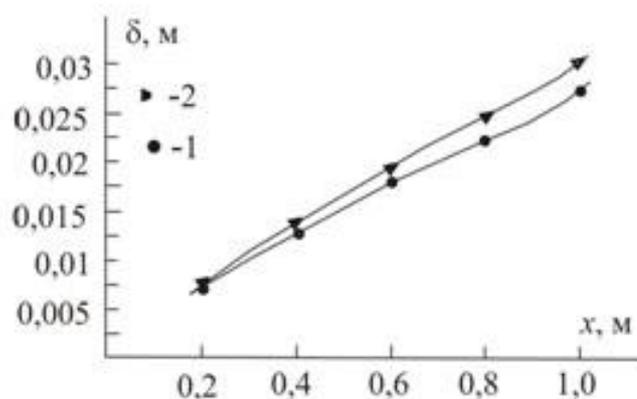


Рисунок 2. Зависимость толщины пограничного слоя на пластине от продольной координаты. Рабочая среда – воздух; $u_{\text{cp}} = 7,5$ м/с; 1 – расчет по уравнению (69); 2 – расчет по уравнению (66).

На рисунке 3 представлены зависимости толщин пограничного слоя на пластине от числа Рейнольдса.

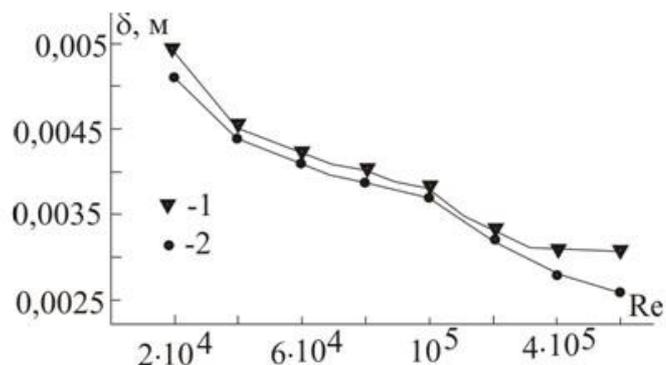


Рисунок 3. Зависимость толщины пограничного слоя на пластине от числа Рейнольдса. Рабочая среда – воздух; $x=0,1$ м; 1 – расчет по уравнению (66); 2 – расчет по уравнению (69).

В результате проверки уравнения (69) получены удовлетворительные согласования с известными выражениями. Аналогичные результаты дают и уравнения (68) и (70).

Т.к. полученные выражения (68)–(70) дают близкие результаты (± 5), то для вычислений удобнее пользоваться более компактной формулой (69), полученной на основе применения модели Прандтля.

РАСЧЕТ ДИНАМИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ

В качестве примера найдем по выражению (35) значение u_* для турбулентного потока на пластине.

Средняя диссипация энергии на пластине:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{t_{ст} F u_\infty}{V_\delta} = \frac{u_*^2 \rho u_\infty}{\delta}, \quad (71)$$

где

F – площадь поверхности пластины, м²;

$V_\delta = \delta F$ – объем пограничного слоя, м³.

Из (35) и (71) следует выражение (11).

Сравнение результатов расчета значения u_* для пластины по выражениям (10) и (11) с γ (58), (61) или (65) показывает их согласование с расхождением не более 5-7%.

Аналогичную проверку сделаем для потока в трубе, где средняя диссипация энергии имеет вид (42). Тогда получим:

$$u_* = \left(\frac{u_{cp}^3 \lambda \gamma}{8} \right)^{0,25} \quad (72)$$

На рисунке 4 представлена графическая зависимость динамической скорости от числа Рейнольдса в трубе.

Динамическая скорость определяется решением системы уравнений (72) с γ (69) – кривая 2 и известного уравнения (10) (кривая 1), где коэффициент сопротивления определяется по формуле Блазиуса.

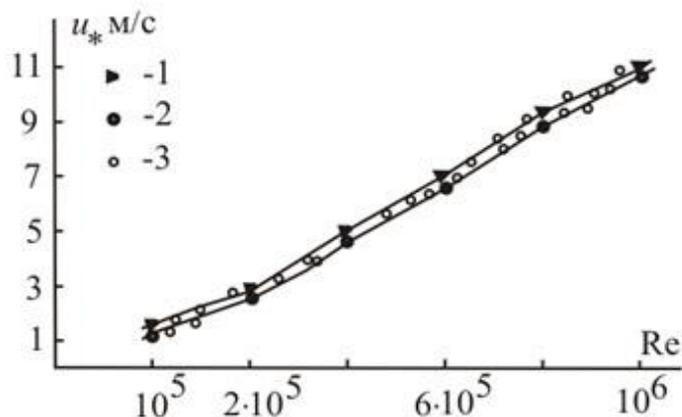


Рисунок 4. Зависимость динамической скорости от числа Рейнольдса в трубе. Рабочая среда – воздух; $d_s = 0,05$ м; 1 – расчет по (9), 2 – расчет по (72); 3 – экспериментальные данные [21].

Далее рассмотрим выражение для коэффициентов импульсоотдачи (58), (61), (63) и (65). Например, из выражения (58) следует, что сопротивление переносу импульса сосредотачивается в вязком подслое $\frac{R_1}{u_*}$

и в турбулентной области пограничного слоя $\left(\frac{2,5 \ln(R_\delta / R_1)}{u_*} \right)$.

Многочисленные расчеты γ показывают, что сумма слагаемых в знаменателе выражения (58) примерно составляет $R_1 + 2,5 \ln(R_\delta/R_1) = 15 \div 18$. Если приближенно взять среднее значение, то получим $\gamma \approx u_*/16,5$. Аналогичная оценка следует и из выражений (61), (63) и (65). Тогда в формуле (72) можно записать:

$$u_* \approx \left(\frac{u_{cp}^3 \lambda u_*}{132} \right)^{0,25} = 0,196 u_{cp} \lambda^{0,333}. \quad (73)$$

Как показывают расчеты значений u_* по (73) данное выражение дает удовлетворительные результаты (± 20) для различных контактных устройств при турбулентном режиме движения потоков.

ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ. ТУРБУЛЕНТНЫЙ РЕЖИМ

Значение динамической скорости можно получить из решения системы уравнений (35) с γ по (58), (61) или (65) и δ по (68) или (70). Для сокращения времени расчета рассмотрим полуэмпирический подход определения динамической скорости на основе использования средней диссипируемой энергии.

Для турбулентного движения потоков используют соотношение:

$$\varepsilon_0 = k^4 \bar{\varepsilon}, \quad (74)$$

где

k – эмпирический коэффициент пропорциональности.

Тогда выражение для динамической скорости представляют в виде:

$$u_* = k \left(\frac{\bar{\varepsilon} \nu}{\rho} \right)^{0,25}, \quad (75)$$

где коэффициент k находят экспериментальным путем для каждой конструкции аппарата [11,23].

Далее рассмотрим турбулентный режим движения среды на пластине и в трубе.

Выражение (75) для динамической скорости справедливо с коэффициентом пропорциональности k .

Для пластины из (71) и (75) получим:

$$u_* = k \left(\frac{u_*^2 \nu u_\infty}{\delta} \right)^{0,25} \quad (76)$$

Отсюда запишем коэффициент пропорциональности

$$k = \frac{\sqrt{u_*}}{(\nu u_\infty / \delta)^{0,25}} = \left(\frac{u_\infty C_f \delta}{2\nu} \right)^{0,25} = (R_\delta C_f / 2)^{0,25}, \quad (77)$$

где

$R_\delta = u_\infty \delta / \nu$ – безразмерная толщина пограничного слоя.

При средних значениях для пластины (66) $\delta = 0,205L / \text{Re}^{0,2}$ и $C_f = 0,074 / \text{Re}^{0,2}$ из (77) получим $k = 0,34 \text{Re}^{0,2}$.

В трубе:

$$k = \frac{u_\infty \sqrt{\lambda/8}}{(\lambda u_\infty^3 \nu / 2d)^{0,25}} = 0,42 (\text{Re} \lambda)^{0,25} \quad (78)$$

При $\lambda = 0,316 / \text{Re}^{0,25}$ из (78) следует $k = 0,31 \text{Re}^{0,187}$.

Полученные выражения для коэффициента пропорциональности $k = f(\text{Re}^n)$, ($n = 0,187$ и $n = 0,2$) в зависимости (75) объясняют полученные экспериментальным путем значения $k = 1,6 \div 2,7$ для аппаратов различных конструкций [11, 23].

Для определения коэффициента k в (75) теоретическим путем запишем поток импульса (67) с динамической скоростью (75). Получим

$$\gamma \Delta u_\infty = k^2 \left(\frac{\bar{\varepsilon} \nu}{\rho} \right)^{0,5} \quad (79)$$

Отсюда найдем коэффициент

$$k = (\gamma \Delta u_\infty)^{0,5} \left(\frac{\bar{\varepsilon} \nu}{\rho} \right)^{-0,25} \quad (80)$$

Из (75) с коэффициентом (80) получаем динамическую скорость, аналогичную (11). Таким образом, используя различные подходы, приходим к единой формуле для расчета u_* в виде (11).

КОЭФФИЦИЕНТЫ ТРЕНИЯ

Рассмотрим применение выражений для коэффициентов импульсоотдачи в форме коэффициентов трения.

Из (11) с γ (58) получим динамическую скорость в виде:

$$u_* = \frac{u_\infty}{R_1 + \frac{1}{\chi} \ln(R_\delta/R_1)}. \quad (81)$$

Выражение (81) связывает динамическую скорость трения u_* с характеристиками турбулентного пограничного слоя в двухслойной модели Прандтля – R_δ, R_1, χ . Расчет u_* по (81) удовлетворительно согласуется с u_* , полученному по выражению (10) $u_* = f(C_f)$.

С использованием выражения (81) можно записать коэффициент трения

$$C_f = 2 \left[R_1 + \frac{1}{\chi} \ln(R_\delta/R_1) \right]^{-2}. \quad (82)$$

Аналогично с выражением (61)

$$C_f = 2 \left[2,792 \tilde{R}_1 + 2,5 \ln(R_\delta/\tilde{R}_2) \right]^{-2}. \quad (83)$$

и с формулой (65)

$$C_f = 2 \left[5,309 + 2,5 \ln R_\delta \right]^{-2}. \quad (84)$$

Полученные выражения для коэффициента трения (82)-(84) позволяют исследовать влияние толщины вязкого подслоя (R_1 или \tilde{R}_1), буферной области \tilde{R}_2 и всего пограничного слоя R_δ на перенос импульса с учетом различных возмущений.

Так, например, на шероховатой поверхности с выступами, соизмеримыми с толщиной вязкого подслоя, выражение (82) получит вид

$$C_f = 2 \left(R_{1ш} + \frac{1}{\chi} \ln \frac{R_\delta}{R_{1ш}} \right)^{-2}, \quad (85)$$

где

$R_{1ш}$ – толщина вязкого подслоя с учетом шероховатостей,

$$R_{1ш} = (\delta_1 - h) u_* / \nu;$$

h – высота выступов шероховатостей, м (при $h < \delta_1$).

Из выражения (85) следует, что при увеличении h коэффициент трения возрастает, что соответствует известным экспериментальным данным.

ЗЕРНИСТЫЕ НАСАДОЧНЫЕ СЛОИ

Рассмотрим применение полученных выражений для u_* , γ и v_T при движении газов или жидкостей в насадочных или зернистых слоях.

Насадочные слои тепломассообменных аппаратов подразделяются на регулярные и нерегулярные (засыпанные внавал). Нерегулярные насадки состоят из элементов с размерами 50мм и менее и имеют различную форму. Турбулентность в таких слоях возникает значительно раньше, чем в гладких трубах и границе ламинарного режима соответствует значению $Re = 15 - 40$. Полностью развитый турбулентный режим наступает при значениях Re от $2 \cdot 10^3$ до $6 \cdot 10^3$, где $Re = u_{cp} d_{\text{э}} / \nu$. При обычно встречающихся на практике значениях Re от 40 до $2 \cdot 10^3$ соответствует переходному режиму [24].

Для ламинарного режима движения газа или жидкости ($Re < 40$) динамическую скорость найдем, используя выражение (19). Тогда из (19), (86) и (87) получим

$$u_* = \left(\frac{\Delta p u_{cp} \nu}{\rho H} \right)^{1/4} = \left(\frac{\lambda u_{cp}^3 \nu a_v}{8 \varepsilon_{св}^3} \right)^{1/4}, \quad (86)$$

где

H – высота насадочного слоя, м;

a_v – удельная поверхность насадки, $\text{м}^2/\text{м}^3$;

$\varepsilon_{св}$ – удельный свободный объем;

$d_{\text{э}} = 4 \varepsilon_{св} / a_v$.

Коэффициент гидравлического сопротивления насадочного или зернистого слоя находится экспериментально для каждого типа элемента

(засыпки) и обычно дается в виде функции $\lambda = f(\text{Re})$ [12,24,25,26]. В работе [26] связь между коэффициентами имеет вид $\lambda = 4f_3$.

Коэффициент переноса импульса для ламинарного режима в насадке запишем из выражения (52) и (88)

$$\gamma = 0,62 \left(\frac{\lambda u_{\text{cp}}^3 v a_v}{8 \epsilon_{\text{CB}}^3} \right) \left(\frac{v}{L} \right)^{1/3}. \quad (87)$$

Современные насадки, которые по форме значительно отличаются от колец и седел, способствуют развитию интенсивной турбулентности в ядре потока. Однако, элементы насадок, образованными изогнутыми полосами металлической ленты шириной 3-5 мм, имеют особенности по формированию пограничного слоя. Известно, что при контакте турбулентного потока с обтекаемой поверхностью на передней кромке образуется ламинарный пограничный слой. При достижении некоторого критического размера ламинарное движение в пограничном слое становится неустойчивым и развивается турбулентность. Для элементов насадок, расположенных далее первого ряда, начальный участок ламинарного слоя подвержен турбулентным воздействиям из ядра потока. Такой пограничный слой классифицируется как псевдоламинарный. В первом приближении среднюю толщину псевдоламинарного пограничного слоя можно вычислить по выражению (26), а затем уточнить с учетом воздействия турбулентных пульсаций. Тогда турбулентную вязкость при $y \geq \delta$ найдем с использованием модели локальной изотропной турбулентности по уравнениям (40), (42), получим

$$v_T = 7,5\delta \frac{u_*^2}{u_{\text{cp}}}, \quad (88)$$

где динамическую скорость для насадочного слоя можно записать, используя приближенное выражение (73), тогда получим

$$u_* = 0,196 u_{\text{cp}} \lambda^{0,333} = 0,196 u_{\text{cp}} \left(\frac{\Delta p}{H} \left(\frac{\rho u_{\text{cp}}^2}{2d_3} \right)^{-1} \right)^{0,333}, \quad (89)$$

где коэффициент сопротивления записан в известной форме [24] для насадочного слоя, используя перепад давления.

Выражение (88) с динамической скоростью (89) запишется в виде:

$$v_T = 0,288\delta u_{cp} \lambda^{0,666}. \quad (90)$$

В неупорядоченных насадочных слоях, образованных из металлических насадок, развивается высокая интенсивность турбулентности ($Re > 2 \cdot 10^3$), что дает возможность использовать модель локальной изотропной турбулентности со средней объемной скоростью диссипации энергии выражение (40), где $\bar{\varepsilon}$ запишем в виде:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta p S u_{cp}}{\rho V_{сл} \varepsilon_{св}} = \frac{\Delta p u_{cp}}{\rho H \varepsilon_{св}} = \frac{\lambda u_{cp}^3}{2 d_3 \varepsilon_{св}}, \quad (91)$$

где

$V_{сл}$ – объем слоя, м³;

S – площадь поперечного сечения, м²;

H – высота слоя, м.

Перепад давления слоя насадки в выражении (91) записан, используя аналог выражения Дарси-Вейсбаха

$$\Delta p = \lambda \frac{H}{d_3} \frac{\rho u_{cp}^2}{2}, \quad (92)$$

где

$d_3 = 4\varepsilon_{св}/a_V$ – эквивалентный диаметр насадки, м.

Из выражения (40) с u_* (89) и $\bar{\varepsilon}$ (91) получим:

$$v_T = \frac{7,5(0,196u_{cp}\lambda^{0,333})^4}{\Delta p u_{cp}/(H\varepsilon_{св}\rho)} = 7,5d_3 2\varepsilon_{св} 0,196^4 u_{cp} \lambda^{0,333} = 0,113u_* d_3 \varepsilon_{св}, \quad (93)$$

или

$$\frac{v_T}{v} = 0,022 Re \varepsilon_{св} \lambda^{0,333}. \quad (94)$$

В итоге из (93) следует аналог выражения Прандтля (41), где $\delta \approx 0,113d_3 \varepsilon_{св}/\chi$.

Динамическая скорость при турбулентном режиме в насадке находится из решения системы уравнений (35) и (58). Многочисленные

расчеты для разных типов насадок показывают, что значение u_* можно вычислить по простой зависимости (75), где для насадочного слоя $k \approx 1,8 - 2,0$. Удовлетворительные результаты так же дает выражение (73) с коэффициентом сопротивления насадочного слоя.

АППАРАТЫ С МЕХАНИЧЕСКИМ ПЕРЕМЕШИВАНИЕМ И ГИДРОЦИКЛОНЫ

Величину средней диссипируемой энергии в аппарате с мешалкой выразим в виде отношения мощности N , затрачиваемой на перемешивание, к объему жидкости в аппарате

$$\bar{\varepsilon} = \frac{4N}{\pi D^2 H_{\text{ж}}}, \quad (95)$$

где

D – диаметр аппарата, м;

$H_{\text{ж}}$ – высота уровня жидкости, м.

При известном значении ε динамическую скорость на стенке можно вычислить из решения системы уравнений (35), (58) и (69). Расчеты показывают с достаточной для прикладных расчетов точностью, что можно использовать выражение (75) с $k \approx 2,0$. Тогда получим

$$u_* = 2 \left(\frac{4Nv_{\text{ж}}}{\rho \pi D^2 H_{\text{ж}}} \right)^{0,25}. \quad (96)$$

Аналогичное выражение получено для гидроциклона

$$u_* = 1,55 \left(\frac{\Delta p S u_{\text{ж}} v_{\text{ж}}}{\rho_{\text{ж}} V_{\text{ж}}} \right)^{0,25}, \quad (97)$$

где

Δp – перепад давления в гидроциклоне, Па;

S – площадь входного патрубка, м²;

$u_{\text{ж}}$ – скорость жидкости в патрубке, м/с;

$V_{\text{ж}}$ – объем жидкости в гидроциклоне, м³.

Таблица - ОСНОВНЫЕ ПОЛУЧЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

№ формулы	Показатель
	Динамическая скорость трения, м/с
	в общем виде:
(11)	$u_* = \sqrt{\gamma u_\infty}$.
(35)	$u_* = \left(\frac{\bar{\varepsilon} \delta \gamma}{\rho} \right)^{0,25}$.
	на пластине (ламинарный режим)
(22)	$u_* = \left(\frac{u_\infty v}{\delta} \right)^{0,5}$.
(24)	$u_*(x) = 0,447 u_\infty^{0,75} (v/x)^{0,25}$.
(27)	$u_* = 0,548 u_\infty^{0,75} (v/L)^{0,25}$.
	в трубе (ламинарный режим)
(29)	$u_* = \left(\frac{4 u_\infty v}{d} \right)^{0,5}$.
	в трубе (турбулентный режим)
(72)	$u_* = \left(\frac{u_{cp}^3 \lambda \gamma}{8} \right)^{0,25}$.
(73)	обобщенная приближенная формула $u_* = 0,196 u_{cp} \lambda^{0,333}$.
(75)	обобщенная формула (турбулентный режим) $u_* = k \left(\frac{\bar{\varepsilon} v}{\rho} \right)^{0,25}$. Для трубы $k = 0,31 Re^{0,187}$ Для пластины $k = 0,34 Re^{0,2}$ Для насадочного слоя $k = 1,8 - 2,0$ В аппарате с мешалкой $k = 2,0$ В гидроциклоне $k = 1,55$ Шахматные и коридорные пучки труб $k = 2,0$
(86)	для насадочного слоя (ламинарный режим) $u_* = \left(\frac{\Delta p u_{cp} v}{\rho H} \right)^{0,25}$. для насадочного слоя (турбулентный режим) $u_* = 1,8 \left(\frac{\Delta p u_{cp} v}{\rho H} \right)^{0,25}$.

Продолжение таблицы 1

№ формулы	Показатель
(89)	$u_* = 0,196 u_{cp} \left(\frac{\Delta p}{H} \left(\frac{\rho u_{cp}^2}{2d_3} \right)^{-1} \right)^{0,333} .$
(96)	<p>аппарат с мешалкой</p> $u_* = 2 \left(\frac{4Nv_{ж}}{\rho \pi D^2 H_{ж}} \right)^{0,25} .$
(97)	<p>гидроциклон</p> $u_* = 1,55 \left(\frac{\Delta p S u_{ж} v_{ж}}{\rho_{ж} V_{ж}} \right)^{0,25} .$
<p>Коэффициенты переноса импульса</p>	
(48)	<p>Ламинарный режим на пластине</p> $\gamma_x = 0,332 \sqrt{\frac{\nu u_\infty}{x}}, \quad \gamma = 0,664 \sqrt{\frac{\nu u_\infty}{L}} .$
(52)	<p>обобщенная формула для ламинарного режима</p> $\gamma = 0,62 \left(\frac{\tau_{ст} \nu}{\rho L} \right)^{0,333} .$
(58)	<p>турбулентный режим</p> $\gamma = \frac{u_*}{R_1 + \frac{1}{\chi} \ln(R_\delta / R_1)} .$
(61)	$\gamma = \frac{u_*}{2,792 \tilde{R}_1 + 2,5 \ln(R_\delta / \tilde{R}_2)} .$
<p>Толщина пограничного слоя – турбулентный режим</p>	
(69)	$R_\delta = R_1 \exp \left[0,4 \left(\frac{u_\infty}{u_*} - R_1 \right) \right] .$
(70)	$R_\delta = \tilde{R}_2 \exp \left[0,4 \left(\frac{u_\infty}{u_*} - 2,792 \tilde{R}_1 \right) \right] .$
(44)	$R_\delta = \exp \left[0,4 \left(\frac{u_\infty}{u_*} - 5,5 \right) \right] .$
<p>Турбулентная вязкость</p>	
(40)	<p>в общем виде</p>

	$v_T = 7,5 \frac{u_*^4}{\varepsilon}$
--	---------------------------------------

Продолжение таблицы 1

№ формулы	Показатель
(45)	для трубы $v_T = 0,93 u_{cp} \delta \lambda$
(88)	в насадочном слое $v_T = 7,5 \delta \frac{u_*^2}{u_{cp}}, 40 < Re < 2 \cdot 10^3$
(94)	$\frac{v_T}{v} = 0,022 Re \varepsilon_{св} \lambda^{0,333}, Re > 2 \cdot 10^3$
	Коэффициенты трения (турбулентный режим)
(82)	$C_f = 2 \left[R_1 + \frac{1}{\chi} \ln(R_\delta / R_1) \right]^{-2}$
(83)	$C_f = 2 \left[2,792 \tilde{R}_1 + 2,5 \ln(R_\delta / \tilde{R}_2) \right]^{-2}$
(85)	на шероховатой поверхности $C_f = 2 \left(R_{1ш} + \frac{1}{\chi} \ln \frac{R_\delta}{R_{1ш}} \right)^{-2}$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Выполненные в данной работе аналитические исследования моделей пограничного слоя и сделанные сопоставления с экспериментальными данными и известными расчетными зависимостями позволяют сделать следующие обобщения и выводы:

1. Теоретически обоснована форма записи динамической скорости (19) для ламинарных течений с погрешностью $\pm 5\%$.

2. Для турбулентного режима получено аналитическое выражение (35), где основными параметрами являются средняя скорость диссипации энергии, толщина пограничного слоя и коэффициент импульсоотдачи.

3. На основе применения теории локальной изотропной турбулентности получено выражение (40) для расчета средней турбулентной вязкости. Показано согласование с известными экспериментальными данными.

4. Получено выражение для коэффициента импульсоотдачи (52) для ламинарных течений с различными возмущениями, где основным параметром является касательное напряжение на стенке.

5. Путем использования моделей Прандтля, Кармана, Ландау, Левича и Дайсслера и интегрирования уравнения (13), получены выражения для коэффициентов импульсоотдачи (58), (61) и (63) для турбулентного режима.

6. На основе баланса импульса в пограничном слое с использованием выражений для коэффициентов импульсоотдачи получены уравнения для расчета средней толщины гидродинамического пограничного слоя. Показано согласование с известными результатами.

7. С использованием выражения (35) показаны примеры расчета динамической скорости на пластине и в трубе и сравнение с известными выражениями.

8. Получены выражения для коэффициента трения, которые содержат характеристики пограничного слоя и позволяют учесть шероховатость поверхности при турбулентном режиме.

9. Рассмотрены ламинарный и турбулентный режимы движения потоков в неупорядоченных насадочных и зернистых слоях и получены выражения для расчета динамической скорости, коэффициента импульсоотдачи и турбулентной вязкости. Аналогичный подход рекомендован и для аппаратов с механическим перемешиванием и гидроциклонов.

Приведенные в данной работе уравнения и методы расчета гидромеханических характеристик пограничного слоя могут использоваться в различных вариантах расчета промышленных аппаратов и другого оборудования в зависимости от решаемых задач.

Литература

1. Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. – 456с.
2. Репик Е.У., Соседко Ю.П. Турбулентный пограничный слой. Методика и результаты экспериментальных исследований. – М.: Физматлит, 2007. – 312с.
3. Лаптев А.Г. Модели пограничного слоя и расчет тепломассобменных процессов. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2007. – 500с.
4. Дильман В.В. Методы модельных уравнений и аналогий в химической технологии / В.В. Дильман, А.Д. Полянин. – М.: Химия, 1988. – 304 с.
5. Дьяконов С.Г. Теоретические основы и моделирование процессов разделения веществ / С.Г. Дьяконов, В.И. Елизаров, А.Г. Лаптев. – Казань.: Изд-во Казанск. ун-та, 1993. – 437с.
6. Лаптев А.Г. Модели переноса и эффективность жидкостной экстракции / А.Г. Лаптев. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2005. – 299 с.
7. Лаптев А.Г., Николаев Н.А., Башаров М.М. Методы интенсификации и моделирования тепломассообменных процессов. – М.: Теплотехник, 2011. – 287с.
8. Бенедек П., Ласло А. Научные основы химической технологии. Под ред. П.Г. Романкова и М.И. Курочкиной. – Изд. «Химия», 1970. – 376с.
9. Деменюк С.Л. Теплообмен и гидравлическое сопротивление при турбулентном течении в каналах / С.Л. Деменюк . – Санкт – Петербург: Бюро hi Пром, 2010. – 133с.
10. Брагинский Л.В. Перемешивание в жидких средах: физические основы и инженерные методы расчета / Л.Н.Брагинский, В.И.Бегачев, В.М. Барабаш. - Л.: Химия, 1984.
11. Соколов В.Н. Газожидкостные реакторы / В.Н.Соколов, И.В.Доманский. – Л.: Машиностроение, 1976. – 216с.
12. Лаптев А.Г. Разделение гетерогенных систем в насадочных аппаратах / А.Г.Лаптев, М.И.Фарахов. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2006. – 342с.
13. Ландау Л.Д. Теоретическая физика / Л.Д.Ландау, В.М. Лившиц: учеб. пособие: в 10 т. – Т.6. Гидродинамика. – 5-е изд. – М.: Физматлит, 2003. – 560с.
14. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой / Л.Г. Лойцянский – М.: Физматгиз, 1962. – 410с.
15. Хинце И.О. Турбулентность, ее механизм и теория. – М.: Наука, 1963 – 680 с.
16. Таунсенд А.А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом / А.А. Таунсенд: пер. с англ. / под ред. А.Н. Колмогорова. – М., 1959. – 360с.
17. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1987. – 840с.
18. Авдуевский В.С. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно – космической технике / В.С. Авдуевский, Б.М. Галицейский, Г.А.Глебов и др. под ред. В.К. Кошкина. – М.: Машиностроение, 1975. – 330с.
19. Краснов Н.Ф. Основы прикладной аэрогазодинамики. Кн. 2. Обтекание тел вязкой жидкостью / Н.Ф. Краснов, В.Н. Кошевой, В.Ф. Захарченко и др.; под ред. Н.Ф. Краснова. – М.: Высшая школа, 1991. – 350с.
20. Лаптев А.Г. Модель массоотдачи в жидкой фазе насадочных колонн / А.Г. Лаптев, Р.Р. Насыров, Т.М. Фарахов // Тепло – массообменные процессы и аппараты химической технологии: межвуз. темат. сб. науч. тр. – Казань, 2005. – С.4-8.
21. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1974. – 714с.

22. Лаптев А.Г., Башаров М.М., Фарахова А.И. Эффективность турбулентной сепарации мелкодисперсной фазы в тонкоотстойных отстойниках // Энергосбережение и водоподготовка, 2011, - №5(73). - С. 43-46.

23. Доманский И.В. Обобщение различных случаев конвективного теплообмена с помощью полуэмпирической теории турбулентного переноса / И.В. Доманский, В.Н. Соколов. // Теор. Основы хим. технол. – 1968. – Т.2, № 5. С.761–767.

24. Рамм В.М. Абсорбция газов. 2-е изд. / В.М. Рамм. – М.: Химия, 1976. – 655с.

25. Аэров М.Э. Аппараты со стационарным зернистым слоем: Гидравлические и тепловые основы расчета / М.Э. Аэров, О.М. Годес, Д.А. Наринаский. – Л.: Химия, 1979.

26. Фарахов Т.М. Многофункциональные контактные устройства смешения котельного топлива с присадками и очистки газовых выбросов ТЭС: дис. канд. тех. наук / Т.М. Фарахов – Казань: КГЭУ, 2011.