

УДК 330.4 (075.8)

СОВРЕМЕННЫЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ В ИССЛЕДОВАНИИ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ. 2 – СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ

Боташева Фатима Борисовна

к.э.н., доцент

Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия, Черкесск, КЧР, Россия

Во второй статье из серии работ по инструментальным методам исследования макроэкономической динамики описывается современный класс аппроксимирующих функций, в наибольшей степени релевантный «рваному» характеру современных переходных экономик, когда на протяжении отчётного периода меняется временной класс процесса, «правила игры», тарифы, предпочтения, налоги, акцизы, таксы, квоты, отчисления ... Сплайны оказались новым, более универсальным, простым, но в то же время тонким, интеллектуальным, математически точным и оптимизированным методом исследования макроэкономической динамики. Они дали возможность аналитически, численно и графически анализировать, представлять, визуализировать и прогнозировать образы макроэкономических конъюнктур

Ключевые слова: ПЕРЕХОДНЫЕ ЭКОНОМИКИ, «РВАНАЯ» ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА, «КУСОЧНАЯ» АППРОКСИМАЦИЯ, СПЛАЙНЫ, АНАЛИТИЧНОСТЬ МОДЕЛЕЙ

UDC 330.4 (075.8)

MODERN TOOLKIT IN RESEARCH OF MACROECONOMIC DYNAMICS. 2 - THE SPLINE-APPROXIMATION

Botascheva Fatima Borisovna

Cand.Econ.Sci., senior lecturer

North-Caucasian State Humanitarian-Technological Academy, Cherkessk, Russia

In the second article from the series of works about the tool methods of research of macroeconomic dynamics the modern class of approximating functions is described. It is relevant to the "fragmentary" character of modern transitive economy when during the accounting period the time class of process varies, as well as "game rules", tariffs, preferences, taxes, excises, rates, quotas, deductions ... The splines have appeared new, more universal, simple, but at the same time thin, intellectual, mathematically exact and optimized method of research of macroeconomic dynamics. They have enabled analytically, numerically and graphically to analyze, represent, visualize and predict images of macroeconomic conjuncture

Keywords: TRANSITIVE ECONOMY, "FRAGMENTARY" ECONOMIC DYNAMICS, "SLICES" APPROXIMATION, SPLINES, ANALYTICITY OF MODELS

Было выяснено [1], что макроэкономический сигнал в своей стране нестационарен, стохастичен, заметно турбулентен, принципиально непредсказуем, изменяется спонтанно и перманентно, быстро, выбросы внезапны с большими амплитудами отклонений. Его характеризуют и сопровождают общая экономическая неустойчивость, неизвестность, невероятность, неопределённость и непредсказуемость. Таковы исходные условия, определяющие поиск первого математического конструкта для макроэкономических исследований. Макроэкономическая динамика изучает процессы, протекающие в рыночной среде. Слово «процесс» предполагает изменение показателя во времени. Отсюда появляется термин «временной класс» процесса, который базируется на тесной взаимосвязи математических и

экономических формулировок. «Близость» - некоторый оптимум критерия согласия временного поведения экономического показателя и математического класса аппроксимирующей его модели. Близость временных классов процесса и модели делает их релевантными, уточняя анализ и прогноз [2].

Новый математический конструкт должен появиться в макроэкономике по многим причинам. В связи с долгим поиском новой исследовательской «платформы» для работы с макроэкономической динамикой, выявлением и сравнением принципиальных подходов к анализу макроэкономического поведения, удаётся утверждать, что аппроксимирующая функция фиксированного класса не может достаточно точно моделировать, анализировать и прогнозировать экономический, производственный, финансовый, маркетинговый процесс, т.е. быть ему идемпотентной. Особенно сложен случай, когда исходный процесс представляется суперпозицией нескольких временных классов или его временной класс меняется на протяжении исследуемого отчётного периода из-за вариации экзогенных условий хозяйствования. Видим, как в процессе переходного экономического развития спонтанно меняются экономические «правила игры», экономическое законодательство, своды, положения, правила, нормы, тарифы, ставки налогообложения, акцизы, квоты, отчисления, таксы, преференции. В [3] замечено: «экономическая система имеет то свойство, что при поступлении внешней информации её параметры способны динамично меняться»; «необоснованное вмешательство государства быстро разрушает экономическую систему». От того искомый конструкт должен наилучшим образом анализировать «рваную» динамику реальных экономических показателей.

Привлечём соображения о полезности в моделировании, анализе и прогнозировании «кусочного» или «кусочно-полиномиального» подхода, когда исходное макроэкономическое движение представляется моделью, состоящей из последовательно связанных фрагментов. Такие модели назо-

вём полиформными [4]. Успех обеспечивается преобразованием «решётчатого» образа макроэкономической временной зависимости в непрерывную кусочно-гладкую функцию, описываемую аналитически с аналитическими же производными. Здесь, как чёрт из табакерки, и появляется сплайн.

Фрагменты из отдельных временных интервалов отчётного периода необходимо «сшивать» в «узлах» «решётки» своими значениями (слева и справа от «узла») и точно так же значениями всех возможных конечных разностей или производных. Успех такого представления в футурологии, например, обеспечивается спецификой прогнозных задач. Необходимо построить первый прогнозный фрагмент в перспективном периоде так, чтобы он был «плавно» связан (как самой функцией, так и всеми её производными) с последним фрагментом отчётного периода в точке $\hat{a}X_N, Y_N\tilde{n}$ - при перспективном прогнозировании; с первым фрагментом прогнозного участка в точке $\hat{a}X_1, Y_1\tilde{n}$ - при ретроспективном прогнозировании.

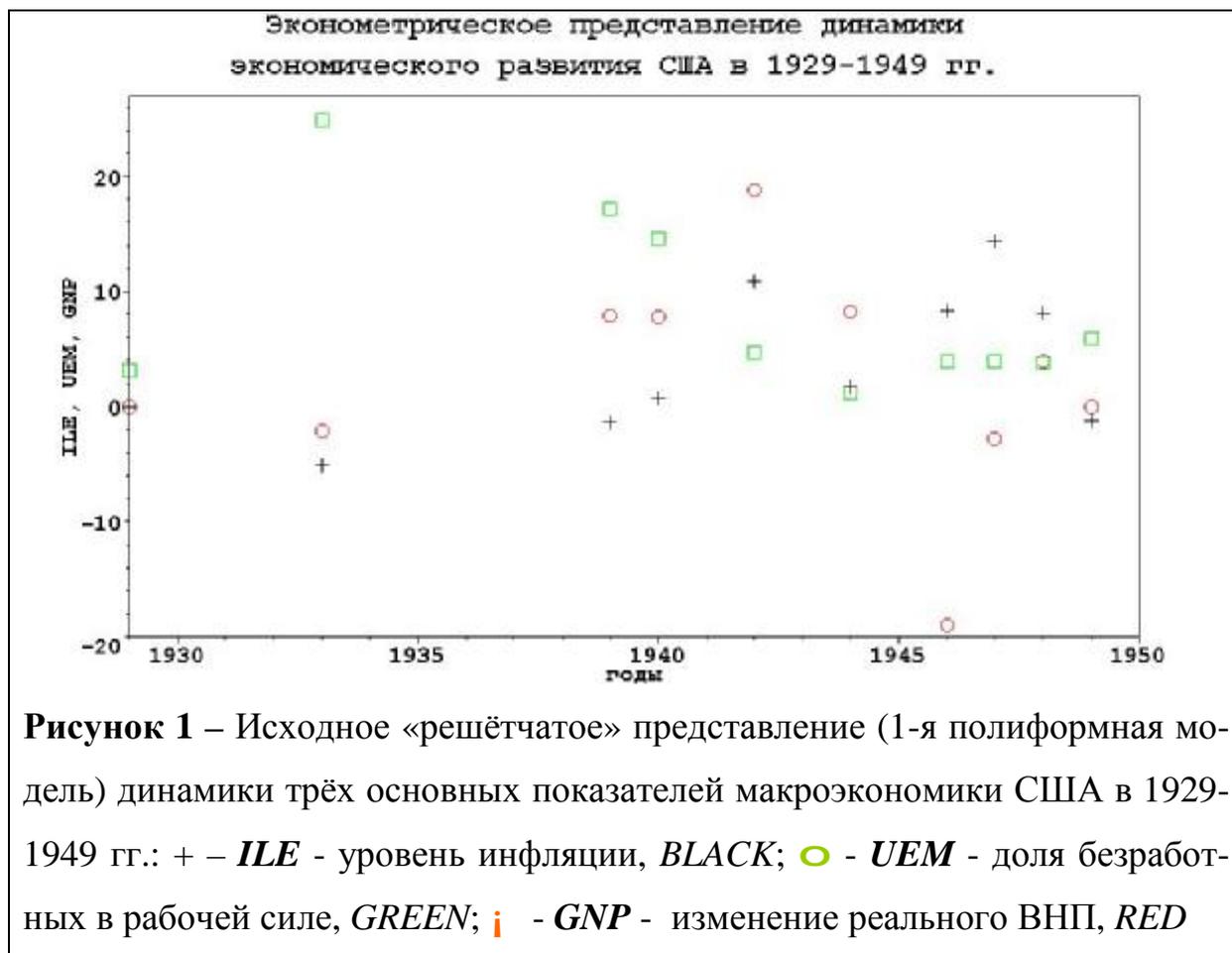
Математически «сшивка» осуществляется значениями самой функции $SPL(Y;X_{j-0})=SPL(Y;X_{j+0})=Y_j$ слева и справа от каждого «узла» $j=1..N$ «решётчатой» функции на множестве «узловых» точек $\{\hat{a}X_j; Y_j\tilde{n}\}$ и, аналогично, значениями её производных $SPL1D(Y;X_{j-0})=SPL1D(Y;X_{j+0})$, $SPL2D(Y;X_{j-0})=SPL2D(Y;X_{j+0})...$ На всём интервале $[E, F]$ или во всех «узлах» «сетки» $\{\hat{a}X_j; Y_j\tilde{n}\}, j=1..N$ $SPL(Y;X)$, $SPL1D(Y;X)$, $SPL2D(Y;X)$... становятся гладкими непрерывными аппроксимирующими ансамблями

Поскольку предлагается использовать концепцию непрерывной «кусочной» аппроксимации, а из кусочно-полиномиальных функций мы остановили свой выбор на сплайнах, то стоит хотя бы конспективно рассмотреть все замечательные свойства сплайн-представления макроэкономического поведения на исходном дискретном множестве точек. При моделировании макроэкономической динамики мы насчитали 24 замечательных свойства сплайнов, которые полезно выделяют их из всего множества аппроксимирующих функций [5]. Начнём с важного качественного замеча-

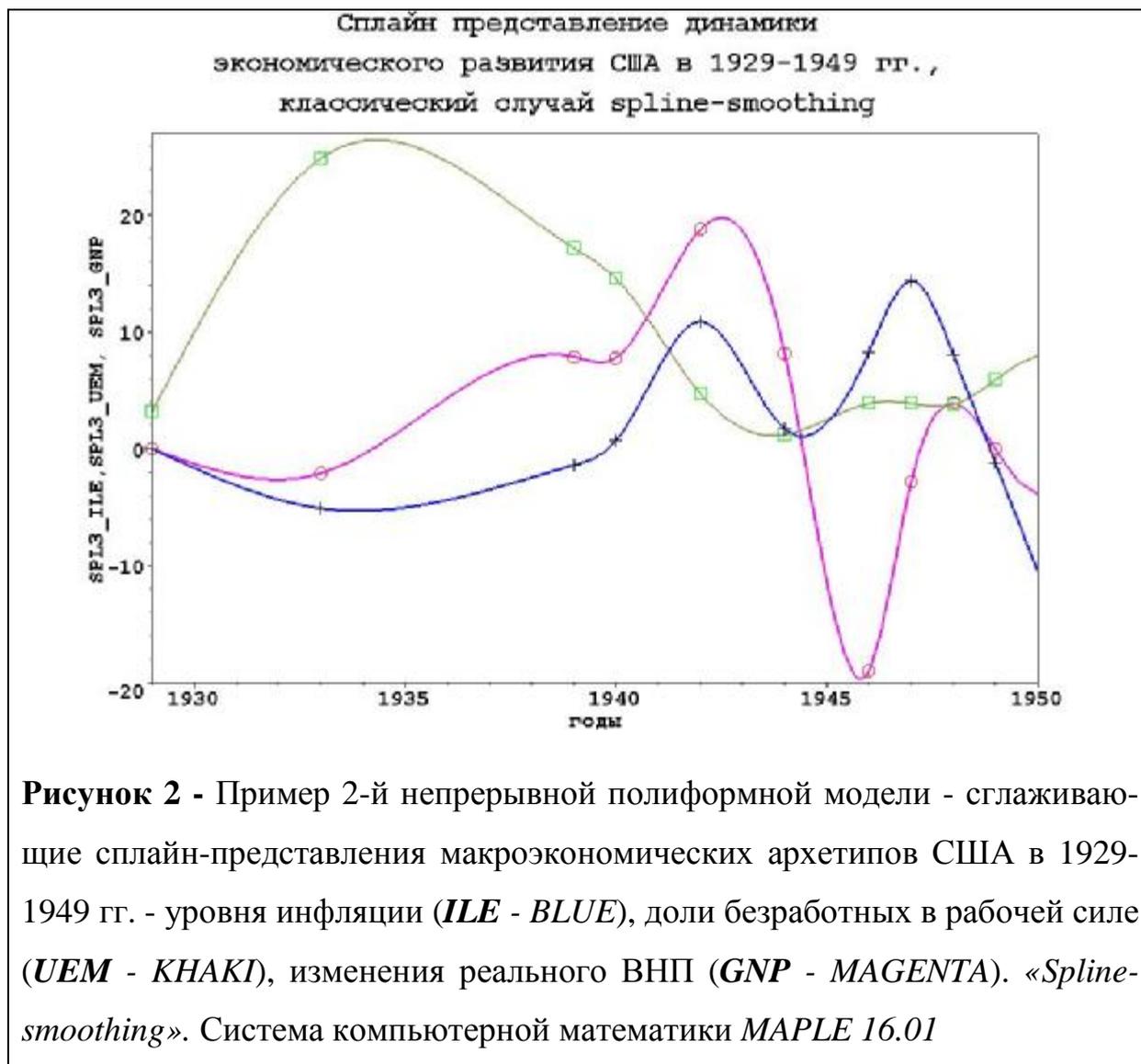
ния классиков [6], которые говорили о «подвижности и гибкости сплайнов». В макроэкономике сплайны действительно универсальны, а графические построения демонстрируют и непрерывность, и «гладкость» моделей.

Первым известным, интересным, важным, хотя и ограниченным применением сплайнов при построении интерполяционной кривой на дискретном множестве точек стало “*spline-smoothing*” или «сплайн-сглаживание». Оно будет «необходимой» ступенью при сплайн-моделировании, сплайн-анализе и сплайн-визуализации макроэкономических показателей, строящаяся непрерывная сплайновая кривая оказывается «гладкой» вместе со всеми своими производными, позиционируется «приятной для глаза». Говорят, что непрерывный аналитический сплайн-ансамбль, состоящий из связанных фрагментов, «развешивается» на «решётчатой» функции, т.е. на дискретном множестве точек «графика» отчётного периода. Теперь в сплайновой модели удаётся находить значение переменной в любой точке оси абсцисс между «узловыми» точками «сетки». Иногда этим пользуются напрямую, если отсутствуют какие-то значения показателя. Появление непрерывной, аналитической зависимости позволяет лучше увидеть и понять суть процесса и его тенденции, использовать сплайны для анализа, визуализации, поиска и вычленения циклов и прогнозирования. Замена «решётки» непрерывной моделью расширяет сферу математического анализа.

Сплайны имеют инвариантную внутреннюю структуру, универсальную неизменную математическую или аналитическую форму, они аналитически единообразны, «куски» сплайна самоподобны (как фракталы), свойство аналитического единообразия, «фракталоподобия» сплайнов и самоподобия их свойств на разных отрезках позволяет представлять их фрагменты экономно и однотипно. Аналитичность «кусочного» сплайна позволяет получать многие решения «в буквах», далее в полной мере используя аналитические возможности систем компьютерной математики.



Кубический сплайн с заданными ординатами Y_j в «узлах» «сетки» D эффективен, всегда существует, он единственен. Сплайн сходится равномерно на интервале $[E, F]$, обладая «сходимостью по норме», сходится быстро. Сплайновые построения характеризуются простотой вычислений, это объясняется тем, что при равномерной «сетке» D обратные матрицы для коэффициентов системы принимают относительно простую форму.



Обратим внимание на важное свойство, которым обладает кубический сплайн – свойство «внутренней оптимальности». Популярность и всеобщая распространённость кубических сплайнов заключается в этом свойстве, описываемом и доказываемом теоремой Холлидея:

$$\int_E^F |S''_{\Delta}(Y; X)_N|^2 dx \leq \int_E^F |S''_{\Delta}(Y; X)_P|^2 dx$$

Именно оно называется первым интегральным соотношением, свойством «наилучшего приближения», кривизны или «минимальности нормы», соответствующая минимуму потенциальной энергии, затраченной на отклонение балки в «механических сплайнах». К сожалению, оно справедливо только

для кубических сплайнов $SPL3(Y;X) \approx f(X)$. Поэтому графически сплайн соединяет точки «решётчатой» функции линиями с минимальной кривизной.

Привычная сфера действия сплайн-аппроксимационного аппарата может быть расширена на совершенно новую для него область – периодических изменений макроэкономической конъюнктуры. Внутри сплайновой парадигмы, при общем универсализме сплайновых моделей, удаётся найти ещё одну область приложения – сплайн-аппроксимация периодических процессов. Постоянная часть и линейное слагаемое сплайна моделируют тренд, а знакопеременные последовательно следующие «моменты» сплайна своими квадратичными и кубическими параболическими слагаемыми на перемежающихся участках моделируют «горбы» и «впадины» периодического (сезонного или циклического) процесса. Периодическое макроэкономическое поведение впервые достаточно точно удаётся моделировать степенными «кусочными» многочленами малого порядка, заменяя ими громоздкие гармонические аппроксимирующие многочлены (ряды Фурье). Трудно понимаемая и реализуемая экономистами «стыковка» решений на границах временных фрагментов «рваных» нестационарных макроэкономических уравнений сложной структуры с трендовым, сезонным, циклическим поведением, стохастическим остатком и событийными составляющими динамики автоматически реализуется единой сплайн-методологией.

Сплайн-подход обогащает «старую» эконометрику, в которой регрессионные построения на «решётчатых» функциях ограничивали выбор критериев согласия и вынуждали использовать лишь метод наименьших квадратов. После замены «решётчатого» исходного макроэкономического представления сплайн-функциями в «новой» эконометрике появилось разнообразие критериев сравнения (точное совпадение, чебышёвский критерий). Удалось обнаружить новые возможности анализа многозначных функций, анализировать на фазовых и параметрических портретах основные и побочные ветви эконометрических зависимостей. Фазовые парамет-

рические кривые удобно графически складывать, умножать, делить.

Принципиальное отличие сплайн-подходов от классических эконометрических состоит и в том, что в «старой» эконометрике регрессионные построения теряют значение времени, при которой они получены. Отсутствие временных реперов ограничивает принципиальные возможности, качество и точность исследований во времени. Аппроксимационные сплайн-построения сохраняют время каждого дискретного отсчёта, это калибрует во времени поведение экономических переменных, позволяет обнаруживать и выделять циклы с хроноскопией их основы и ветвей, увеличивает точность последующего перехода к временному планированию и прогнозированию. Временные параметры кривых на фазовых портретах легко просчитываются по поставленным временным реперам, облегчая в «новой» эконометрике переход к построению более точных моделей [7].

Стало возможным получение эконометрических законов и прогнозов прямо на аналитических и графических образах фазовых портретов и параметрических картин. Сплайновая технология позволяет выявить необходимые для «новой» эконометрики аналитические и графические представления регрессионных соотношений на конечных временных отрезках.

Сплайны можно символично (аналитически) складывать, умножать, дифференцировать и интегрировать, аналитически находить формулы для всех производных в отчётном и перспективном горизонтах, что составляет «достаточные» условия для аналитического сплайн-анализа, построения фазовых портретов, вычленения циклов, последующего аналитического прогнозирования. Наибольший эффект использования «буквенных», символьных или аналитических свойств сплайнов достигается при:

- обращении к аналитическому математическому представлению и обработке макроэкономического сигнала, при построении сплайновых полиформных моделей, в непрерывном анализе - к вычислению «наклонов» и «моментов» сплайна, производных, точек перегиба, возврата, экстремумов;

- использовании аналитических зависимостей для визуализации результатов, при построении векторных полей, гладких двух- и трёхмерных кривых, в последнем случае третьей координатой часто выступает время;
- прогнозировании экономических показателей за пределами отчётного периода - в горизонте прогноза - по параметрам, аналитически и графически найденным в отчётном периоде и «опирающимся» на «решётку».

Известно, что в дискретных операциях (в «первой» полиформной модели, в частности) существует проблема величины шага по оси абсцисс, он должен быть мал для удовлетворительной точности аппроксимационных замен. Поскольку сплайн оперирует с существенно большими по длине непрерывными фрагментами, то проблема минимизации величины шага h_j «сетки» D для непрерывных сплайн-построений значительно смягчается.

Для сплайн-функций нет ограничений при аппроксимации, моделировании, анализе, поиске циклов, визуализации и прогнозировании как периодических, так и непериодических макроэкономических процессов – в теории сплайнов существуют периодические $SPL_D(Y;X)_P$ и непериодические сплайны $SPL_D(Y;X)_N$, известно [6], что в общем случае точность аппроксимации непериодическим сплайном выше, чем периодическим.

Сплайн $SPL_D(Y;X)$ линейно зависит от своих значений в «узлах» «сетки» D и от значений своих производных в краевых точках $E = X_1$ и $F = X_N$. Поэтому в экономических приложениях сплайнов столь широко и повсеместно можно использовать свойство аддитивности. Например, запись

$$SPL(H+G;X) = SPL(H;X) + SPL(G;X)$$

означает, что если имеются два макроэкономических показателя H и G со своими сплайн-представлениями на интервалах одной и той же «сетки», то возможно единое сплайн-представление их суммы и наоборот.

Сплайн-построения отличаются конструктивностью, т.е. возможно-

стью доведения теории до реальных паспортных характеристик с явным выделением важных аналитических, графических, численных легко оцениваемых показателей. Решение при этом получается быстро и точно, не требуя от экономиста никаких дополнительных представлений, преобразований, допущений, ограничений, размышлений и т.п.

Сплайн проходит точно через все узлы «решётчатой» функции, экономическое сплайн-моделирование, сплайн-анализ, сплайн-визуализация, сплайн-прогнозирование точны принципиально, «в большом», они «тоньше» определяют и сохраняют спектральный состав процесса, улучшают интерполяцию, надёжнее накапливают и сохраняют его статистику.

Экономисты-практики требуют, чтобы математический конструкт до использования ими был исследован и применён математиками, при всех преобразованиях это гарантирует правильность и надёжность результатов. Положение это используется, сплайны известны со времён Л. Эйлера, а теория сплайнов, как математическая теория, – с 1949 года [8]. С тех пор сплайны широко используются в науке, в математических исследованиях, научных и технических приложениях, а теперь и в экономике.

Математическая постановка задач, моделирование, анализ поведения, визуализация и прогнозирование макроэкономической конъюнктуры должны в наибольшей степени использовать системы компьютерной математики, реализованные на персональных компьютерах со средними характеристиками. Стало уже расхожим утверждение, что без обращения к универсальным математическим пакетам невозможно выполнение никакого серьёзного экономического исследования, компьютерные технологии позволяют исследовать сложные явления и процессы в режиме визуального диалога, как бы «на экране монитора». Важной составляющей любого экономического исследования должно стать привлечение аналитических возможностей, сопровождающихся двух- и трёхмерной графикой, что составляет теперь неотъемлемую часть всех компьютерных построений.

В стохастических системах при поиске и выделении циклов исследователь сталкивается с проблемой так называемой «ложной цикличности» или «эффектом Слуцкого-Юла». «Эффект Слуцкого-Юла» выявляется при применении операций «скользящего усреднения», когда случайные величины выстраиваются во временные ряды с «ложной периодичностью» последних разрядов. Было показано, что поскольку кубический сплайн обладает свойством «минимальности нормы» («минимальности кривизны»), то он проходит между любой парой точек по линии минимальной кривизны без образования паразитных «складок», типичных для аппроксимации степенными полиномами высоких порядков, в фазовом же пространстве эти «складки» между узлами превращаются в паразитные циклы [9].

Поставим аналитику сплайн-моделей макроэкономики на службу новым идеям эконофизики. Поскольку сплайн-функции аналитичны, то вместе с переменной $S(t)$ мы всегда имеем в модели аналитически, графически и численно её три производные – dS/dt , d^2S/dt^2 , d^3S/dt^3 . В механике $M \cdot dS/dt$ есть импульс, где M – масса, S – перемещение. В экономике M – стоимость конкретного экономического акта, S – экономический показатель или его модельная функция. Поскольку закон сохранения импульса – всеобщий принцип природы, то экономические балансы с импульсами становятся не только количественными, но и голономными, подчиняющимися строгим и даже абсолютным законам сохранения «экономических импульсов».

Ещё лучше обстоит дело со второй производной $F=M \cdot d^2S/dt^2$. В физике, и, будем надеяться, в экономике, – это сила. Явно имея d^2S/dt^2 из уравнения сплайна и варьируя M – стоимостью экономических актов на временных отрезках, получаем изменение «экономической силы» во времени. «Экономическая» сила, действуя даже на коротком участке, определяет долгий тренд экономического движения $S(t)$. Взаимодействие «экономических сил» также просчитывается по абсолютным законам сохранения.

Теперь приходит черёд достаточно простых формул с квадратом

первой производной $E = M/2 \cdot (dS/dt)^2$ – это кинетическая энергия. Прелесть формулы в том, что законы сохранения энергии являются мировыми и абсолютными законами, и экономика, если она наука, будет вынуждена использовать их, найдя им полезные применения. Повсеместное использование в макроэкономике этих понятий позволит ввести в эконометрические соотношения и балансы голономные связи, рельефнее выявить существо глубинных экономических процессов, зачастую скрытых и неявных, получать точные результаты в экономическом анализе и прогнозировании.

Архетипом при выделении событийных составляющих динамики в макроэкономике России, на которую действуют «экономические силы», возьмём динамику цен на бензин. Вариация цен нефтепродуктов приводит к непростым макроэкономическим последствиям, увеличение цен ведёт к увеличению транспортных расходов, возрастанию издержек производства товаров и услуг, важных для российской экономики. Цены на бензин в значительной мере характеризуют сиюминутное или чуть запаздывающее состояние экономики, выступая как некий её индикатор или «градусник».

Исследовался временной ряд случайных ежедневных выборок цен на бензин А-92 (руб./литр) по сотням заправочных станций многих нефтяных компаний Южного федерального округа. Изучались цены за 11 лет (интервал 1995-2005 гг.), включавший «дефолтные» 1998-1999 годы. Они и стали эталоном выделения событийных составляющих из классической статистической динамики. На рис. 3 «большой дефолт» 1998-1999 гг. чётко просматривается по максимуму коэффициента вариации (0.4), меньшие структурные скачки (кризисы) видны в 1996 г., конце 2002 и 2004 гг. (коэффициент вариации 0.15). В литературе встретилось упоминание о кризисе российского фондового рынка в мае 2006 г. О 2008 годе экономисты говорят, что это был год инфляционного шока вкупе с девальвационным, спадом промышленного производства, дефицитом бюджета, падением покупательной способности населения. Найденная повторяемость максимумов

определяет период колебаний российской макроэкономики – 2.5 года.

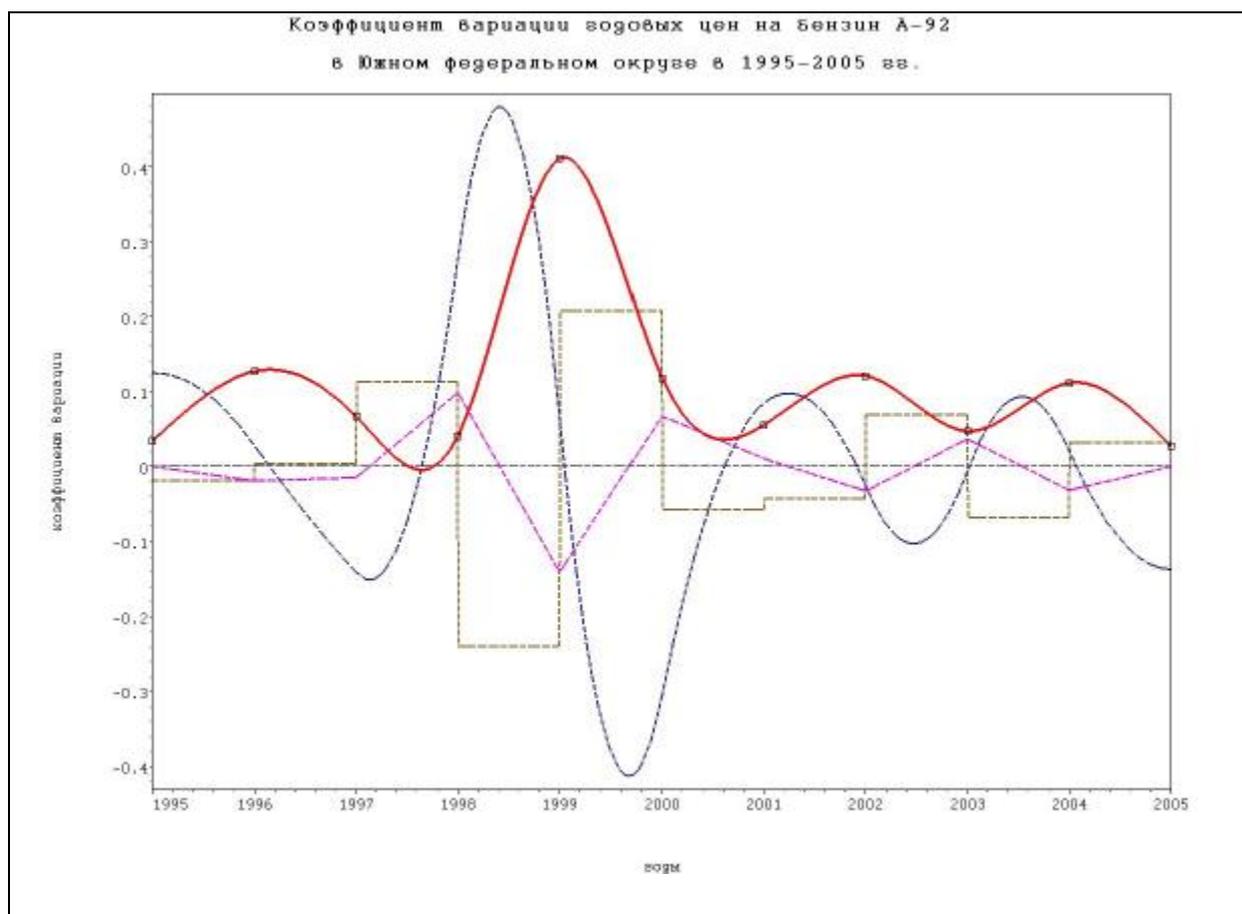


Рисунок 3 - Коэффициент вариации годовых цен на бензин (*RED*), его первая производная и «экономический импульс» (гладкий пунктир - *NAVY*), вторая производная и «экономическая сила» («треугольный» пунктир - *MAGENTA*), третья производная («прямоугольный» пунктир, *SIENNA*). Сплайны. Система компьютерной математики *MAPLE 16.01*

На рис. 3, как всегда, первая производная опережает саму функцию. Максимум первой производной (и импульса) коэффициента вариации приходится на апрель 1998 г., уже тогда российские системные аналитики могли предсказать время и величину «большого дефолта». Первая, третья и четвёртая событийные составляющие оказываются равными по амплитуде. Коэффициент вариации (отношение стандарта $S(X)$ к математическому ожиданию $M(X)$), выделяет из статистического фона событийные экономические составляющие и характеризует их относительный вклад.

Простота получения и преобразования сплайнов, надёжность и ско-

рость работы алгоритма сплайн-аппроксимации, многомерные возможности и наглядность сплайн-визуализации дают в руки менеджера понятное, практическое орудие мониторинга, моделирования, анализа, поиска циклов и визуализации рыночных процессов. Малая степень фрагментов сплайна и его производных облегчают экономическую интерпретацию, хорошо соотносится с тем, как экономист понимает и управляет экономическим поведением. Менеджерам легче расшифровать экономический смысл фазовых сплайн-образов, привлечь для исследования динамики экономики аналитический математический аппарат, строить «круговые» циклы, находить крутизну участков подъёма и спада показателя, точки экстремума, точки перехода через ноль и точки возврата, строить и анализировать фазовые портреты и параметрические картины взаимозависимостей, генерировать эконометрические законы и прогнозы.

Список литературы:

1. Боташева Ф.Б. Современный инструментарий в исследовании макроэкономической динамики. 1 – Структура сигнала // Научный журнал КубГАУ [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, № 7 (81) 2012 года. Режим доступа <http://ej.kubagro.ru/2011/1/pdf/06.pdf>. Идентификационный номер ИНФОРМРЕГИСТРА 0421100012/0013.
2. Винтизенко И.Г., Черкасов А.А. Типажи переменных современной экономики, отягощённых рисками // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 5: Экономика. – 2010. - № 3. – С. 156-162.
3. Бурлачков В.В. Экономическая наука и эконофизика. Экономический портал institutionis.com/general/266-2008-06-18-13-45-41.html.
4. Кулова З.К. Полиформные модели российской макроэкономической динамики. Дисс... канд. экон. наук, 2010, 186 с.
5. Винтизенко И.Г., Яковенко В.С. Экономическая цикломатика. М.: Финансы и статистика, 2008. 428 с.
6. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и её приложения. М.: Издательство «Мир», 1972. 318 с.
7. Бруснева И.М., Винтизенко И.Г., Чадранцев А.В. Фазовые методы анализа и прогнозирования экономической динамики // Финансово-актуарная математика и смежные вопросы – ФАМ'2005: труды IV Всероссийской конференции. – Красноярск: Издательство Института вычислительного моделирования СО РАН, 2005. – С. 68-72.
8. Schoenberg I.J., Whitney A. *Sur la positivite des determinants de translations de fonctions de frequence de Polya avec une application au probleme d'interpolation par les fonctions "spline"* // *Comptes Rendus*. 1949. Volume 228. P. 1996-1998.

9 Ильясов Р.Х. Сплайн-технологии моделирования, анализа и прогнозирования динамики экономических процессов при наличии сезонности // Сборник научных трудов «Актуальные вопросы современной науки». Выпуск 3 «Актуальные вопросы экономики», 2008. С. 379-390.