УДК 517.929.7

UDC 517.929.7

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ И ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

APPLICATION OF THE FOURIER METHOD FOR THE INVESTIGATION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE EQUATION WITH DEVIATING ARGUMENTS AND THE LAPLACE OPERATOR IN THE MAIN PART

Лесев Вадим Николаевич
к.ф.-м.н., доцент

Бжеумихова Оксана Игоревна
аспирант
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик, Россия

Lesev Vadim Nikolaevich
Cand.Phys.-Math.Sci., associate professor

Bzheumihova Oksana Igorevna
postgraduate student
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekova, Nalchik, Russia

В работе исследована первая краевая задача для уравнения в частных производных второго порядка с отклоняющимся аргументом. Вопрос разрешимости задачи в требуемом классе функций редуцирован к разрешимости соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом

The article investigates the first boundary problem for the partial differential equations of the second order with deviating argument. The method of separation of variables is used to prove the solubility of the boundary problem in the desired class of functions

Ключевые слова: КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, УРАВНЕНИЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ОТКЛОНЯЮЩИЙСЯ АРГУМЕНТ, МЕТОД ФУРЬЕ

Keywords: BOUNDARY VALUE PROBLEM, PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, DEVIATING ARGUMENT, FOURIER METHOD.

Введение

Современные технологии, основанные на математическом моделировании с одной стороны, и успехи фундаментальной науки с другой, приводят к необходимости постановки и исследования новых краевых задач для различных классов дифференциальных уравнений. Немалый интерес как у отечественных, так и зарубежных авторов [1-5] вызывают задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Основополагающие результаты в теории этих уравнений были получены в середине прошлого столетия Р. Беллманом [6], В.И. Зубовым [7], С.Б. Норкиным [8], Л.Э. Эльсгольцем [9]. Но, несмотря на достигнутые успехи в данной теории, возникают новые потребности (продиктованные современными производственными технологиями [10-12]) в проведении исследований еще в большей степени приближенных к процессам, протекающим на практике, т.е. в изучении многомерных случаев, а, следовательно, уравнений с частными производными. Именно это делает актуальными исследования, представленные настоящей работой, основной целью которой является исследование вопроса разрешимости первой краевой задачи для модельного уравнения в частных производных с отклоняющимся аргументом.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega = \{(x,t) | -x_0 < x < x_0,\ 0 < t < t_0\}$ – односвязная область евклидовой плоскости R^2 точек (x,t).

В области Ω рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx}(x,t) + u_{tt}(x,t) + u(-x,t) = 0\,. \qquad (1)$$

Пусть $\Omega^- = \Omega \cap (x<0)$, $\Omega^+ = \Omega \cap (x>0)$.

Для уравнения (1) исследована следующая задача:

Задача А. Найти регулярное в области $\Omega^- \cup \Omega^+$ решение $u(x,t)$ уравнения (1) из класса $C_{x,t}^{4,2}\left(\overline{\Omega} \setminus (x=0)\right)$, удовлетворяющее условиям

$$u(-x_0,t) = \varphi_1(t),\ u(x_0,t) = \varphi_2(t),\ u(x,0) = \varphi_3(x),\ u(x,t_0) = \varphi_4(x), \qquad (2)$$

где $\varphi_i \ (i = \overline{1,4})$ – заданные, достаточно гладкие функции, причем $\varphi_1(0) = \varphi_3(-x_0)$, $\varphi_2(0) = \varphi_3(x_0)$, $\varphi_1(t_0) = \varphi_4(-x_0)$, $\varphi_2(t_0) = \varphi_4(x_0)$.

2. Доказательство существования и единственности задачи

Разобьем задачу (1), (2) на две вспомогательные в области Ω:

$$Lu_1 \equiv 0\,, \qquad (3)$$

$$u_1(-x_0,t) = 0\,,\ u_1(x_0,t) = 0\,, \qquad (4)$$

$$u_1(x,0) = \varphi_3(x),\ u_1(x,t_0) = \varphi_4(x), \qquad (5)$$

$$Lu_2 \equiv 0, \tag{6}$$

$$u_2(x,0) = 0,\ u_2(x,t_0) = 0, \tag{7}$$

$$u_2(-x_0,t) = j_1(t),\ u_2(x_0,t) = j_2(t), \tag{8}$$

где $u_1 + u_2 = u$.

Для задачи (1), (2) справедлива следующая теорема:

Теорема 1. Пусть

1) $j_1(t), j_2(t) \in C^4[0,t_0]$, $j_3(x), j_4(x) \in C^4[-x_0,x_0]$, где $x_0 \in \left(0, \dfrac{p}{2\sqrt{2}}\right)$, $t_0(0,p)$;

2) $j_1^{(k)}(0) = j_1^{(k)}(t_0)$, $j_2^{(k)}(0) = j_2^{(k)}(t_0)$, $j_3^{(k)}(-x_0) = j_3^{(k)}(x_0)$, $j_4^{(k)}(-x_0) =$ $= j_4^{(k)}(x_0)$, $k = \overline{0,4}$;

3) $\int\limits_0^{x_0} j_3(x)\,dx = 0$, $\int\limits_0^{x_0} j_4(x)\,dx = 0$,

тогда задача (1), (2) разрешима в требуемом классе функций.

Для доказательства теоремы 1 применим метод Фурье [13], т. е. решение уравнения (3) удовлетворяющее условиям (4) и (5) будем искать в виде

$$u_1 = X_1(x) \cdot T_1(t). \tag{9}$$

Подставляя (9) в (3) и опуская нижние индексы, получим

$$\frac{X''(x) + X(-x)}{X(x)} = -\frac{T''(t)}{T(t)} = -l,$$

где $l = const$.

Отсюда, с учетом (4) будем иметь

$$X''(x) + X(-x) + lX(x) = 0, \tag{10}$$

$$X(-x_0) = X(x_0) = 0, \tag{11}$$

$$T''(t) - lT(t) = 0, \tag{12}$$

$$T(0) = T(t_0) = 0. \tag{13}$$

Исследуем задачу Штурма-Лиувилля (10), (11). Дважды дифференцируя (10), приходим к соотношению:

$$X^{IV}(x)+X''(-x)+lX''(x)=0. \qquad (14)$$

С другой стороны из (10) имеем:

$$X''(-x)=-X(x)-lX(-x),\ X(-x)=-X''(x)-lX(x). \qquad (15)$$

На основании (14) и принимая во внимание (15), получим

$$X^{IV}(x)+2lX''(x)+\left(l^2-1\right)X(x)=0, \qquad (16)$$

Характеристическое уравнение соответствующее (16), будет иметь вид:

$$r^4+2l\,r^2+l^2-1=0.$$

Разрешая биквадратное уравнение, находим $r_1=\sqrt{1-l}$, $r_2=-\sqrt{1-l}$, $r_3=\sqrt{-1-l}$, $r_4=-\sqrt{-1-l}$.

Таким образом, общее решение уравнения (16) может быть записано в виде:

$$X(x)=C_1e^{\sqrt{1-l}\,x}+C_2e^{-\sqrt{1-l}\,x}+C_3e^{\sqrt{-1-l}\,x}+C_4e^{-\sqrt{-1-l}\,x}. \qquad (17)$$

Исследуем представление (17) для различных значений l [14].

Случай 1: $l<-1$. В этом случае (17) принимает вид:

$$X(x)=C_1e^{\sqrt{1-l}\,x}+C_2e^{-\sqrt{1-l}\,x}+C_3e^{\sqrt{-1-l}\,x}+C_4e^{-\sqrt{-1-l}\,x}.$$

Подставляя последнее равенство в (10), получим

$$\left(e^{\sqrt{1-l}\,x}+e^{-\sqrt{1-l}\,x}\right)\left(C_1+C_2\right)+\left(e^{\sqrt{-1-l}\,x}-e^{-\sqrt{-1-l}\,x}\right)\left(C_4-C_3\right)=0.$$

Данное соотношение справедливо тогда и только тогда, когда $C_2=-C_1$, $C_4=C_3$. В этом случае (17) примет вид:

$$X(x)=C_1\mathrm{sh}\sqrt{1-l}\,x+C_3\mathrm{ch}\sqrt{-1-l}\,x.$$

Используя условия (11), получим

$$\begin{cases}-C_1\,\mathrm{sh}\sqrt{1-l}\,x_0+C_3\,\mathrm{ch}\sqrt{-1-l}\,x_0=0,\\ C_1\,\mathrm{sh}\sqrt{1-l}\,x_0+C_3\,\mathrm{ch}\sqrt{-1-l}\,x_0=0.\end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = -2\,\mathrm{sh}\sqrt{1-l}\,x_0\,\mathrm{ch}\sqrt{-1-l}\,x_0$$

обращается в ноль только при $l=1$, что противоречит рассматриваемому случаю $l<-1$.

Следовательно, $C_1 = C_3 = 0$. Откуда заключаем, что $X(x) \equiv 0$.

Случай 2: $l=-1$ исследуется аналогично. При таком значении l общее решение (10) имеет вид:

$$X(x) = C_1\,\mathrm{sh}\sqrt{2}x + C_3.$$

Удовлетворяя (11), имеем

$$\begin{cases} -C_1\,\mathrm{sh}\sqrt{2}x_0 + C_3 = 0, \\ C_1\,\mathrm{sh}\sqrt{2}x_0 + C_3 = 0. \end{cases}$$

Т.к. определитель системы

$$\Delta = -2\,\mathrm{sh}\sqrt{2}x_0 \neq 0,$$

то $C_1 = C_3 = 0$ и $X(x) \equiv 0$.

Случай 3: $-1<l<1$. В этом случае удовлетворяя общее решение (10)

$$X(x) = C_1\,\mathrm{sh}\sqrt{1-l}\,x + C_3\cos\sqrt{1+l}\,x.$$

условиям (11), находим

$$\begin{cases} -C_1\,\mathrm{sh}\sqrt{1-l}\,x_0 + C_3\cos\sqrt{1+l}\,x_0 = 0, \\ C_1\,\mathrm{sh}\sqrt{1-l}\,x_0 + C_3\cos\sqrt{1+l}\,x_0 = 0. \end{cases}$$

Определитель системы

$$\Delta = -2\,\mathrm{sh}\sqrt{1-l}\,x_0\cos\sqrt{1+l}\,x_0$$

равен нулю при $l=1$, либо при $l=\left(\dfrac{p+2pn}{2x_0}\right)^2-1$. Следовательно $C_1 = C_3 = 0$ и $X(x) \equiv 0$, т.к. $l \notin (-1,1)$.

Случай 4: $l = 1$. При указанном значении l для всех $x_0 \in \left(0, \frac{p}{2\sqrt{2}}\right)$ (17) принимает вид

$$X(x) = C_2 x + C_3 \cos\sqrt{2}x. \qquad (18)$$

Удовлетворяя (18) граничным условиям (11) получим

$$\begin{cases} -C_2 x_0 + C_3 \cos\sqrt{2}x_0 = 0, \\ C_2 x_0 + C_3 \cos\sqrt{2}x_0 = 0. \end{cases}$$

В силу неравенства

$$\Delta = -2x_0 \cos\sqrt{2}x_0 \neq 0,$$

имеем $C_2 = C_3 = 0$ и $X(x) \equiv 0$.

Случай 5. При $l > 1$ (17) принимает вид:

$$X(x) = C_2 \sin\sqrt{l - 1}x + C_3 \cos\sqrt{l + 1}x.$$

Удовлетворяя полученное выражение для $X(x)$ граничным условиям (11), будем иметь:

$$\begin{cases} -C_2 \sin\sqrt{l - 1}x_0 + C_3 \cos\sqrt{l + 1}x_0 = 0, \\ C_2 \sin\sqrt{l - 1}x_0 + C_3 \cos\sqrt{l + 1}x_0 = 0. \end{cases}$$

Равенство

$$\Delta = -2\sin\sqrt{l - 1}x_0 \cos\sqrt{l + 1}x_0 = 0$$

справедливо при $l_{1n} = \left(\frac{p + 2pn}{2x_0}\right)^2 - 1$, либо при $l_{2n} = \left(\frac{pn}{x_0}\right)^2 + 1$.

Таким образом, задача Штурма-Лиувилля (10), (11) имеет собственные значения $l_{1n} = \left(\frac{p + 2pn}{2x_0}\right)^2 - 1$, $l_{2n} = \left(\frac{pn}{x_0}\right)^2 + 1$ и соответствующие им собственные функции $X_{1n}(x) = C_n \cos\frac{p + 2pn}{2x_0}x$,

$X_{2n}(x)=C_n \sin\frac{pn}{x_0}x$, $(n\in N)$, где C_n – произвольные постоянные, нуждающиеся в определении.

Подставляя найденные собственные значения $l_{1n}=\left(\frac{p+2pn}{2x_0}\right)^2-1$ в (12) приходим к соотношению

$$T''(t)-\left[\left(\frac{p+2pn}{2x_0}\right)^2-1\right]T(t)=0.$$

Общее решение последнего представимо в виде:

$$T_{1n}(t)=a_{1n}\mathrm{ch}\left(t\sqrt{\left(\frac{p+2pn}{2x_0}\right)^2-1}\right)+b_{1n}\mathrm{sh}\left(t\sqrt{\left(\frac{p+2pn}{2x_0}\right)^2-1}\right),$$

где $a_{1n}, b_{1n}=const$.

Следовательно, решение задачи (3) – (5) имеет вид:

$$u_1=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{1n}\mathrm{ch}\left(t\sqrt{\left(\frac{p+2pn}{2x_0}\right)^2-1}\right)+B_{1n}\mathrm{sh}\left(t\sqrt{\left(\frac{p+2pn}{2x_0}\right)^2-1}\right)\right]\times \times\cos\frac{p+2pn}{2x_0}x, \qquad (19)$$

где

$$A_{1n}=\frac{2}{x_0}\int_0^{x_0} j_3(x)\cos\frac{p+2pn}{2x_0}x\,dx,$$

$$B_{1n}=\frac{2\int_0^{x_0}\left[j_4(x)-j_3(x)\mathrm{ch}\left(t_0\sqrt{\left(\frac{p+2pn}{2x_0}\right)^2-1}\right)\right]\cos\frac{p+2pn}{2x_0}x\,dx}{x_0\,\mathrm{sh}\left(t_0\sqrt{\left(\frac{p+2pn}{2x_0}\right)^2-1}\right)}.$$

Для $l_{2n} = \left(\frac{pn}{x_0}\right)^2 + 1$ получим

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{2n}\text{ch}\left(t\sqrt{\left(\frac{pn}{x_0}\right)^2+1}\right) + B_{2n}\text{sh}\left(t\sqrt{\left(\frac{pn}{x_0}\right)^2+1}\right)\right]\sin\frac{pn}{x_0}x, \quad (20)$$

где

$$A_{2n} = \frac{2}{x_0}\int_0^{x_0} j_3(x)\sin\frac{pn}{x_0}x\,dx,$$

$$B_{1n} = \frac{2\int_0^{x_0}\left[j_4(x) - j_3(x)\text{ch}\left(t_0\sqrt{\left(\frac{pn}{x_0}\right)^2+1}\right)\right]\sin\frac{pn}{x_0}x\,dx}{x_0\,\text{sh}\left(t_0\sqrt{\left(\frac{pn}{x_0}\right)^2+1}\right)}.$$

Аналогично исследовав задачу Штурма-Лиувилля (12), (13) получим решение задачи (6) – (8):

$$u_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{3n}\text{sh}\left(x\sqrt{\left(\frac{pn}{t_0}\right)^2+1}\right) + B_{3n}\text{ch}\left(x\sqrt{\left(\frac{pn}{x_0}\right)^2-1}\right)\right]\sin\frac{pn}{t_0}t, \quad (21)$$

где

$$A_{3n} = \frac{\int_0^{x_0}[j_2(t) - j_1(t)]\sin\frac{pn}{x_0}x\,dx}{x_0\text{sh}\left(x_0\sqrt{\left(\frac{pn}{t_0}\right)^2+1}\right)},$$

$$B_{3n} = \frac{\int_0^{x_0}[j_2(t) + j_1(t)]\sin\frac{pn}{x_0}x\,dx}{x_0\text{ch}\left(x_0\sqrt{\left(\frac{pn}{t_0}\right)^2-1}\right)}.$$

На основании условий теоремы 1 заключаем, что ряды (19), (20), (21) сходится равномерно. Так же легко показать равномерную сходимость рядов u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt} и u_{tt}.

Единственность решения задачи А легко может быть установлена в силу тривиальности решения однородной задачи. В самом деле, полагая $j_1(t) = j_2(t) = 0$, $j_3(x) = j_4(x) = 0$, на основании равенств (19), (20), (21) и в силу полноты систем [15]:

$$\left\{\cos\frac{p + 2pn}{2x_0}x\right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{\sin\frac{pn}{x_0}x\right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{\sin\frac{pn}{t_0}t\right\}_{n=1}^{\infty},$$

будем иметь $u(x,t) \equiv 0$. Таким образом, убеждаемся в том, что однородные задачи имеют только тривиальное решение. Откуда и следует единственность решений задач А.

Заключение

Приведенные в работе исследования выполнены для уравнения с отклоняющимся аргументом нейтрального типа, что является характерным для биологических и диффузионных моделей, а полученные теоретические результаты легко могут быть реализованы в современных прикладных пакетах. Исследование же новых задач с нелокальными операторами в краевых условиях могут стать следующим этапом в развитии теории уравнений с отклоняющимся аргументом.

Список литературы

1. Мудров А.В. О связи систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с запаздывающим аргументом// Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. – 2007. – Т.7. № 2. – С. 52-64.
2. Beklaryan L.A. Group Singularities of Differential Equations with Deviating Arguments and Metric Invariants Related to Them// Journal of Mathematical Sciences. 2001. Vol. 105, No. 1. P. 1799-1811.
3. Kitamura Y., Kusano T. Nonlinear Oscillation of Higher Order Functional Differential Equations with Deviating Arguments// J. Math. Anal. Appl. 1980. Vol. 77. P. 100-119.
4. J.-G. Dong. Oscillation of solutions for first order neutral differential equations with distributed deviating arguments// Computers and Mathematics with Applications. 2009. Vol. 58. P. 784-790.
5. Xiong W., Yue G. Almost periodic solutions for a class of fourth-order nonlinear differential equations with a deviating argument// Computers and Mathematics with Applications. 2010. Vol. 60, P. 1184-1190.
6. Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: Изд-во Иностранная литература, 1960. – 400 с.
7. Зубов В.И. К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом // Изв. вузов, сер. мат. – 1958. №6 – С. 86-95.
8. Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1965 – 356 с.
9. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1964. – 128 с.
10. Bzheumikhova O.I., Lesev V.N. On the issue of the relationships of differential equations with distributed deviating arguments and equations with fractional integrals// Сборник научных трудов Sworld по материалам международной научно-практической конференции. 2012. Т. 3. № 2. С. 75-76.
11. Demidenko G. V., Likhoshvai V. A., Mel’nik I. A. On properties of solutions to equations of multistage substance synthesis// J. Anal. Appl. 2010. Vol. 8, No. 1. P. 47-61.
12. Abta A., Kaddar A., Alaoui Talibi H. Global stability for delay SIR and SEIR epidemic models with saturated incidence rates// Electronic Journal of Differential Equations. 2012. Vol. 2012. No. 23. P. 1–13.
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во Наука, 1977. – 735 с.
14. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Изд-во Наукова думка, 1977. – 330 с.
15. Никольский С.М. Курс математического анализа. . – М.: Физматлит, 2001. – 592 с.