УДК 519.1

UDC 519.1

СПЕКТРЫ ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФОВ С ЗАТРАВКАМИ – ЦИКЛАМИ, СОХРАНЯЮЩИХ СМЕЖНОСТЬ СТАРЫХ РЕБЕР

SPECTRA OF PREFRACTAL GRAPHS WITH THE PRIMING CYCLES, KEEPING EDGES OF OLD CONTIGUITY

Байрамукова Зухра Халитовна

Кочкаров Ахмат Магометович
д.ф.-м.н., профессор
Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия, Черкесск, Россия

Bayramukova Zukhra Halitovna

Kochkarov Ahmat Magometovich
Dr.Sci.Phys.-Math., professor
North-Caucasian State Humanitarian Technological Academy, Cherkessk, Russia

Исследуется задача нахождения характеристических многочленов и спектров предфрактальных графов с затравками-циклами, смежность старых ребер которых в траектории не нарушается. Получена рекуррентная формула

The problems of finding of characteristic polynomials and spectra prefractal graphs with the priming cycles are investigated, the contiguity of old edges in the trajectory isn't broken. The recurrent formula is received

Ключевые слова: СПЕКТР ПРЕДФРАКТАЛЬНОГО ГРАФА, ИНВАРИАНТНЫЕ ПО ФОРМЕ МАТРИЦЫ

Keywords: SPECTRA OF PREFRACTAL GRAPHS, INVARIANT FORM MATRIXES

В данной работе впервые рассматривается задача о спектрах предфрактальных [1] графов с затравками – циклами. Необходимость рассмотрения задачи в такой постановке связана с исследованием свойств моделей на предфрактальных графах.

Под спектром графа понимают множество, состоящее из собственных значений матрицы смежности, то есть нулей характеристического многочлена [2].

Термином *затравка* условимся называть какой-либо связный граф $H=(W,Q)$. Для определения *фрактального (предфрактального) графа* [1] нам потребуется операция *замены вершины затравкой* (ЗВЗ). Суть операции ЗВЗ заключается в следующем. В данном графе $G=(V,E)$ у намеченной для замещения вершины $\tilde{v}\in V$ выделяется множество $\tilde{V}=\{\tilde{v}_j\}\subseteq V$, $j=1,2,...,|\tilde{V}|$, смежных ей вершин. Далее из графа G удаляется вершина $\tilde{v}$ и все инцидентные ей ребра. Затем каждая вершина $\tilde{v}_j\in\tilde{V}$, $j=1,2,...,|\tilde{V}|$ соединяется ребром с (одной и той же, если смежность старых ребер сохраняется) вершиной затравки $H=(W,Q)$.

Предфрактальный граф будем обозначать через $G_L = (V_L, E_L)$, где V_L – множество вершин графа, а E_L - множество его ребер. Определим его рекуррентно, поэтапно заменяя каждый раз в построенном на предыдущем этапе $l = 1,2,...,L-1$ графе $G_l = (V_l, E_l)$ каждую его вершину затравкой $H = (W, Q)$. На этапе $l = 1$ предфрактальному графу соответствует затравка $G_1 = H$. Об описанном процессе говорят, что *предфрактальный граф* $G_L = (V_L, E_L)$ *порожден затравкой* $H = (W, Q)$. Процесс порождения предфрактального графа G_L, по существу, есть процесс построения последовательности предфрактальных графов $G_1, G_2, ..., G_L$ называемый *траекторией*. Для предфрактального графа G_L, ребра, появившиеся на l-том, $l \in \{1,2,...,L\}$ этапе порождения, будем называть *ребрами ранга* l. *Новыми* ребрами предфрактального графа G_L назовем ребра ранга L, а все остальные ребра назовем – *старыми*.

Если из предфрактального графа G_L, порожденного n-вершинной затравкой H, последовательно удалить все старые ребра (ребра ранга l, $l = 1,2,...,L-1$), то исходный граф распадется на множество связных компонент $\{B_L^{(1)}\}$, каждая из которых изоморфна [3] затравке H. Множество компонент $\{B_L^{(1)}\}$ будем называть *блоками первого ранга*. Аналогично, при удалении из предфрактального графа G_L всех старых ребер рангов $l = 1,2,...,L-2$, получим множество блоков $\{B_L^{(2)}\}$ *второго ранга*. Обобщая, скажем, что при удалении из предфрактального графа G_L всех ребер рангов $l = 1,2,...,L-r$, получим множество $\{B_L^{(r)}\}$, $r \in \{1,2,...,L-1\}$ *блоков* r*-го ранга*.

Рассмотрим последовательность симметрических матриц $\{A_l\}$ порядка n^l. A_1 – матрица у которой по главной диагонали нули, а остальные элементы нули, либо единицы. A_l – матрица в которой единицам в A_1 соответствуют блоки – единичные матрицы порядка n^{l-1}, нулям – нулевые матрицы того же порядка, за исключением первого в главной диагонали – ему соответствует матрица A_{l-1}. Матрицы последовательности $\{A_l\}$ будем называть *инвариантными по форме*.

Пусть $G_L = (V_L, E_L)$ предфрактальный граф, в котором смежность старых ребер не нарушается. G_1 затравка имеет n вершин. G_2 имеет n^2 вершин, которые пронумеруем следующим образом: в каждом блоке 1-го ранга одна вершина (инцидентная старым ребрам) имеет номер вершины затравки, остальные нумеруем с периодом n. Т.е., если вершина затравки имеет номер k , то в данном блоке еще имеются вершины с номерами $k+n, k+2n, \ldots, k+(n-1)n$. G_l имеет n^l вершин. В каждом блоке 1-го ранга одна из вершин имеет номер, полученный на этапе l*-1*. Остальные нумеруем с периодом n^{l-1}. Таким образом, в каждом блоке 1-го ранга оказывается одна вершина имеющая номер из первых n^{l-1} номеров$(1,2,\ldots,n^{l-1})$, одна имеющая номер из вторых n^{l-1} номеров$(n^{l-1}+1, n^{l-1}+2, \ldots, 2n^{l-1})$, и т.д., и одна вершина имеющая номер из n-х n^{l-1} номеров$((n-1)n^{l-1}+1, (n-1)n^{l-1}+2, \ldots, n^l)$. Если смежным вершинам затравки соответствуют смежные вершины соответствующих $n^{l-1}, (l = 2,3,\ldots)$ номеров в блоках 1-го ранга, то такие предфрактальные графы обладают инвариантностью формы матриц смежностей. Действительно, пусть в G_1 смежны вершины i-тая и j-тая $(i \neq j, 1 \leq i, j \leq n)$. Тогда, в блоке 1-го ранга, содержащем k-тую вершину (k принимает последовательно значения $1,2,\ldots,n^{l-1}$) смежны вершины с номерами $k+(i-1)n^{l-1}$, $k+(j-1)n^{l-1}$. В матрице A_l разбитой на блоки порядка n^{l-1} это отражается в виде единичных матриц расположенных в i-той блочной строке, в j-том блочном столбце и в j- той блочной строке, в i-том блочном столбце.

Матрицы смежностей предфрактальных графов $G_L = (V_L, E_L)$ с n-вершинной затравкой – циклом C_n, смежность старых ребер, в траектории которых не нарушается, инвариантны по форме, так как вершины предфрактального графа с затравкой – циклом можно пронумеровать приведенным выше способом. Выбор различной нумерации приводит к изоморфным графам [3]. Это позволяет получить рекуррентные формулы для определения характеристических многочленов предфрактальных графов различных этапов траектории.

Пусть $G_1 = C_n$. Для определения $P_{C_n}(l) = |lI - A_1|$ применяем алгоритм Гаусса. При вычислении характеристических многочленов графов $G_2, G_3, ..., G_L$, $P_{G_2}(l) = |lI - A_2|, P_{G_3}(l) = |lI - A_3|, \ldots, P_{G_L}(l) = |lI - A_L|$ рассматриваем их как определители блочных матриц и используем (обобщенный) алгоритм Гаусса [4]. Преобразования в том и в другом случаях аналогичные, только в $lI - A_1$ первый элемент главной диагонали l, а в $lI - A_l$ первый блок по главной диагонали – матрица $lI - A_{l-1}$. Поэтому будем вычислять многочлен двух переменных l^* и l, который получается если в $P_{C_n}(l) = |lI - A_1|$ заменить первый элемент главной диагонали матрицы $lI - A_1$ l на l^*. Обозначим его $P_{C_n}(l^*, l)$. Затем в полученный результат вместо l^* подставляем последовательно $lI - A_1$, $lI - A_2, \ldots lI - A_{L-1}$, учитывая при этом особенности операций над блочными матрицами. Таким образом, получаем рекуррентную формулу для определения характеристических многочленов предфрактальных графов последовательных этапов траектории.

Например, в случае, когда затравкой является цикл C_4

$$P_{G_1}(l) = P_{C_4}(\lambda) = \left|\lambda I - A_{C_4}\right| = \begin{vmatrix} \lambda^* & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}, \text{ если } l^* = l$$

и

$P_{G_2}(\lambda)=\left|\lambda I-A_2\right|=\begin{vmatrix}\lambda^* I & -I & 0 & -I\\ -I & \lambda I & -I & 0\\ 0 & -I & \lambda I & -I\\ -I & 0 & -I & \lambda I\end{vmatrix}$, если $l^*=lI-A_1$ (матрица $\lambda I-A_2$ разбита на блоки 4-го порядка) и для произвольного l

$$P_{G_l}(\lambda)=\left|\lambda I-A_l\right|=\begin{vmatrix}\lambda^* I & -I & 0 & -I\\ -I & \lambda I & -I & 0\\ 0 & -I & \lambda I & -I\\ -I & 0 & -I & \lambda I\end{vmatrix}, \text{ если } l^*=lI-A_l$$

(матрица $\lambda I-A_l$ разбита на блоки порядка 4^{l-1}).

Найдем, используя алгоритм Гаусса

$$P_{G_1}(l^*,l)=P_{C_4}(\lambda^*,l)=\begin{vmatrix}l^* & -1 & 0 & -1\\ -1 & l & -1 & 0\\ 0 & -1 & l & -1\\ -1 & 0 & -1 & l\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1 & l & -1 & 0\\ 0 & -1 & l & -1\\ -1 & 0 & -1 & l\\ l^* & -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}l & -1 & 0 & -1\\ -1 & l & -1 & 0\\ 0 & -1 & l & -1\\ -1 & 0 & -1 & l^*\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1 & l & -1 & 0\\ 0 & -1 & l & -1\\ -1 & 0 & -1 & l^*\\ l & -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1 & l & -1 & 0\\ 0 & -1 & l & -1\\ 0 & -l & 0 & l^*\\ 0 & l^2-1 & -l & -1\end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix}-1 & l & -1 & 0\\ 0 & -1 & l & -1\\ 0 & 0 & -l^2 & l^*+l\\ 0 & 0 & l\left(l^2-1\right)-l & -\left(l^2-1\right)-1\end{vmatrix}=-\left[l^4-l\left(l^2-2\right)\left(l^*+l\right)\right]=l\left[\left(l^2-2\right)l^*-2l\right]$$

Таким образом

$$P_{C_4}(\lambda)=\lambda\left[\left(\lambda^2-2\right)\lambda^*-2\lambda\right]=\lambda^2(\lambda-2)(\lambda+2)$$

Выполним аналогичные преобразования, используя (обобщенный) алгоритм Гаусса для определения многочлена

$$P_{G_2}\left(\lambda^*, l\right) = \begin{vmatrix} \lambda^* I & -I & 0 & -I \\ -I & \lambda I & -I & 0 \\ 0 & -I & \lambda I & -I \\ -I & 0 & -I & \lambda I \end{vmatrix}.$$

Переставим блочные строки и столбцы как в предыдущем случае, при этом знак определителя не будет изменяться, так как матрица разбита на блоки 4-го – четного порядка

$$P_{G_2}\left(\lambda^*, l\right) = \begin{vmatrix} -I & lI & -I & 0 \\ 0 & -I & lI & -I \\ \text{-I} & 0 & -I & l^* I \\ -lI & \text{-I} & 0 & -I \end{vmatrix}.$$

По (обобщенному) алгоритму Гаусса прибавление к блочной строке другой, умноженной на число не меняет определителя. После преобразований получаем

$$P_{G_2}\left(l^*, l\right) = \begin{vmatrix} -I & lI & -I & 0 \\ 0 & -I & lI & -I \\ 0 & 0 & -l^2 I & \left(l^* + l\right) I \\ 0 & 0 & l\left(l^2 - 2\right) I & -l^2 I \end{vmatrix} = l^4 \left| \left(l^2 - 2\right) l^* I - 2 l I \right|.$$

Подставляя, вместо l^* матрицу $lI - A_1$, получаем

$$P_{G_2}(\lambda) = \lambda^4 \left| \left(\lambda^2 - 2\right)\left(\lambda I - A_{C_4}\right) - 2 l I \right| = \lambda^4 \left(\lambda^2 - 2\right)^4 \left| \frac{\lambda^3 - 4\lambda}{\lambda^2 - 2} I - A_{C_4} \right| =$$
$$= \lambda^4 \left(\lambda^2 - 2\right)^4 P_{C_4}\left(\frac{\lambda^3 - 4\lambda}{\lambda^2 - 2}\right).$$

Спектр графа G_2 будем находить из уравнения $P_{G_2}(l) = 0$.

$$P_{G_2}(\lambda) = \lambda^4 \left(\lambda^2 - 2\right)^4 P_{C_4}\left(\frac{\lambda^3 - 4\lambda}{\lambda^2 - 2}\right) = l^4 \left(l^2 - 2\right)^4 \left(\frac{\lambda^3 - 4\lambda}{\lambda^2 - 2}\right)^2 \left(\frac{\lambda^3 - 4\lambda}{\lambda^2 - 2} - 2\right)\left(\frac{\lambda^3 - 4\lambda}{\lambda^2 - 2} + 2\right) =$$
$$= l^6 \left(l^2 - 4\right)^2 \left(\lambda^3 - 2 l^2 - 4\lambda + 4\right)\left(\lambda^3 + 2 l^2 - 4\lambda - 4\right) = 0.$$

Повторяя рассуждения для произвольного *l*, имеем $P_{G_l}\left(l^*, l\right) = l^{4^{l-1}}\left|\left(l^2-2\right)l^* I - 2lI\right|$.

Степень 1-го множителя изменилась, так как в определителе l выносится из блочной строки. После замены l^* на $lI - A_{l-1}$ получаем

$$P_{G_l}(l) = l^{4^{l-1}}\left(l^2-2\right)^{4^{l-1}} P_{G_{l-1}}\left(\frac{l^3-4l}{l^2-2}\right).$$

Аналогично можно получить рекуррентные формулы для определения $P_{G_l}(\lambda)$, когда затравки – простые циклы C_n. Для этого выведем формулы многочленов $P_{C_n}\left(\lambda^*, l\right)$.

$$P_{C_n}\left(l^\bullet, l\right) = \begin{vmatrix} l^* & -1 & 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 & 0 & -1 \\ -1 & l & -1 & 0 & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & l & -1 & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & -1 & l & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 & -1 & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l & -1 & 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 & 0 & -1 \\ -1 & l & -1 & 0 & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & l & -1 & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & -1 & l & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 & -1 & l^* \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} -1 & l & -1 & 0 & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & l & -1 & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & l & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & -1 & l & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 & -1 & l^* \\ l & -1 & 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} -1 & l & -1 & 0 & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & l & -1 & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & l & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & -1 & l & -1 \\ \Delta_0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 & -1 & l^* \\ -\Delta_1 & \Delta_0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Здесь $\Delta_0 = -1, \Delta_1 = -l$. Обозначим $\Delta_k = l\Delta_{k-1} - \Delta_{k-2}$. Приведем определитель к треугольному виду по алгоритму Гаусса. На первом шаге получим нули в первом столбце, начиная со второго элемента. Для этого вычтем первую строку из *n-1*-ой строки, а к *n*-ой строке прибавим, умножив на l :

$$P_{C_n}\left(l^{\bullet}, l\right) = (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} -1 & l & -1 & 0 & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & l & -1 & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & l & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & -1 & l & -1 \\ 0 & -l & 1 & 0 & \mathbf{L} & 0 & -1 & l^{*} \\ 0 & l^2-1 & -l & 0 & \mathbf{L} & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} -1 & l & -1 & 0 & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & l & -1 & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & l & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & -1 & l & -1 \\ 0 & \Delta_1 & -\Delta_0 & 0 & \mathbf{L} & 0 & -1 & l^{*} \\ 0 & -\Delta_2 & \Delta_1 & 0 & \mathbf{L} & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

На втором шаге получаем нули во втором столбце, начиная со второго элемента: вторую строку умножаем на второй элемент *n-1*-ой строки и прибавляем к *n-1*-ой, вторую строку умножаем на второй элемент *n*-ой строки и прибавляем к *n*-ой.

$$P_{C_n}\left(l^{\bullet}, l\right) = (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} -1 & l & -1 & 0 & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & l & -1 & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & l & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & -1 & l & -1 \\ 0 & 0 & \Delta_2 & -\Delta_1 & \mathbf{L} & 0 & -1 & l^{*} \\ 0 & 0 & -\Delta_3 & \Delta_2 & \mathbf{L} & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Можно заметить, что на *m*-том шаге *m*-тую строку умножаем на *m*-тые элементы предпоследней и последней и прибавляем, соответственно, к этим строкам $\left(m = \overline{1, n-2}\right)$. После выполнения *n*-2 шагов получаем

$$P_{C_n}\left(l^{\bullet}, l\right)=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} -1 & l & -1 & 0 & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & l & -1 & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & l & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & -1 & l & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 & \Delta_{n-2}-1 & -\Delta_{n-3}+l^{*} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 & -\Delta_{n-1} & \Delta_{n-2}-1 \end{vmatrix}.$$

Т.е., формула для определения характеристического многочлена затравки – простого цикла C_n имеет вид $\left(\lambda^{*}=\lambda\right)$

$$P_{C_n}\left(\lambda^{*}, l\right)=\left|\lambda I-A_1\right|=-\left(\left(\Delta_{n-2}-1\right)^2+\Delta_{n-1}\left(\lambda^{*}-\Delta_{n-3}\right)\right)=$$
$$=-\Delta_{n-1}\lambda^{*}-\left(\Delta_{n-2}-1\right)^2+\Delta_{n-1}\Delta_{n-3}.$$

Подставляя вместо l^{*} матрицу $lI-A_{l-1}$, получаем следующую теорему.

Теорема. Характеристические многочлены предфрактальных графов с затравками-циклами C_n, смежность старых ребер в которых не нарушается, определяются по рекуррентной формуле

$$P_{G_l}(\lambda)=(-1)^{n+1}\left|-\Delta_{n-1}\left(\lambda I-A_{G_{l-1}}\right)+\Delta_{n-1}\Delta_{n-3}I-\left(\Delta_{n-1}-1\right)^2 I\right|=$$
$$=(-1)^{n+1}\left|\frac{-\Delta_{n-1}\lambda+\Delta_{n-1}\Delta_{n-3}-\left(\Delta_{n-2}-1\right)^2}{-\Delta_{n-1}}I-A_{G_{l-1}}\right|\left(-\Delta_{n-1}\right)^{n^{l-1}}=$$
$$=(-1)^{n+1}\left(-\Delta_{n-1}\right)^{n^{l-1}}P_{G_{l-1}}\left(\frac{-\Delta_{n-1}\lambda+\Delta_{n-1}\Delta_{n-3}-\left(\Delta_{n-2}-1\right)^2}{-\Delta_{n-1}}\right).$$

Множитель $(-1)^{n+1}$ появился из-за того, что при перестановке блочных строк (столбцов) состоящих из матриц четного порядка знак определителя не меняется.

Преимущество этих формул также и в том, что нахождение собственных значений (спектра) предфрактального графа с n^l вершинами сводится к решению алгебраических уравнений степени не выше n. Это следует из того, что собственные значения симметрической матрицы действительны [2].

Список литературы:

1. Кочкаров А.М. Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. - Нижний Архыз: РАН САО.1998. 170 с.
2. Цветкович Д., Дуб М., Захс Х. Спектры графов теория и применение. Наукова Думка. Киев.1984. 384 с.
3. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов.-М.:Наука,1990. 384 с.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.