УДК 517.518

UDC 517.518

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ВОЗМУЩЕННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

RESEARCHING OF COMPLETE OBSERVABILITY OF TIME – VARYING PERTURBED DYNAMICAL SYSTEM

Фам Туан Кыонг
аспирант
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Pham Tuan Cuong
postgraduate student
Voronezh State University, Voronezh, Russia

Статья посвящена исследованию полной наблюдаемости нестационарной возмущенной дифференциально-алгебраической системы. Применяется метод каскадного расщепления исходных пространств на подпространства. Выводится формула для нахождения вектора состояний системы. Устанавливается связь между входной и выходной функциями

The article is devoted to the researching of complete observability of time-varying perturbed differential-algebraic system. The method of cascade splitting of the original space to the subspace is used. The formula for finding the state vector is derived. The relations between input and output functions are obtained

Ключевые слова: НЕСТАЦИОНАРНАЯ ВОЗМУЩЕННАЯ СИСТЕМА НАБЛЮДЕНИЯ, ПОЛНАЯ НАБЛЮДАЕМОСТЬ, КАСКАДНОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ

Keywords: TIME–VARYING PERTURBED SYSTEM, COMPLETE OBSERVABILITY, CASCADING SPLITTING

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается дифференциально-алгебраическая нестационарная возмущенная система:

$$\frac{dx(t,e)}{dt} = B(t,e)x(t,e) + f(t,e), \tag{1}$$

$$F(t,e) = A(t,e)x(t,e), \tag{2}$$

где: $x(t,e) \in R^n$; $B(t,e) = B_0(t) + eB_{01}x(t,e)$; $B_0(t), B_{01}(t,e): R^n \to R^n$; $A(t,e) = A_0(t) + eA_{01}x(t,e)$; $A_0(t), A_{01}(t,e): R^n \to R^m$; $B(t,e) = B_0(t) + eB_{01}x(t,e)$; $f(t,e) \in R^n$; $F(t,e) \in R^m$; $t \in [0,T]$; $e \in [0,e_0]$.

Вектор-функция $x(t,e)$ называется вектором состояний системы, $f(t,e)$ и $F(t,e)$ – входной и выходной функциями, соответственно. Система (1), (2) называется полностью наблюдаемой, если состояние системы в любой момент времени определяется однозначно по реализуемым входной и выходной функциям.

Постановка задачи полной наблюдаемости динамической стационарной системы $(e=0, B(t,e)=const, A(t,e)=const)$ связана с именем Р. Калмана. Вопросы полной наблюдаемости различных систем изучались в работах: Н.Н. Красовского, В.М. Попова, Э.Б. Ли и Л.М. Маркуса, D'Анжело, Ю.Н. Андреева, В.И. Гурмана, Х. Кванернаака и Р. Сивана, Ю.Е. Бояринцева, С.А. Красновой и В.А. Уткина, А.Ф. Щегловой и др., а также в работах И.К. Асмыковича и В.М. Марченко, Т.Б. Копейкиной и О.Б. Цехан, S.L. Campbell, J.D. Cobb, F.N. Koumboulis и B.G. Mertzios, E.L. Yip и R.F. Sincovec, P.N. Paraskevopoulos и др.

Для линейных стационарных систем наблюдения, как правило, рассматривался случай регулярного пучка $(A - l\,B)$.

При исследовании полной наблюдаемости возмущенной системы (1), (2) будем использовать метод каскадной декомпозиции исходного пространства. От исходной системы переходим к эквивалентным системам в подпространствах. Этот метод применялся ранее для исследования полной наблюдаемости и полной управляемости различных стационарных систем [1,2], при выявлении инвариантности динамической системы относительно некоторых возмущений [3], при решении задачи управления для одной макроэкономической модели [4], а также при исследовании полной наблюдаемости нестационарной предельной системы [3].

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим дифференциально-алгебраическую нестационарную предельную систему:

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} = B_0(t)\overline{x}(t) + f(t), \tag{3}$$

$$F(t) = A_0(t)\overline{x}(t). \tag{4}$$

Матрице $A_0(t)$ соответствуют разложения:

$$R^n = KerA_0(t) \dot{+} \operatorname{Im} A_0^*(t) \quad , \qquad R^m = KerA_0^*(t) \dot{+} \operatorname{Im} A_0(t) \quad , \tag{5}$$

где $\operatorname{Im} A_0(t)$ – множество значений $A_0(t)$ в R^n; $KerA_0(t)$ – множество решений уравнения $A_0(t)\overline{x}(t) = 0$ в R^n; $\operatorname{Im} A_0^*(t)$ – прямое дополнение к подпространству $KerA_0(t)$; $KerA_0^*(t)$ – прямое дополнение к подпространству $\operatorname{Im} A_0(t)$. Через $P_0(t)$ и $Q_0(t)$ обозначим проекторы на подпространства $KerA_0(t)$ and $KerA_0^*(t)$, соответственно, а через $(I - P_0(t))$ и $(I - Q_0(t))$ – проекторы на подпространства $\operatorname{Im} A_0(t)$ и $\operatorname{Im} A_0^*(t)$, соответственно. I – единичная матрица в соответствующем пространстве.

Сужение $\tilde{A}_0(t)$ отображения $A_0(t)$ на подпространство $KerA_0^*(t)$ осуществляет взаимнооднозначное соответствие между подпространствами $\operatorname{Im} A_0^*(t)$ и $\operatorname{Im} A_0(t)$, соответственно. Введем $A_0^-(t)$ – полуобратную матрицу: $A_0^-(t) = \tilde{A}_0^-(t)(I - Q_0(t))$.

Уравнение (4) эквивалентно системе:

$$Q_0(t)F(t) = 0, \tag{6}$$

$$\overline{x}(t) = A_0^-(t)F(t) + \overline{x}_1(t), \tag{7}$$

с произвольной вектор-функцией $\overline{x}_1(t) = P_0(t)\overline{x}(t) \in KerA_0(t)$.

Доказано [5], что $\dim A_0(t) = const \ \forall t \in [0, T]$, при условии дифференцируемости матрицы $P_0(t)$ $\forall t \in [0, T]$. Потребуем выполнения этого условия. Введем обозначение $n_0 = \dim KerA_0(t)$.

В этом случае возможны три случая: 1) $n_0 = n$; 2) $n_0 = 0$; 3) $0 < n_0 < n$.

Рассмотрим их подробнее.

1) $n_0 = n \to \operatorname{Im} A_0(t) = \{0\}$. Уравнение (4) имеет вид: $F(t) \equiv 0$. Функция состояния $\overline{x}(t)$, как решение дифференциального уравнения (3), находится неединственным образом.

Система (3), (4) является ненаблюдаемой.

2) $n_0 = 0 \to Ker A_0(t) = \{0\}$.

Случай инъективной матрицы $A_0(t) \to P_0(t) = 0 \ \forall t \in [0, T]$.

Функция состояния $\overline{x}(t)$ определяется единственным образом по формуле (7) и имеет вид:

$$\overline{x}(t) = A_0^-(t) F(t) . \tag{8}$$

с учетом выражения (8), уравнение (3) принимает вид:

$$\frac{dA_0^-(t)F(t)}{dt} = B_0(t) A_0^-(t) F(t) + f(t) \tag{9}$$

– это соотношение «входа – выхода», которому должны удовлетворять $f(t)$ – входная и $F(t)$ – выходная функции. Заметим, функция $A_0^-(t)F(t)$ необходимо дифференцируема. Таким образом, в случае инъективной матрицы $A_0(t)$ система (3), (4) является полностью наблюдаемой.

3) $0 < n_0 < n$. С учетом выражения (7) уравнение (3) принимает вид:

$$\frac{d\overline{x}_1(t)}{dt} + \frac{dA_0^-(t)F(t)}{dt} = B_0(t)\overline{x}_1(t)F(t) + B_0(t)A_0^-(t)F(t) + f(t) . \tag{10}$$

Введем обозначения:

$P_0(t)B_0(t)P_0(t) = B_1(t) \colon Ker A_0(t) \to Ker A_0(t)$;

$(I - P_0(t))B_0(t)P_0(t) = A_1(t) \colon Ker A_0(t) \to \operatorname{Im} A_0^*(t)$;

$P_0(t)(B_0(t)A_0^-(t)F(t) + f(t)) = f_1(t) \in Ker A_0(t)$;

$$\frac{dA_0^-(t)F(t)}{dt} - (I - P_0(t))(B_0(t)A_0^-(t)F(t) + f(t)) = F_1(t) \in \operatorname{Im} A_0^*(t). \tag{11}$$

“Расщепим” уравнение (10) на уравнения в подпространствах и перейдем к системе:

$$\frac{d\overline{x}_1(t)}{dt} = B_1(t)\overline{x}_1(t) + f_1(t)\,, \tag{12}$$

$$F_1(t) = A_1(t)\overline{x}_1(t)\,. \tag{13}$$

Таким образом, от системы (3), (4) переходим к эквивалентной совокупности условий (6), (7) и редуцированной системе первого шага расщепления (12), (13). При исследовании полной наблюдаемости системы (12), (13) рассуждаем так же, как и при исследовании системы (3), (4).

Матрице $A_1(t)$ соответствуют разложения:

$$KerA_0(t) = KerA_1(t) \dotplus \operatorname{Im} A_1^*(t) \quad , \quad \operatorname{Im} A_0^*(t) = KerA_1^*(t) \dotplus \operatorname{Im} A_1(t)\,. \tag{14}$$

Подпространства, проекторы на них и полуобратная матрица $A_1^-(t)$ определяются так же, как для разложений (5) (с заменой индексов “0” на “1” и “1” на ”2”). Уравнение (13) эквивалентно системе:

$$Q_1(t)F_1(t) = 0, \tag{15}$$

$$\overline{x}_1(t) = A_1^-(t)F(t) + \overline{x}_2(t), \tag{16}$$

с произвольной вектор-функцией $\overline{x}_2(t) \in KerA_1(t).$ Потребуем дифференцируемости матрицы $P_1(t)$ $\forall t \in [0,T]$. В этом случае $\dim\, KerA_1(t) = const$. Обозначим: $n_1 = \dim KerA_1(t)$.

Здесь возможны три случая: 1) $n_1 = n_0$; 2) $n_1 = 0$; 3) $0 < n_1 < n_0$.

Рассмотрим их подробнее.

1) $n_1 = n_0 \to \operatorname{Im} A_1(t) = \{0\}$. Уравнение (16) имеет вид: $F_1(t) \equiv 0$.

Функция состояния $\overline{x}_1(t)$, как решение дифференциального уравнения (15) находится неединственным образом. Система (12), (13) является ненаблюдаемой. Система (3), (4) также является ненаблюдаемой.

2) $n_1 = 0 \rightarrow KerA_1(t) = \{0\}$. Случай инъективной матрицы $A_1(t) \rightarrow P_1(t) \equiv 0$.

Функция состояния $\overline{x}(t)$ определяется единственным образом по формуле (16) и имеет вид:

$$\overline{x}_1(t) = A_1^-(t)F_1(t). \tag{17}$$

С учетом выражения (17) уравнение (12) принимает вид:

$$\frac{dA_1^-(t)F_1(t)}{dt} = B_1(t)A_1^-(t)F_1(t) + f_1(t) \tag{18}$$

– это соотношение “входа – выхода”, которому должны удовлетворять $f_1(t)$ – входная и $F_1(t)$ – выходная функции редуцированной системы первого шага (12), (13). Заметим, функция $A_1^-(t)F_1(t)$ необходимо дифференцируема $\forall t \in [0,T]$. Система (12), (13) является полностью наблюдаемой. Функция состояния предельной системы (3), (4) единственным образом “восстанавливается“ по формулам (7) и (17):

$$\overline{x}(t) = \sum_{i=0}^{1} A_i^-(t)F_i(t), \text{ с } F_0(t) = F(t). \tag{19}$$

Подстановка выражения (19) в уравнение (3) задает соотношение “входа – выхода”, которому должны удовлетворять $f(t)$ – входная и $F(t)$ – выходная функции системы (3), (4):

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{1} A_i^-(t)F_i(t) = B_0(t)\sum_{i=0}^{1} A_i^-(t)F_i(t) + f(t). \tag{20}$$

Заметим, функция $\sum_{i=0}^{1} A_i^-(t)F_i(t)$ необходимо дифференцируема $\forall t \in [0,T]$.

Таким образом, в случае инъективной матрицы $A_1(t)$ система (3), (4) является полностью наблюдаемой.

3) $0 < n_1 < n_0$. Продолжается процесс каскадного расщепления для системы (12), (13).

Пусть предельная система (3), (4) полностью наблюдаема с инъективной матрицей $A_1(t)$.

Исследование полной наблюдаемости возмущенной системы

Уравнение (2) эквивалентно системе:

$$-eQ_0(t)A_{01}(t,e)x(t,e) = Q_0(t)F(t,e), \tag{21}$$

$$(I + eA_0^-(t)A_{01}(t,e)x(t,e) = A_0^-(t)F(t,e) + x_1(t,e), \tag{22}$$

с произвольной вектор-функцией $x_1(t,e) = P_0(t)x(t,e) \in KerA_0(t)$.

Пусть e таково, что $\left\| eA_0^-(t)A_{01}(t,e) \right\| < 1,\ \forall t \in [0,T]$, тогда при $e < \min(e_0, e_1)$ из (22) выражаем: $x(t,e) = \left(I + eA_0^-(t)A_{01}(t,e)\right)^- \left(A_0^-(t)F(t,e) + x_1(t,e)\right).$ (23)

Домножим обе части уравнения (1) на матрицу $\left(I + eA_0^-(t)A_{01}(t,e)\right)$ и с учетом (22) и (23) получим уравнение:

$$\left(I + eA_0^-(t)A_{01}(t,e)\right)\left[B(t,e)\left(I + eA_0^-(t)A_{01}(t,e)\right)^- \left(A_0^-(t)F(t,e) + x_1(t,e)\right) + f(t,e)\right]. \tag{24}$$

Заметим: $\left(I + eA_0^-(t)A_{01}(t,e)\right)B(t,e)\left(I + eA_0^-(t)A_{01}(t,e)\right)^{-1} =$

$$= B_0(t) + e\left(I + eA_0^-(t)A_{01}(t,e)\right)B_{01}(t,e)\left(I + eA_0^-(t)A_{01}(t,e)\right)^{-1}.$$

Обозначим:

$$P_0(t)\left(I + eA_0^-(t)A_{01}(t,e)\right)B(t,e)\left(I + eA_0^-(t)A_{01}(t,e)\right)^{-1}P_0(t) = B_1(t,e),$$

$$(I-P_0(t))\left(I+eA_0^-(t)A_{01}(t,e)\right)B(t,e)\left(I+eA_0^-(t)A_{01}(t,e)\right)^{-1}P_0(t)=A_1(t,e),$$

$$B_1(t,e)=B_1(t)+eB_{11}(t,e) \text{ и } B_1(t)=P_0(t)B_0(t)P_0(t);$$

$$B_1(t,e)=B_1(t)+eB_{11}(t,e) \text{ и } A_1(t)=(I-P_0(t))B_0(t)P_0(t);$$

$$\begin{aligned}&\frac{dA_0^-(t)F(t,e)}{dt}-(I-P_0(t))\left(I+eA_0^-(t)A_{01}(t,e)\right)\cdot\\&\cdot\left[B(t,e)\left(I+eA_0^-(t)A_{01}(t,e)\right)^-A_0^-(t)F(t,e)+f(t,e)\right]=F_1(t,e);\end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}&P_0(t)\left(I+eA_0^-(t)A_{01}(t,e)\right)\cdot\\&\cdot\left[B(t,e)\left(I+eA_0^-(t)A_{01}(t,e)\right)^-A_0^-(t)F(t,e)+f(t,e)\right]=f_1(t,e).\end{aligned}$$

Здесь $A_1(t),\ A_{11}(t,e):KerA_0(t)\to \operatorname{Im}A_0^*(t)$; $B_1(t),\ B_{11}(t,e):KerA_0(t)\to \operatorname{Im}A_0(t)$;

$f_1(t,e)\in KerA_0^*(t)$; $F_1(t,e)\in \operatorname{Im}A_0^*(t)$.

“Расщепим” уравнение (24) на уравнения в подпространствах $KerA_0(t)$ и $\operatorname{Im}A_0^*(t)$; с учетом обозначений (25), перейдем к системе:

$$\frac{dx_1(t,e)}{dt}=B_1(t,e)x_1(t,e)+f_1(t,e), \quad (26)$$

$$F_1(t,e)=A_1(t,e)x_1(t,e). \quad (27)$$

Таким образом, от системы (1), (2) переходим к эквивалентной совокупности условий (21), выражения (23) и редуцированной системе первого шага расщепления (26), (27). Матрица $A_1(t)$ инъективна. Пусть e таково, что $\left\|eA_1^-(t)A_{11}(t,e)\right\|<1\ \forall t\in[0,T]$, тогда, при $e<\min(e_0,e_1,e_2)$, уравнение (27) эквивалентно системе:

$$-eQ_1(t)A_{11}(t,e)x_1(t,e)=Q_1(t)F_1(t,e)\ , \quad (28)$$

$$x_1(t,e)=\left(I+eA_1^-(t)A_{11}(t,e)\right)^-A_1^-(t)F_1(t,e). \quad (29)$$

Функция состояния $x_1(t,e)$ единственным образом определяется по формуле (29). Система (26), (27) является полностью наблюдаемой.

Потребуем выполнения условия: $\left(I + e A_1^-(t) A_{11}(t,e)\right)^- F(t,e) \in C^1_{[0,T]}$. (30)

При подстановке выражения (29) в уравнение (26) и условие (28), получаем соотношение "входа – выхода", которому должны удовлетворять $f_1(t,e)$ – входная и $F_1(t,e)$ – выходная функции редуцированной системы первого шага (26), (27):

$$\frac{d}{dt}\left(I + e A_1^-(t) A_{11}(t,e)\right)^- A_1^-(t) F_1(t,e) =$$
$$= B_1(t,e)\left(I + e A_1^-(t) A_{11}(t,e)\right)^- F_1(t,e) + f_1(t,e), \quad (31)$$

$$Q_1(t)(I + e A_{11}(t,e))\left(I + e A_1^-(t) A_{11}(t,e)\right)^- A_1^-(t) F_1(t,e) = 0 . \quad (32)$$

Система (26), (27) является полностью наблюдаемой. Функция состояния исходной системы (1), (2) единственным образом "восстанавливается" по формулам (23), (29) и имеет вид:

$$x(t,e) = \sum_{i=0}^{1}\left[\prod_{j=o}^{1}\left(I + e A_j^-(t) A_{j1}(t,e)\right)^-\right] A_i^-(t) F_i(t,e), \text{ с } F_0(t) = F(t). \quad (33)$$

Потребуем выполнения условия:

$$\sum_{i=0}^{1}\left[\prod_{j=o}^{1}\left(I + e A_j^-(t) A_{j1}(t,e)\right)^-\right] A_i^-(t) F_i(t,e) \in C^1_{[0,T]} . \quad (34)$$

При подстановке выражения (33) в уравнение (1) и условие (21) получаем соотношение «входа – выхода», которому должны удовлетворять входная и выходная функции возмущенной системы (1), (2):

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{1}\left[\prod_{j=o}^{1}\left(I + e A_j^-(t) A_{j1}(t,e)\right)^-\right] A_i^-(t) F_i(t,e) =$$

$$B(t,e)\sum_{i=0}^{1}\left[\prod_{j=o}^{1}\left(I+eA_j^-(t)A_{j1}(t,e)\right)^-\right]A_i^-(t)F_i(t,e)+f(t,e). \qquad (35)$$

Система (1), (2) является полностью наблюдаемой.

Справедлива

ТЕОРЕМА 1. *ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЙ (30), (34), ИЗ ПОЛНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ ПРЕДЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ (3), (4) С ИНЪЕКТИВНОЙ МАТРИЦЕЙ $A_1(t)$, СЛЕДУЕТ ПОЛНАЯ НАБЛЮДАЕМОСТЬ ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ (1), (2).*

В этом случае функция состояния возмущенной системы (1), (2) определяется по формуле (33). Формулы (31), (32), (35), (36) задают соотношения «входа – выхода», которым должны необходимо удовлетворять входная и выходная функции возмущенной системы.

Список литературы

1. Раецкая Е.В. Полная условная управляемость и полная наблюдаемость линейных систем: Дисс. …канд. физ.-мат. Наук. Воронеж, 2004. 145 с.

2. Zubova S.P. On polynomial solutions of the linear stationary control system/ S.P. Zubova, L.H. Trung, E.V. Raetskaya // Automation and Remote Control. 2008. Т. 69. № 11. С. 1852–1858.

3. Зубова С.П. Об инвариантности нестационарной системы наблюдения относительно некоторых возмущений/ С.П. Зубова, Е.В. Раецкая, Фам Туан Кыонг // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. Тамбов. 2010. Том 15, вып 6. С. 1678–1679.

4. Драпалюк М.В. Макроэкономическая модель управления тенденциями потребления и накопления в национальном доходе / М.В. Драпалюк, Е.В. Раецкая // Моделирование систем и процессов. Воронеж: ВГЛТА. 2009. № 3–4. С. 20–22.

5. Зубова С.П. Полная наблюдаемость нестационарной дифференциально-алгебраической системы / С.П. Зубова, Е.В. Раецкая, Фам Туан Кыонг // Вестник Воронежского государственного технического университета. Воронеж, 2010. Том 6. № 8. С. 82–86.