

УДК 51-73:54.128

UDC 51-71:54.128

**АНАЛИЗ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА БИНАРНОГО ЭЛЕКТРОЛИТА В ПРИБЛИЖЕНИИ ЗАКОНА ОМА**

**THE MODEL TO TRANSPORT BINARY ELECTROLYTE IN APPROXIMATION OF OHM'S LAW THE ANALYSIS OF BOUNDARY PROBLEM**

Коваленко Анна Владимировна  
к.э.н., доцент кафедры прикладной математики

Kovalenko Anna Vladimirovna  
Cand.Econ.Sci., assistant professor

Уртенов Махамет Хусеевич  
д.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной математики  
*Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия*

Urtenov Mahamet Khuseevich  
Dr.Sci.Phys.-Math., professor  
*Kuban State University, Krasnodar, Russia*

Чубырь Наталья Олеговна  
старший преподаватель кафедры прикладной математики

Chubyr Natalia Olegovna  
senior teacher of chair of applied mathematics

Хромых Анна Александровна  
старший преподаватель кафедры прикладной математики  
*Кубанский государственный технологический университет, Краснодар, Россия*

Khromikh Anna Aleksandrovna  
senior teacher of chair of applied mathematics  
*Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia*

Узденова Аминат Магомедовна  
аспирантка кафедры математического анализа  
*Карачаево-Черкесский государственный университет, Карачаевск, Россия*

Uzdenova Aminat Machametovna  
postgraduate student of faculty of the mathematical analysis  
*Karachaevo-Circassian state university, Karachaevsk, Russia*

Барсукова Виктория Юрьевна  
к.ф.-м.н., доцент кафедры дифференциальных и интегральных уравнений  
*Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия*

Barsukova Victoria Jurevna  
Cand.Phys.-Math.Sci., assistant professor  
*Kuban State University, Krasnodar, Russia*

Статья посвящена анализу краевой задачи модели переноса бинарного электролита в мембранных системах в приближении закона Ома. Предлагаются различные методы решения

This article analyzes the boundary problem model of transport of binary electrolyte membrane systems in the approximation of Ohm's law. Different methods of solution are proposed

Ключевые слова: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ НЕРНСТА - ПЛАНКА И ПУАССОНА, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Keywords: MATHEMATICAL MODELING, SYSTEM NERNST - PLANCK AND POISSON EQUATIONS, NUMERICAL METHODS

# 1 Модель переноса бинарного электролита в мембранных системах в приближении закона Ома

## 1.1 Система уравнений

Перенос бинарного электролита в мембранных системах в приближении закона Ома описывается следующей системой уравнений в безразмерных переменных [1]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = I \Delta S - c(S) \operatorname{div}(S \vec{E}) \quad (1)$$

$$\frac{e}{2} \|\vec{E}\|^2 \vec{E} + S \vec{E} = \vec{I} \quad (2)$$

$$\Delta h = \left( \nabla \left( S + \frac{e}{2} \|\vec{E}\|^2 \right), \vec{E} \right)_1 \quad (3)$$

где  $t > 0, x \in (0,1), y \in (0,L), (\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_2 - a_2 b_1$  - кососимметричное скалярное произведение,  $c(x)$  - функция Хэвисайда [2]:

$$c(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Кроме того,  $e$  положительный малый параметр,  $I = 1/Pe$ , ( $Pe$  = число Пекле),  $S$  - обобщенная концентрация,  $\vec{E}$  - напряженность электрического поля,  $h$  - функция тока связанная с плотностью тока  $\vec{I}$

формулой  $I_1 = -\frac{\partial h}{\partial y}, I_2 = \frac{\partial h}{\partial x}$ .

## 1.2 Краевые условия

Система уравнений должна быть дополнена краевыми условиями. Мембранные системы работают, как правило, в двух разных режимах потенциостатическом, когда поддерживается постоянным падение потенциала в цепи и гальваностатическом, когда ток  $i_{av}$ , протекающий через любое сечение камеры обессоливания, является постоянным.

Постановка краевых условий зависит от моделируемого режима

работы электродиализного аппарата.

Как показано в [3] при гальваностатическом режиме естественными являются следующие краевые условия.

1) Граничные условия

$$\begin{aligned} S|_{x=0} &= A(t, y) < 0, & S|_{x=1} &= B(t, y) < 0, \\ S|_{y=0} &= C(t, x), & S|_{y=L} &= D(t, x) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{x=1} = 0, \quad h|_{y=0} = 0, \quad h|_{y=L} = -i_{av} L.$$

2) Начальные условия

$$S|_{t=0} = S_0(x, y), \quad h|_{t=0} = h_0(x, y)$$

3) Условия согласования граничных условий:

$$\begin{aligned} C(t, 0) &= A(t, 0); & C(t, 1) &= B(t, 0); \\ D(t, 0) &= A(t, L); & D(t, 1) &= B(t, L) \end{aligned}$$

4) Условия согласования граничных и начальных условий:

$$\begin{aligned} S_0(0, y) &= A(0, y); & S_0(1, y) &= B(0, y); \\ S_0(x, 0) &= C(0, x); & S_0(x, L) &= D(0, x) \end{aligned}$$

Для функции  $h$  граничные условия и начальное условие будет согласовано, если взять  $h_0(x, y)$ , например, в виде  $h_0(x, y) = -i_{av} y$

## 2 Вывод уравнения для плотности тока, не зависящего от остальных неизвестных функций

Первое уравнение системы можно решать независимо от остальных уравнений, однако уравнения (2) и (3) связаны. Выведем уравнение для функции  $h$ , не зависящее от  $\dot{E}$ .

$$\text{Положим } u = \frac{e}{2} \|\dot{E}\|^2 + S, \tag{4}$$

тогда (2) и (3) запишутся в виде

$$u\dot{E} = \dot{I}, \tag{5}$$

$$\Delta h = (\nabla u, \dot{E})_1 \quad (6)$$

Из (5)  $\mathbf{r} = \frac{1}{u} \mathbf{I}$ , поэтому (7)

$$\Delta h = \frac{1}{u} (\nabla u, I)_1$$

Так как  $\mathbf{r}_1 = -\frac{\partial h}{\partial y}$ ,  $\mathbf{r}_2 = \frac{\partial h}{\partial x}$ , то  $(\nabla u, I)_1 = (\nabla u, \nabla h)$ , следовательно

$$\Delta h = \frac{1}{u} (\nabla u, \nabla h), \quad (8)$$

Подставим (7) в (4), тогда  $u = \frac{e}{2} \frac{1}{u^2} \|\mathbf{I}\|^2 + S$ , так как  $\|\mathbf{I}\|^2 = \|\nabla h\|^2$ , то:

$$u = \frac{e}{2} \frac{1}{u^2} \|\nabla h\|^2 + S \quad (9)$$

Уравнение (9) рассматриваем как уравнение относительно неизвестной функции  $u$ :

$$2u^3 = 2u^2 S + e \|\nabla h\|^2 \quad (10)$$

Чтобы заменить  $\nabla u$  в (8) в (10) возьмем оператор  $\nabla$  от обеих частей, тогда

$$6u^2 \nabla u = 4u S \nabla u + 2u^2 \nabla S + e \nabla \|\nabla h\|^2 \quad (11)$$

Так как:

$$\nabla \|\nabla h\|^2 = 2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} e_1 + 2 \left( \frac{\partial h}{\partial x} e_2 + \frac{\partial h}{\partial y} e_1 \right) \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} e_2, \quad (12)$$

то, подставляя (12) в (11), получим

$$2u(3u - 2S) \nabla u = 2u^2 \nabla S + 2e \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} e_1 + 2e \left( \frac{\partial h}{\partial x} e_2 + \frac{\partial h}{\partial y} e_1 \right) \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + 2e \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} e_2 \quad (13)$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \nabla u &= \frac{1}{(3u - 2\tilde{S})} \nabla S + \frac{e}{u^2(3u - 2\tilde{S})} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} e_1 + \\ &+ \frac{e}{u^2(3u - 2\tilde{S})} \left( \frac{\partial h}{\partial x} e_2 + \frac{\partial h}{\partial y} e_1 \right) \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \frac{e}{u^2(3u - 2\tilde{S})} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} e_2 \end{aligned} \quad (14)$$

Подставим (14) в (8) и получим уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= \frac{1}{(3u - 2\tilde{S})} (\nabla S, \nabla h) + \frac{e}{u^2(3u - 2\tilde{S})} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{2e}{u^2(3u - 2\tilde{S})} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \frac{e}{u^2(3u - 2\tilde{S})} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Приведя подобные по членам уравнения со старшими производными, получим нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка:

$$\begin{aligned} \left( 1 - \frac{e}{u^2(3u - 2\tilde{S})} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{2e}{u^2(3u - 2\tilde{S})} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \\ + \left( 1 - \frac{e}{u^2(3u - 2\tilde{S})} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{1}{(3u - 2\tilde{S})} (\nabla S, \nabla h) \end{aligned} \quad (15)$$

Определим тип уравнения. Вычислим

$$\begin{aligned} w &= \frac{e^2}{u^4(3u - 2\tilde{S})^2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 - \\ &- \left( 1 - \frac{e}{u^2(3u - 2\tilde{S})} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \left( 1 - \frac{e}{u^2(3u - 2\tilde{S})} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right) = \frac{u}{2\tilde{S} - 3u} \end{aligned}$$

Тип уравнения зависит от  $sign w = sign(u(\frac{2}{3}S - u))$ . Таким образом,

при  $e > 0$ , и  $\tilde{S} > 0$   $u \in (-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}\tilde{S}, \infty)$  (при  $\tilde{S} < 0$   $u \in (-\infty, \frac{2}{3}\tilde{S}) \cup (0, \infty)$ ) тип

уравнения будет эллиптический, при  $\tilde{S} > 0$   $u \in (0, \frac{2}{3}\tilde{S})$ , (при  $\tilde{S} < 0$

$u \in (\frac{2}{3}\tilde{S}, 0)$  -гиперболический, а при  $u = \frac{2}{3}S$ ,  $u = 0$ - параболический.

Однако уравнения асимптотического приближения, как будет показано ниже, будут иметь эллиптический и параболический тип.

### 3 Методы решения уравнения для функции $u$

Уравнение

$$2u^3 = 2u^2S + e\|\nabla h\|^2, \quad (16)$$

относительно  $u$  является кубическим уравнение и имеет точное решение. Однако это решение настолько громоздкое, что получить информацию проще из приближенных решений. Ниже приводятся различные приближенные решения, полученные методом итерации и асимптотическое решение, использующее малый параметр  $e$ .

#### 3.1 Сведение к эталонному уравнению

Сделаем в уравнении (16), замену

$$u = \|\nabla h\|^{\frac{2}{3}} e^{\frac{1}{3}} 2^{-\frac{1}{3}} z(x), \text{ где } x = \|\nabla h\|^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{1}{3}} 2^{\frac{1}{3}} S,$$

тогда получим уравнение относительно  $z(x)$ :

$$z^3 = xz^2 + 1, \text{ или}$$

$$z^3 - xz^2 - 1 = 0 \quad (17)$$

Это уравнение будем называть **эталонным** уравнением.

Точные решения эталонного уравнения можно записать в явном виде, откуда следует, что это уравнение имеет единственное положительное решение. Ниже на рис приведены графики решений уравнения (17).

Обозначим через  $\bar{z}(x)$  положительное решение эталонного уравнения. Функцию  $\bar{z}(x)$  можно табулировать, тогда функция  $u$  выражается в следующем виде

$$u = \|\nabla h\|^{\frac{2}{3}} e^{\frac{1}{3}} 2^{-\frac{1}{3}} z(\|\nabla h\|^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{1}{3}} 2^{\frac{1}{3}} S) \quad (18)$$

Формулу (18) удобно использовать при численном решении, и, в особенности для вывода асимптотических решений.

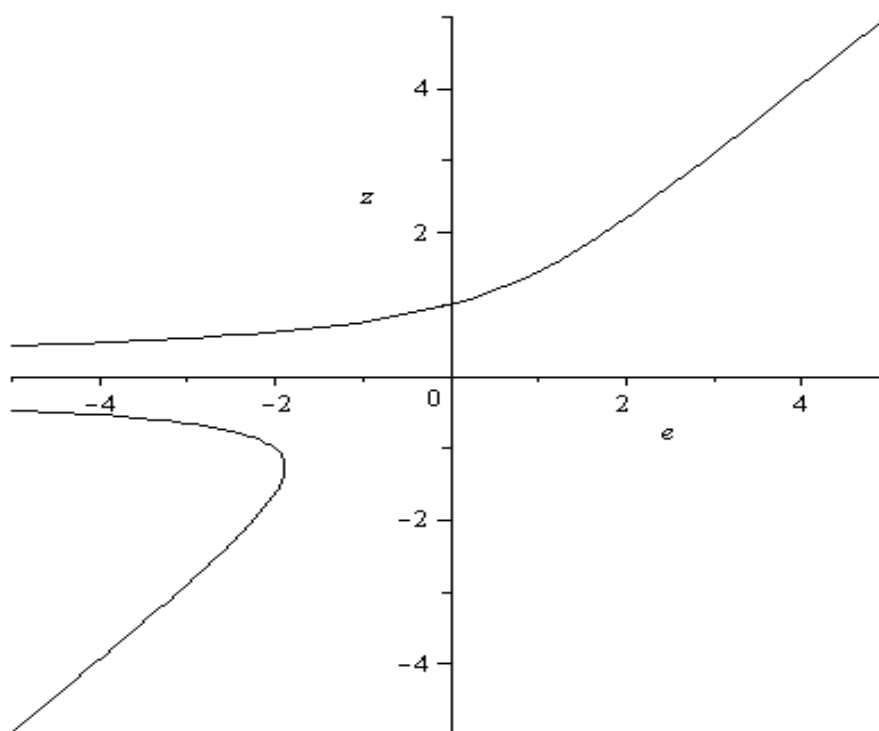


Рисунок 1 - Решения эталонного уравнения

### 3.2 Асимптотическое решение

Из выражения для  $x$  следует, что асимптотика  $x$  зависит от знака  $S$  и, если предел  $\lim_{e \rightarrow +0} \|\nabla h\| = \|\nabla h_0\|$  - существует и ограничен при  $e \rightarrow +0$ , то получим (в дальнейших формулах для простоты записи индекс «0» опускается):

$$\lim_{e \rightarrow +0} x = \begin{cases} -\infty, & \text{sign}(S) = -1 \\ 0, & S = 0 \\ +\infty, & \text{sign}(S) = +1 \end{cases}$$

С учетом этого, найдем асимптотику решения эталонного уравнения:

$$z^3 - xz^2 - 1 = 0, \text{ при } x \rightarrow -\infty, \quad x \rightarrow +\infty \text{ и } x \rightarrow 0.$$

1) При  $z \rightarrow +0$ , получаем  $x \rightarrow -\frac{1}{z^2}$ , поэтому  $z \rightarrow \frac{1}{\sqrt{-x}}$  при  $x \rightarrow -\infty$ , т.е.

$$z = \frac{1}{\sqrt{-x}} - \dots \text{ при } x \rightarrow -\infty;$$

2) При  $z \rightarrow +\infty$ , получаем  $z - x \rightarrow +0$ , следовательно, при  $x \rightarrow +\infty$ , получим:

$$z = x + \dots \text{ при } x \rightarrow +\infty;$$

3) Разлагая решение уравнения (17) в ряд по  $x$  в окрестности  $x=0$

$$\text{получаем } z = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x^2 + \dots$$

Итак, эталонное уравнение имеет следующее асимптотическое решение:

$$z(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-x}} - \dots, & \text{при } x \rightarrow -\infty \\ 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x^2 + \dots, & \text{при } x \rightarrow 0 \\ x + \dots, & \text{при } x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (18)$$

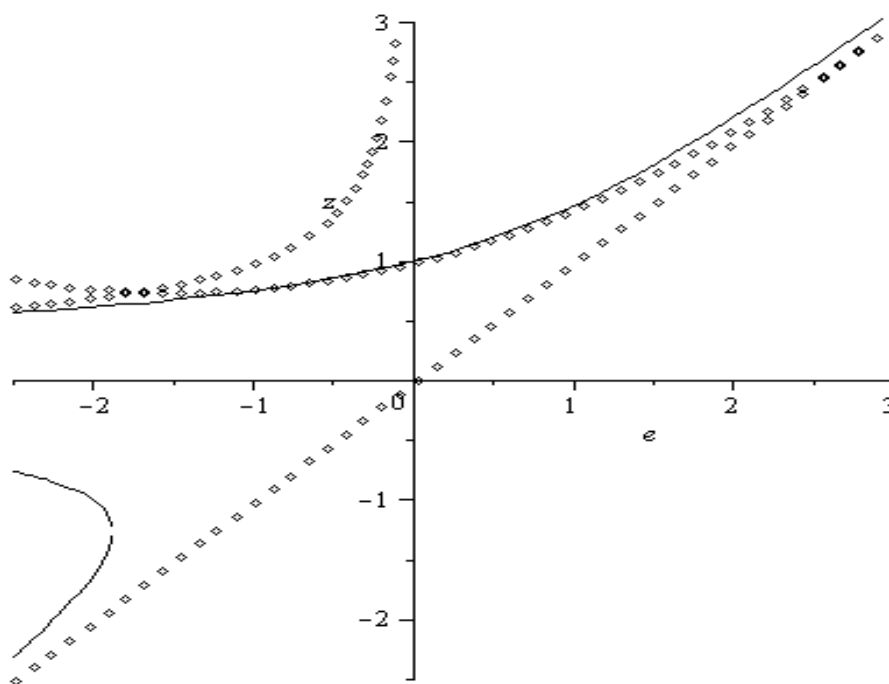


Рисунок 2 – Графики функций  $\bar{z}$ ,  $\bar{z}_1$ ,  $\bar{z}_2$ ,  $\bar{z}_3$  изображены точками, а графики точных решений эталонного уравнения,- линиями

В (17) несложно получить и члены высшего приближения.



Обозначим  $\bar{z}_1 = \frac{1}{\sqrt{-x}}$ ,  $\bar{z}_2 = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x^2$ ,  $\bar{z}_3 = x$ .

Из приведенных на рис.2 графиков функций  $\bar{z}$ ,  $\bar{z}_1$ ,  $\bar{z}_2$ ,  $\bar{z}_3$  видно, что функция:

$$\bar{z}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-x}}, & \text{при } x \leq -1.5 \\ 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x^2, & \text{при } -1.5 \leq x \leq 1.5 \\ x, & \text{при } x \geq 1.5 \end{cases}$$

является достаточно точным приближением для произвольного  $x \in (-\infty, \infty)$ .

С учетом асимптотики функции  $\bar{z}(x)$  по  $x$ , получаем асимптотику функции  $u$  по  $e \rightarrow +0$ :

1) Из  $z \sim x$ ,  $x \rightarrow \infty$ , следует  $u \approx S$ ,  $e \rightarrow +0$ . Это же следует прямо из уравнения (17), если формально положить  $e = 0$  (что эквивалентно условию электронейтральности). Следовательно, область  $U_1 = \{(t, x, y) : S(t, x, y) > 0\}$  является область электронейтральности.

2) Из  $z \sim \frac{1}{\sqrt{-x}}$ ,  $x \rightarrow -\infty$  следует

$$u = \|\nabla h\|_{\frac{2}{3}} e^{\frac{1}{3}} 2^{-\frac{1}{3}} (-x)^{-\frac{1}{2}} = \|\nabla h\|_{\frac{2}{3}} e^{\frac{1}{3}} 2^{-\frac{1}{3}} (-S)^{-\frac{1}{2}} \|\nabla h\|_{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{6}} 2^{-\frac{1}{6}} = \frac{\|\nabla h\| e^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{-S}}$$

$$u \approx \frac{\|\nabla h\| e^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{-S}}, \text{ при } e \rightarrow 0 \text{ и } \text{sign}(S) = -1. \tag{19}$$

Последнее равенство следует прямо из уравнения (16), если в нем пренебречь  $u^3$  по сравнению с  $u^2$ , т.е. решать уравнение

$$2u^2 \tilde{S} + e \|\nabla h\|^2 \approx 0 \text{ или } u^2 \approx \frac{e \|\nabla h\|^2}{-2S}, \text{ откуда и следует формула (19).}$$

Дальнейшее исследование показывает, что область  $U_2 = \{(t, x, y) : S(t, x, y) < 0\}$  является областью пространственного заряда.

3) Из  $z \sim 1$ , при  $x \rightarrow 0$  получаем, что

$$u \approx \|\nabla h\|^{2/3} e^{1/3} 2^{-1/3}, \text{ в окрестности нулей функции } S(t, x, y).$$

Это же следует из уравнения (17), если в нем формально положить  $S = 0$ , тогда  $u^3 = \frac{e}{2} \|\nabla h\|^2$  и, следовательно,  $u = e^{1/3} 2^{-1/3} \|\nabla h\|^{2/3}$ . Окрестность  $U_3$  нулей функции  $S$  является достаточно малой промежуточной областью между областями электронейтральности и пространственного заряда.

Из проведенных выше расчетов следует, что функция

$$u_0 = \begin{cases} S, & (t, x, y) \in U_1 \\ \|\nabla h\|^{2/3} e^{1/3} 2^{-1/3} + \frac{1}{3} S + \frac{1}{9} \|\nabla h\|^{-2/3} 2^{1/3} e^{-1/3} S^{5/3} + \dots, & (t, x, y) \in U_3 \\ \frac{\|\nabla h\| e^{1/2} 2^{1/2}}{\sqrt{-S}}, & (t, x, y) \in U_2 \end{cases}$$

является равномерным асимптотическим представлением решения уравнения (16). Эта функция может использоваться в качестве начального приближения в приводимых ниже методах последовательных приближений и Ньютона.

### 3.3 Метод последовательных приближений

Поделим уравнение (16) на  $2u^2$ , тогда получим уравнение

$$u = \frac{e}{2} \frac{1}{u^2} \|\nabla h\|^2 + S \tag{20}$$

$$\text{Обозначим } f(u) = \frac{e}{2} \frac{1}{u^2} \|\nabla h\|^2 + S,$$

тогда уравнение (20), запишется в виде:  $u = f(u)$ .

Пусть  $u^{(0)}$  некоторое начальное приближение, положим

$$u^{(i+1)} = f(u^{(i)}), \quad i = 0, 1, \dots \quad \text{или} \quad u^{(i+1)} = \frac{e}{2} \frac{1}{u^{(i)^2}} \|\nabla h\|^2 + S$$

### 3.4 Метод Ньютона

Положим

$$F(u) = 2u^3 - 2u^2 S - e \|\nabla h\|^2, \quad \text{тогда уравнение (17) запишется в виде } F(u) = 0$$

Для решения этого уравнения можно применить метод Ньютона:

$$u^{(i+1)} = u^{(i)} - \frac{F(u^{(i)})}{F'(u^{(i)})}, \quad \text{или модифицированный метод Ньютона:}$$

$$u^{(i+1)} = u^{(i)} - \frac{F(u^{(i)})}{F'(u^{(0)})}$$

Пусть  $u^{(0)}$  - некоторое начальное приближение.

Так как,  $F'(u) = 6u^2 - 4u\tilde{S}$ , то метод Ньютона запишется в виде:

$$u^{(i+1)} = u^{(i)} - \frac{u^{(i)^2} - \tilde{S}}{3u^{(i)^2} - 2u^{(i)}\tilde{S}} + \frac{e}{6u^{(i)^2} - 4u^{(i)}\tilde{S}} \|\nabla h\|^2,$$

а модифицированный метод Ньютона в виде:

$$u^{(i+1)} = u^{(i)} - \frac{2u^{(i)^3} - 2u^{(i)^2}\tilde{S} - e\|\nabla h\|^2}{6u^{(0)^2} - 4u^{(0)}\tilde{S}}$$

## 4 Методы решения краевой задачи для функции $h$

Краевая задача для уравнения (15) условиями:

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=1} = 0, \quad h|_{y=0} = 0, \quad h|_{y=L} = -i_{av} L, \quad h|_{t=0} = h_0(x, y)$$

может быть решена различными методами. Здесь предлагается решение этой задачи асимптотическим методом, и методом последовательных приближений.

### 4.1 Асимптотический метод

Подставляя асимптотические приближения для функции  $u$  в уравнение (15) в каждой из областей можно получить асимптотическое упрощение уравнения (15). Прямые вычисления показывают, что получаются следующие уравнения:

1) В области электронейтральности  $U_1$ :

$$\Delta h = \frac{1}{S}(\text{grad } S, \text{grad } h) \quad (21)$$

Для получения высших приближений необходимо использовать разложение вида:

$$u = u^{(0)} + \epsilon u^{(1)} + \epsilon^2 u^{(2)} + \dots \quad (22)$$

$$h = h^{(0)} + \epsilon h^{(1)} + \epsilon^2 h^{(2)} + \dots \quad (23)$$

2) В области пространственного заряда  $U_2$ :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} =$$

$$-\frac{\|\text{grad } h\|^2}{2S}(\text{grad } S, \text{grad } h) \quad (24)$$

Для получения высших приближений необходимо использовать разложение вида:

$$u = \epsilon^{\frac{1}{2}} u^{(0)} + \epsilon u^{(1)} + \epsilon^{\frac{3}{2}} u^{(2)} + \dots \quad (25)$$

$$h = h^{(0)} + \epsilon^{\frac{1}{2}} h^{(1)} + \epsilon h^{(2)} + \dots \quad (26)$$

3) В промежуточном слое  $U_3$

$$\left(\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 4\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} +$$

$$\left(\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (27)$$

Для получения высших приближений необходимо использовать разложение вида:

$$u = \epsilon^{\frac{1}{3}} u^{(0)} + \epsilon^{\frac{2}{3}} u^{(1)} + \epsilon u^{(2)} + \dots \quad (28)$$

$$h = h^{(0)} + \epsilon^{\frac{1}{3}} h^{(1)} + \epsilon^{\frac{2}{3}} h^{(2)} + \epsilon h^{(3)} + \dots \quad (29)$$

Особенностью уравнений асимптотического разложения является то, что в них малый параметр не входит, они значительно проще исходного уравнения (15), что упрощает их исследование и численное решение. Кроме того, уравнение (21) в области электронейтральности является, очевидно, уравнением эллиптического типа, а уравнение (24) в области пространственного заряда имеет параболический тип.

#### 4.2 Метод последовательных приближений

Пусть  $h^{(0)}(t, x, y)$  некоторое начальное приближение и уже найдены приближения  $h^{(1)}(t, x, y), \dots, h^{(i)}(t, x, y)$ . Определим последовательные приближения  $h^{(i+1)}(t, x, y)$  как решение краевой задачи:

$$\left(1 - \frac{e}{(u^{(i)})^2(3u^{(i)} - 2S)} \left(\frac{\partial h^{(i)}}{\partial x}\right)^2\right) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{2e}{(u^{(i)})^2(3u^{(i)} - 2S)} \frac{\partial h^{(i)}}{\partial x} \frac{\partial h^{(i)}}{\partial y} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} +$$

$$+ \left(1 - \frac{e}{(u^{(i)})^2(3u^{(i)} - 2S)} \left(\frac{\partial h^{(i)}}{\partial y}\right)^2\right) \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{1}{(3u^{(i)} - 2S)} (\nabla S, \nabla h)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad h \Big|_{y=0} = 0, \quad h \Big|_{y=L} = -i_{av} L, \quad h \Big|_{t=0} = h_0(x, y),$$

где  $u^{(i)}$  приближенное решение уравнения  $2u^3 = 2u^2 S + e \|\nabla h^{(i)}\|^2$ , найденное одним из разработанных выше методом.

Предложенные выше численные, асимптотические и итерационные методы решения позволяют построить комплекс проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов по исследованию процессов переноса бинарного электролита в канале обессоливания электродиализного и проведение вычислительных экспериментов.

## Литература

1. Уртенев К.М. Математическое моделирование тепломассопереноса в электродиализных аппаратах водоподготовки / К.М. Уртенев, А.В. Коваленко, Т.Л. Шапошникова – М.: Финансы и статистика, 2010. — 214с.
2. Волков И.К. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учеб. для вузов / И.К. Волков, А.Н. Канатников, В.С. Зарубина, А.П. Крищенко — 2-е изд. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. — 228 с.
3. Узденова А.М. Математические модели электроконвекции в электромембранных системах/ Узденова А.М., Коваленко А.В., Уртенев М.Х. — Карачаевск: КЧГУ, 2011. — 154с.