УДК 519.642.8

ГЕНЕРИРУЮЩИЙ МНОГОЧЛЕН ДЛЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ 2-ГРУПП НАД ПОЛЯМИ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВА

Сергеев Александр Эдуардович
к.ф.-м.н, доцент
Кубанский государственный университет,
Краснодар, Россия

В статье построены генерирующие многочлены для циклических групп порядков 4, 8 и16 над полями характеристики два. По указанной конструкции можно получать генерирующие многочлены для любых циклических 2-групп над полями характеристики два. Приводится также обзор известных результатов по генерирующим многочленам для циклических групп

Ключевые слова: ГЕНЕРИРУЮЩИЙ МНОГОЧЛЕН, ЦИКЛИЧЕСКАЯ ГРУППА, ГРУППА ГАЛУА МНОГОЧЛЕНА

UDK 519.642.8

GENERIC POLYNOMIALS FOR THE CYCLIC 2-GROUPS OVER FIELDS WITH CHARACTERISTIC TWO

Sergeev Alexander Eduardovich
Cand.Phys.-Math.Sci, associate professor
Kuban State University,
Krasnodar, Russia

In this article, the generic polynomials for cyclic groups of order 4, 8 and 16 over fields with characteristic two are constructed. With this construction, the generic polynomials for all cyclic 2-groups over fields with characteristic two can be obtained. We also give survey of known results of generic polynomials for the cyclic groups.

Keywords: GENERIC POLYNOMIALS, CYCLIC GROUP, GALOIS GROUP OF POLYNOMIALS

1. Введение

Пусть K – поле и G – конечная группа. Генерирующий многочлен дает описание расширений Галуа с группой Галуа G.

Напомним определение генерирующего многочлена [3].

Определение 1. (Кемпер). Пусть K – поле и G – конечная группа. Назовем нормированный, сепарабельный многочлен $g(t_1,...,t_m,X)$ из кольца $K(t_1,\dots,t_m)[X]$ генерирующим для группы G над полем K, если выполняются следующие два свойства:

(1) группа Галуа многочлена g (как многочлена от X над полем $K(t_1,\dots,t_m)$) есть G;

(2) если L – бесконечное поле, содержащее K и N/L – расширение Галуа с группой G, тогда существуют элементы $l_1,\dots,l_m \in L$, такие, что N является полем разложения многочлена $g(l_1,\dots,l_m,X)$ над L.

В последнее время стала интересна следующая проблема.

Проблема 1. Дана конечная группа G и бесконечное поле K. Существует ли для данной группы G над данными полем K генерирующий многочлен , и если да, построить его в явном виде.

Замечание. 1) Общее описание C_8-расширений над полями характеристики, неравной 2, содержащими элемент $\sqrt{2}$ было дано в [7]. В частности, если элемент $\sqrt{2} \in K$, то многочлен $X^8 - 8sX^6 + 20s^2X^4 - 16s^3X^2 + \frac{4s^4}{t^2+1}$ является генерирующим многочленом для циклической группы C_8 над полем K, характеристики неравной 2.

С другой стороны, Saltman доказал, что не существует генерирующего многочлена для группы C_n над полем Q, если $8|n$ [6].

2) Для циклической группы нечетного порядка и поля K, содержащего элемент $z+1/z$, где z – первообразный корень n-ой степени из единицы, Miyake построил генерирующий многочлен [4].

3) Smith [8] и Dentzer [1], независимо друг от друга, построили генерирующие многочлены для циклических групп нечетных порядков над полем Q.

4) Используя конструкцию Cohen'a, Nakano построил генерирующий многочлен для циклических групп нечетных порядков над полем K характеристики p, $p \neq 2$ [5].

5) Над полем K характеристики p, $p \neq 2$, известно, что существует генерирующий многочлен от n параметров для циклических групп C_{p^n}, однако в явном виде они не построены даже для маленьких p и n [2].

В данной работе строятся генерирующие многочлены для циклических групп порядков 4, 8 и 16 над полями характеристики 2.

§ 2. Построение генерирующего многочлена для циклической группы 4-го порядка над полем характеристики два

Сформулируем теорему Витта о циклических расширениях [9].

Теорема 2.1. (Витт). Пусть p – простое число, K – поле характеристики $p,$ L/K – циклическое расширение степени p^{f-1} $(f>1)$. Обозначим через s – порождающий элемент циклической группы Галуа расширения L/K. Тогда, существуют такие элементы $d, g \in L,$ что $Sp_{L/K} d = 1,$ $s(g) - g = d^p - d.$ Для любого $u \in K$ поле $M,$ полученное присоединением к L корня q уравнения $x^p - x = u + g,$ является расширением Галуа поля K с циклической группой Галуа порядка $p^f,$ и так может быть получено любое циклическое расширение степени $p^f,$ содержащее поле $L.$ При этом $M = K(q).$ Продолжение автоморфизма s поля L на поле M можно выбрать так, что $s(q) = q + d.$

Для C_4-расширений Галуа теорема Витта дает следующие результаты.

Теорема 2.2. Пусть K – поле характеристики 2, M/K – циклическое расширение степени 4, $L \supset K$ – квадратичное над K подполе M. Тогда существуют такие элементы $a, b \in K,$ $a \in L,$ $b \in M,$ что выполняются равенства: $a^2 + a = a,$ $b^2 + b = b + aa.$ При этом $L = K(a),$ $M = K(b),$ а автоморфизм s, порождающий группу Галуа расширения $M/K,$ можно выбрать так, что $s(a) = a + 1,$ $s(b) = b + a.$

Доказательство. Квадратичное расширение $L/K,$ как и любое квадратичное расширение поля характеристики 2, получается присоединением к K элемента a, такого что $a^2 + a = a,$ где a – некоторый элемент из $K.$ Обозначим через s единственный нетождественный автоморфизм расширения $L/K;$ тогда, как известно, $s(a) = a + 1.$ Имеем:

$$Sp_{L/K} a = a + s(a) = a + (a+1) = 1, \qquad s(aa) - aa = a = a^2 - a.$$

Поэтому, по теореме Витта существует такой элемент $b \in K$, что поле M получается присоединением к L корня уравнения $x^2 + x = b + aa$, причем $M = K(b)$, и автоморфизм s расширения L/K можно так продолжить на расширение M/K, что $s(b) = b + a$.

Теорема 2.3. Пусть $K_1 = K(t_1, t_2)$ – поле рациональных функций от независимых переменных t_1, t_2, $L_1 = K_1(a)$, $M_1 = L_1(b)$, где a – корень многочлена $g(y) = y^2 + y + t_1 \in K_1[y]$, а b – корень многочлена $h(x) = x^2 + x + t_2 + t_1 a \in L_1[x]$. Тогда M_1/K_1 – расширение Галуа с циклической группой 4-го порядка. При этом, $M_1 = K_1(b)$, а образующую s группы Галуа расширения M_1/K_1 можно выбрать так, что $s(a) = a+1$, $s(b) = b + a$.

Доказательство. Ясно, что многочлен $g(y)$ неприводим над K_1, а многочлен $h(x)$ неприводим над L_1, поэтому степени расширений L_1/K_1 и M_1/L_1 равны 2, а значит, $[M_1 : K_1] = 4$. Пусть s – единственный нетождественный автоморфизм расширения L_1/K_1; тогда $s(a) = a+1$, и поэтому

$$Sp_{L_1/K_1} a = a + s(a) = a + (a+1) = 1, \quad s(t_1 a) - t_1 a = t_1 = a^2 - a.$$

Поскольку поле M_1 получается из поля L_1 присоединением корня b уравнения $x^2 - x = t_2 + t_1 a$, расширение M_1/K_1 является по теореме Витта циклическим расширением 4-ой степени, причем $M_1 = K_1(b)$, а продолжение автоморфизма s расширения L_1/K_1 на поле M_1 можно выбрать так, что $s(b) = b + a$.

В обозначениях теоремы 2.3 элемент b является корнем не только многочлена $h(x)$, но и многочлена

$$f(x; t_1, t_2) = \prod_{t \in Gal(L_1/K_1)} th(x) = h(x) \cdot s(h(x)),$$

Все коэффициенты которого принадлежат полю $K_1 = K(t_1, t_2)$. Укажем явный вид этого многочлена:

$$f(x;t_1,t_2)=(x^2+x+t_2+t_1a)(x^2+x+t_2+t_1+s(a))=(x^2+x+t_2+t_1a)(x^2+x+t_2+t_1a+t_1)=$$
$$=x^4+x^2+t_2^2+t_1^2a^2+t_1x^2+t_1x++t_1t_2+t_1^2a=x^4+(1+t_1)x^2+t_1x+t_1^3+t_2^2+t_1t_2.$$

Поскольку корень b многочлена $f(x;t_1,t_2)$ порождает расширение M_1/K_1 той же степени, что и степень многочлена $f(x;t_1,t_2)$, этот многочлен неприводим. Следовательно, все его корни вместе с корнем b принадлежат нормальному расширению M_1/K_1, а потому $M_1=K_1(b)$ – поле разложения $f(x;t_1,t_2)$, и группа Галуа этого многочлена над полем $K(t_1,t_2)$ совпадает с группой Галуа расширения M_1/K_1, то есть является циклической группой 4-го порядка.

Теорема 2.4. Пусть K – поле характеристики два. Тогда определенный выше многочлен $f(x;t_1,t_2)\in K[x,t_1,t_2]$ является генерирующим для группы C_4 над полем K.

Доказательство. Мы уже убедились в том, что группа Галуа многочлена $f(x;t_1,t_2)$ над полем $K(t_1,t_2)$ является циклической группой 4-го порядка. Осталось показать, что если K' – какое-то расширение поля K, а M'/K' – циклическое расширение четвертой степени, то существуют такие элементы $a,b\in K'$, что M' – поле разложения специализации многочлена $f(x;t_1,t_2)$ при $t_1=a,\quad t_2=b.$

По теореме 2.2 существуют такие элементы $a,b\in K',\quad a,b\in M'$ и порождающий элемент s группы Галуа расширения M'/K', что

$$M'=K'(b),\ a^2+a=a,\ b^2+b=b+aa,\ s(a)=a+1.$$

Ясно, что b – корень многочлена $h'(x)=x^2+x+b+aa$, а значит, и многочлена

$$f'(x)=h'(x)\cdot s(h'(x))=(x^2+x+b+aa)(x^2+x+b+aa+a)=x^4+(1+a)x^2+ax+(a^3+ab+b^2).$$

Следовательно, $f'(x)$ – специализация многочлена $f(x;t_1,t_2)$ при $t_1=a$ и $t_2=b.$ В частности, это означает, что $f'(x)\in K'[x];$ поскольку его корень b' порождает расширение M'/K' той же степени, что и степень многочлена $f'(x)$, этот многочлен неприводим. Поэтому все корни $f'(x)$ вместе с корнем b принадлежат нормальному расширению M'/K', и значит, $M'=K'(b)$ – поле разложения многочлена $f'(x)$.

§ 3. Построение генерирующего многочлена для циклической группы 8-го порядка над полем характеристики два

Используя построение C_4-расширений Галуа поля K характеристики два, будем строить согласно теореме Витта, циклические C_8-расширения Галуа.

Пусть K – поле характеристики 2 и пусть сначала M/K – циклическое расширение степени 4. Согласно теореме 2.2, существуют такие элементы $a, b \in K,\ \ a \in L,\ \ b \in M,$ что $a^2 + a = a,\ \ b^2 + b = b + aa$. При этом $L = K(a),\ \ M = K(b)$, а автоморфизм s, порождающий группу Галуа расширения M/K, можно выбрать так, что $s(a) = a+1,\ \ s(b) = b+a$. Отсюда получаем:

$$s^2(a) = s(s(a)) = s(a+1) = a+1+1 = a,\ \ s^2(b) = s(s(b)) = s(b+a) = (b+a)+(a+1) = b+1,$$

$$(s-1)(ab) = (a+1)(b+a) - ab = b + a^2 + a = b + a.$$

Следовательно,

$$Sp_{M/K}(ab) = (s^2+1)(s+1)(ab) = (s^2+1)(b+a) = (b+1+a)+(b+a) = 1.$$

Далее,

$$(ab)^2 - ab = (a+a)(b+b+aa) - ab = ab + (a^2+b)a + ab + aa^2 + ab =$$

$$ab + (a^2+a+b)a + a(b+a) = ab(s-1)a + (a^2+a+b)(s-1)b + a(s-1)(ab) =$$

$$= (s-1)(aba + (a^2+a+b)b + aab).$$

По теореме Витта получаем теперь, что для произвольного расширения N/K 8-ой степени, содержащего поле M, существует такой элемент $c \in K$, что поле N получается присоединением к M корня g многочлена $g(x) = x^2 - x - (c + aba + (a^2+a+b)b + aab)$; при этом $N = K(g)$. Поскольку каждое циклическое расширение N/K степени 8 содержит подрасширение M/K, являющееся циклическим расширением 4-ой степени, мы получаем отсюда (используя теорему 2.2) следующую теорему.

Теорема 3.1. Пусть K – поле характеристики 2, N/K – циклическое расширение степени 8. Тогда существуют такие элементы $a, b, c \in K$, $a, b, g \in N$, что:

$$a^2 + a = a, \quad b^2 + b = b + aa, \quad g^2 + g = c + aba + (a^2 + a + b)b + aab.$$

При этом $N = K(g)$, а подполя $L = K(a)$, $M = K(b)$ поля N имеют над K соответственно степени 2 и 4.

Теорема 3.3. Пусть $K_1 = K(t_1, t_2, t_3)$, $L_1 = K_1(a)$, $M_1 = L_1(b)$, $N_1 = M_1(g)$, где a – корень многочлена $g(z) = z^2 + z + t_1 \in K_1[z]$, b – корень многочлена $h(y) = y^2 + y + t_2 + t_1 a \in L_1[y]$, g – корень многочлена $p(x) = x^2 + x + t_3 + t_1 t_2 a +$ $+ (t_1^2 + t_1 + t_2)b + t_1 ab \in M_1[x]$. Тогда расширение N_1 / K_1 является расширением Галуа, группа Галуа которого является циклической группой 8-го порядка. При этом $N_1 = K_1(g)$.

Доказательство. Ясно, что многочлен $g(z)$ неприводим над полем K_1, многочлен $h(y)$ неприводим над L_1, а многочлен $p(x)$ неприводим над M_1, так что $[L_1 : K_1] = [M_1 : L_1] = [N_1 : M_1] = 2$, а значит, тогда, $[M_1 : K_1] = 4$. По теореме 2.3 расширение M_1 / K_1 является циклическим расширением степени 4, и можно так выбрать порождающий его группу Галуа автоморфизм s, что $s(a) = a + 1$, $s(b) = b + a$. Как показано в начале параграфа, тогда:

$$Sp_{M_1/K_1}(ab) = 1, \quad (ab)^2 - ab = (s - 1)(t_1 t_2 a + (t_1^2 + t_1 + t_2)b + t_1 ab).$$

Поскольку поле N_1 получается из поля M_1 присоединением корня g уравнения $x^2 - x = t_3 + t_1 t_2 a + (t_1^2 + t_1 + t_2)b + t_1 ab$, расширение N_1 / K_1 является по теореме Витта циклическим расширением степени 8, причем $N_1 = K_1(g)$.

Сохраним обозначения теоремы 3.2 до конца параграфа. Элемент g является не только корнем многочлена $p(x)$, но и корнем многочлена

$$f(x;t_1,t_2,t_3)=\prod_{s\in Gal(M_1/K_1)} sp(x)=p(x)\cdot s\,(p(x))\cdot s^{\,2}(p(x))\cdot s^{\,3}(p(x)),$$

все коэффициенты которого принадлежат полю $K_1=K(t_1,t_2,t_3)$. Поскольку корень g многочлена $f(x;t_1,t_2,t_3)$ порождает расширение N_1/K_1 той же степени, что и степень самого многочлена, этот многочлен неприводим. Следовательно, все корни $f(x;t_1,t_2,t_3)$ вместе с корнем g принадлежат нормальному расширению N_1/K_1, а потому, $N_1=K_1(g)$ – поле разложения многочлена $f(x;t_1,t_2,t_3)$, и группа Галуа этого многочлена над полем $K(t_1,t_2,t_3)$ совпадает с группой Галуа расширения N_1/K_1, т.е. является циклической 8-го порядка.

Теорема 3.3. Пусть K – поле характеристики 2. Тогда определенный выше многочлен $f(x;t_1,t_2,t_3)\in K[x,t_1,t_2,t_3]$ является генерирующим для группы C_8 над полем K.

Доказательство. Докажем второй пункт в определении генерирующего многочлена (первый пункт был доказан выше). Покажем, что если K' – какое-то расширение поля K, а N'/K' – циклическое расширение степени 8, то существуют такие элементы $a,b,c\in K'$, что N' – поле разложения специализации многочлена $f(x;t_1,t_2,t_3)$ при $t_1=a$, $t_2=b$, $t_3=c$.

По теореме 3.1 существуют элементы $a,b,c\in K'$, $a',b',g'\in N'$, такие, что $N'=K'(g')$, $a'^2+a'=a$, $b'^2+b'=b+aa'$, а также $g'^2+g'=c+aba'+(a^2+a+b)b'+aa'b'$.

Положим $L'=K'(a')$, $M'=L'(b')$. Каждая из степеней $[L':K']$, $[M':L']$, $[N':M']$ не больше 2, а их произведение равно $[N':K']=8$. Поэтому $[L_1:K_1]=[M_1:L_1]=[N_1:M_1]=2$, и следовательно, M'/K' – расширение степени 4, содержащееся в расширении степени 8. Значит, M'/K' – циклическое расширение степени 4. Тогда, по теореме 2.2 образующую s' группы Галуа этого расширения можно выбрать так, что $s'(a')=a'+1,\ \ s'(b')=b'+a'.$

Пусть j – гомоморфизм кольца $K[t_1,t_2,t_3]$ в поле K', тождественный на K и отображающий элементы t_1,t_2,t_3 в a,b и c; продолжим его до гомоморфизма из $K[t_1,t_2,t_3][a,b]$ в N', положив $j(a)=a',\ \ j(b)=b'.$ Такое определение корректно, так как

$$j(a^2+a)=j(t_1)=a=a'^2+a',\quad j(b^2+b)=j(t_2+t_1a)=b+aa'=b'^2+b'.$$

Кроме того, $js=s'j$:

$$j(s(a))=j(a+1)=a'+1=s'(a')=s'(j(a)),$$

$$j(s(b))=j(b+a)=b'+a'=s'(b')=s'(j(b)).$$

Заметим, что многочлен $p'(x)=x^2+x+c+aba'+(a^2+a+b)b'+aa'b'$ может быть представлен в виде:

$$p'(x)=j(x^2+x+t_3+t_1t_2a+(t_1^2+t_1+t_2)b+t_1ab)=j(p(x));$$

поэтому многочлен

$$f'(x)=\prod_{i=0}^{3}s'^i(p'(x))=\prod_{i=0}^{3}s'^i(j(p(x))=j\left(\prod_{i=0}^{3}s^i(p(x))\right)=j(f(x;t_1,t_2,t_3))$$

является специализацией многочлена $f(x;t_1,t_2,t_3)$ при $t_1=a,\ \ t_2=b,\ \ t_3=c.$ В частности, это значит, что $f'(x)\in K'[x]$; поскольку корень g' порождает расширение N'/K' той же степени, что и степень многочлена $f'(x)$, этот многочлен неприводим. Следовательно, все корни $f'(x)$ вместе с корнем g' принадлежат нормальному расширению N'/K', а потому $N'=K'(g')$ – поле разложения $f'(x)$.

Укажем теперь явный вид найденного нами C_8-генерирующего многочлена $f(X;t_1,t_2,t_3)$:

$$f(X;t_1,t_2,t_3)=X^8+X^6t_1+X^5t_1+X^4[t_2^2t_1^2+t_1^5+t_3t_1+t_2t_1^3+t_2t_1^2+t_2^2+1+t_2t_1+t_1]+X^3t_1+$$

$$+X^2[t_3^2t_1+t_3t_1+t_2^2+t_2t_1+t_2^3t_1^2+t_2^3t_1+t_2t_1^5+t_1^7+t_2t_1^3+t_1^5+t_2t_1^4+t_2t_1^2]+X[t_2^3t_1^2+t_2^2t_1^4+t_2^2t_1^2+$$

$$+t_2t_1^5+t_1^3+t_1^2+t_2t_1^4+t_1^6+t_2^3t_1+t_3^2t_1+t_2^4t_1^2]+t_3^4+t_2^2t_3^3+t_2^2t_3^2t_1^2+t_3^2t_1^5+t_3^2t_1^3+t_3^2t_1^4+t_3^3t_1+t_2t_3^2t_1^3+$$
$$+t_2t_3^2t_1^2+t_2t_3^2t_1+t_2^3t_3t_1^2+t_2^3t_3t_1+t_2^2t_3t_1^2+t_2t_3t_1^5+t_2t_3t_1^4+t_3t_1^7+t_2^4t_1^6+t_2^6+t_1^{11}+t_2^4t_1^3+t_2^4t_1^4+t_2^5t_1^2+$$
$$+t_2^3t_1^6+t_2^3t_1^4+t_2t_1^9+t_2t_1^5+t_2^4t_1^2+t_2^2t_1^6+t_2^3t_1^3.$$

§ 4. Построение генерирующего многочлена для циклической группы 16-го порядка над полем характеристики два

Используя построения генерирующих многочленов для циклических групп 4-го и 8-го порядков можно построить генерирующий многочлен для циклической группы 16-го порядка. Результатом такого построения являются следующее утверждение.

Теорема 4.1. Пусть $K_1=K(t_1,t_2,t_3,t_4)$, $L_1=K_1(a)$, $M_1=L_1(b)$, $N_1=M_1(g)$, $T_1=N_1(q)$, где a – корень многочлена $g(z)=z^2+z+t_1\in K_1[z]$, b – корень многочлена $h(y)=y^2+y+t_2+t_1a\in L_1[y]$, g – корень многочлена $p(x)=x^2+x+$ $+t_3+t_1t_2a+(t_1^2+t_1+t_2)b+t_1ab\in M_1[x]$, q – корень многочлена $r(x)=x^2+x+t_4+$
$$+(t_1t_2t_3+t_3t_1+t_1^5+t_1^3t_2+t_2^2+t_1^4+t_1t_2)a+(t_2t_3+t_2^2t_1+t_1t_3+t_1^4+t_1^2t_2^2+t_1^2t_3+t_1^2t_2+t_1^3+t_1t_2b)b+$$
$$+(t_3+t_2^2+t_1^4+t_1t_2)g+(t_1t_3+t_1^3t_2+t_1t_2^2+t_3+t_2^2+t_1^4+t_1^2t_2+t_2)ab+t_1t_2ag+(t_2+t_1+t_1^2)bg+$$
$aabg$. Тогда расширение T_1/K_1 – расширение Галуа, группа Галуа которого является циклической группой 16-го порядка. При этом $T_1=K_1(q)$.

Как и в предыдущих параграфах, аналогичным образом, устанавливается, что элемент q является корнем не только многочлена $r(x)$, а но и корнем многочлена

$$f(x;t_1,t_2,t_3,t_4)=\prod_{s\in Gal(M_1/K_1)}s\,(p(x))=p(x)\cdot s\,(p(x))\cdot s^{\,2}(p(x))\cdot s^{\,3}(p(x))\cdot s^{\,4}(p(x)),$$

причем его группа Галуа является циклической группой 16-го порядка. Отсюда, по аналогии с доказательством теоремы 3.3, справедлива теорема:

Теорема 4.3. Пусть K – поле характеристики два. Тогда определенный выше многочлен $f(x;t_1,t_2,t_3,t_4)\in K[x,t_1,t_2,t_3,t_4]$ является C_{16}-генерирующим многочленом над полем K.

Замечание. Очевидно, согласно нашей конструкции, мы можем построить в неявном виде (и доказать их существование) генерирующие многочлены для циклических групп порядков 2^n $(n=1,2,3,...)$ над полем характеристики два, однако нахождение таких многочленов в явном виде слишком громоздко.

Список используемой литературы

1. Dentzer R. Polynomials with cyclic Galois group // Comm. in Algebra. – 1995. – vol. 23. № 4. – p. 1593-1603.
2. Jensen C.U., Ledet A., Yui N. Generic polynomials. – Cambridge, 2002, p. 258.
3. Kemper G. Das Noethersche Problem und generische Polynome, Dissertation, Universitat Heidelberg, 1994.
4. Miyake K. Linear fractional transformations and cyclic polynomials // Adv. Stud. Contemp. Math. (Pusan). – 1999. – vol. 1. – p. 137 – 142.
5. Nakano S. On generic polynomials of odd degree // Proc. Japan Acad. – 2000. – vol. 76. Ser A.
6. Saltman D. Generic Galois extensions and problem in field theory // Advances in Math. – 1982. – vol. 43. – p. 250 – 283.
7. Schneps L. On cyclic field extensions of degree 8. // Math. Scand. – 1992. – vol. 71. – p. 24 – 30.
8. Smith G.W. Generic cyclic polynomials of odd degree // Comm. Alg. – 1991. – vol. 19. – p. 3367 – 3391.
9. Witt E. Konstruktion von galoisschen Korpern der Characteristik p zu vorgegebener Gruppe der ordnung p^f // Reine Angew. Math. – 1936. – vol. 174. – p. 237 – 245.