УДК 330.46

ОБОБЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАЛОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Ариничев И.В.
ассистент кафедры высшей математики
Кубанский государственный аграрный университет, г.Краснодар, Россия

Предложена и верифицирована математическая модель основных производственных фондов, которая может использоваться малыми предприятиями при обосновании плановых решений производственной деятельности

Ключевые слова: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, МАЛОЕ ПРЕДПРИЯТИЕ

UDC 330.46

GENERALIZED MATHEMATICAL MODEL OF A SMALL ENTERPRISE

Arinichev I.V.
assistant of higher mathematics faculty
Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

The mathematical model of the basic production assets which one can be used by a small enterprises at the justification of planned solutions of productive activity is tendered and verified

Keywords: MATHEMATICAL MODEL, SMALL ENTERPRISE

Результат процесса производства в малых предприятиях складывается под влиянием многочисленных и разнообразных факторов этого производства, самыми значимыми из которых являются капитал, и трудовые ресурсы. Для того чтобы с высокой степенью точности прогнозировать во времени значение объема выпуска продукции малого предприятия, необходимо оценить изменение указанных факторов во времени.

В настоящее время в существующих работах при построении динамической модели капитала (в непрерывном времени), предполагалось, что основные производственные фонды могут развиваться либо за счет собственной прибыли компании и финансовой поддержке государства, либо за счет прибыли и заемных ресурсов.

В настоящей работе эти случаи обобщены, а также вводится величина выбытия капитала (амортизационные отчисления), например, как в модели Солоу [2].

При разработке модели используются следующие гипотезы: Производственная функция имеет вид:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)).$$

(1)

Здесь $F(K,L)$- непрерывная однородная функция первой степени, $K(t)$ – стоимость основных производственных фондов в момент времени t, $L(t)$ – затраты живого труда. Считается, что время непрерывно, малое предприятие может развиваться за счет внутренних источников (прибыли) $M(t)$, за счет единовременно привлекаемого кредитного ресурса A_0, за счет внешней финансовой поддержки оказываемой на безвозмездной основе $I(t)$. Кроме этого, будем считать, что производственная функция $Y = F(K,L)$ имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial y}{\partial \kappa}$ в области $(-\infty;+\infty) \times (K_0 + L_0 - \varepsilon; K_0 + L_0 + \varepsilon)$, а функция $I(t)$ непрерывна в промежутке $(t_0;+\infty)$, где t_0 – начальный момент моделирования, K_0, L_0– стоимость капитала и затраты труда соответственно в момент времени t_0, ε - произвольное положительное число.

Основные производственные фонды – единственный лимитирующий фактор, определяющий выпуск продукции. Малое предприятие функционирует при неизменной технологии, что предполагает постоянство его фондоотдачи f [1].

Будем считать, что погашение долга компании (кредита) происходит равномерно в непрерывном времени,

Легко показать, что при условии равномерного погашения долга выданного на период T лет величина выплачиваемой суммы основного долга за малый времени Δt равна:

$$\Delta\tilde{S} = \frac{K_0}{T}\Delta t,$$

(2)

а сумма начисленных процентов за тот же промежуток времени Δt равна:

$$\Delta\tilde{s} = \frac{A_0 rT}{2T}\Delta t = \frac{A_0 r}{2}\Delta t,$$

(3)

здесь A_0 сумма единовременного кредита выданного в начальный момент времени t_0 , r – годовая процентная ставка по кредиту,

Константа $\Delta\tilde{s}$ обуславливает рост удельной себестоимости выпущенной продукции, и следовательно влияет на общую прибыль компании:

$M^{об}(t+\Delta t) = M^{об}(\mathrm{t}) + (1-c)P(t)\Delta t - \Delta\tilde{s}$, т.е.

$\Delta M^{об}(t) = (1-c)P(t)\Delta t - \Delta\tilde{s}$,

(4)

здесь c удельная себестоимость выпуска продукции в стоимостном выражении,$M^{об}(t)$- общая прибыль компании в момент t (без налога на прибыль), $P(t)$ выпуск продукции в момент t в стоимостном выражении, Зависимость между $P(t)$ и производственной функцией $Y(t)$выражается соотношением:

$P(t) = f \cdot Y(t) = f \cdot F(K, L)$.

(5)

Большинство малых предприятий в настоящее время перешли на упрощенную систему налогообложения (УСН) и платят только налог с прибыли, поэтому будем считать, что величина налоговых отчислений $N(t)$ в момент времени t равна:

$N(t) = c_1 M^{об}(t)$,

(6)

где c_1 – годовая ставка налога на прибыль.

Отсюда находим чистую прибыль компании:

$M(t) = M^{об}(t) - N(t) = (1-c_1)M^{об}(t)$,

(7)

Считая величину выбытия капитала W пропорциональной его величине $K(t)$

$W = \delta K(t)$,

где δ – норма выбытия, и замечая, что константа $\Delta\tilde{S}$ уменьшает чистую прибыль малого предприятия, запишем уравнение для изменения капитала компании:

$$K(t+\Delta t)-K(t)=\zeta\left(\Delta M(t)-\Delta\tilde{S}\right)-\delta\Delta W(t)+I(t)\Delta t,$$

(8)

ζ - доля чистой прибыли, реинвестируемой в капитал.

Замечая, что

$$\Delta M(t)=(1-c_1)\Delta M^{\text{об}}(t)=(1-c_1)(1-c)P(t)\Delta t-(1-c_1)\Delta\tilde{s},$$

(9)

получаем

$$K(t+\Delta t)-K(t)=\zeta(1-c_1)(1-c)P(t)\Delta t-\zeta(1-c_1)\frac{A_0 r}{2}\Delta t-\zeta\frac{K_0}{T}\Delta t-\delta K(t)\Delta t+I(t)\Delta t$$

,

Деля обе части уравнения на Δt

$$\frac{K(t+\Delta t)-K(t)}{\Delta t}=\zeta(1-c_1)(1-c)P(t)-\zeta(1-c_1)\frac{A_0 r}{2}-\zeta\frac{K_0}{T}-\delta K(t)+I(t),$$

вспоминая, что $P(t)=f\cdot F(K,L)$, и переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим

$$\frac{dK}{dt}=\zeta(1-c_1)(1-c)f\cdot F(K,L)-\zeta(1-c_1)\frac{A_0 r}{2}-\zeta\frac{K_0}{T}-\delta K(t)+I(t)\Delta t,$$

(10)

обозначим $\mu=-\zeta(1-c_1)\frac{A_0 r}{2}-\zeta\frac{K_0}{T}$, тогда

$$\frac{dK}{dt}=\zeta(1-c_1)(1-c)f\cdot F(K,L)-\delta K(t)+\mu+I(t).$$

(11)

Считая, что годовой темп прироста числа занятых – число постоянное ν, запишем для $L(t)$ дифференциальное уравнение:

$$\frac{dL}{dt}=\nu L,$$

(12)

решая которое получим

$L(t) = \lambda e^{t}$.

(13)

Накладывая начальное условие $L(t_0) = L_0$, получим

$L(t) = L_0 (e)^{t-t_0}$,

Подставляя полученное решение в уравнение, получим уравнение:

$$\frac{dK}{dt} = \zeta(1-c_1)(1-c)f \cdot F(K, L_0 e^{t-t_0}) - \delta K(t) + \mu + I(t).$$

Обозначив $\xi = \zeta(1-c_1)(1-c)f$, окончательно имеем задачу:

$\frac{dK}{dt} = \xi F(K, L_0 e^{t-t_0}) - \delta K(t) + \mu + I(t)$,

(14)

$K(t_0) = K_0 + A_0$.

(15)

Данное уравнение описывает изменение основных производственных фондов малого предприятия.

Докажем существование и единственность решения задачи Коши (14)-(15). Согласно [3], задача Коши (14),(15) имеет и притом единственное непрерывное решение в некоторой окрестности точки t_0 если:

a) функция $g(t,K) = \xi F(K, L_0 e^{t-t_0}) - \delta K + \mu + I(t)$, определяющая правую часть уравнения (14) является непрерывной функцией двух переменных в замкнутой области:

$D\colon t_0 - a \le t \le t_0 + a, K_0 + L_0 - b \le K \le K_0 + L_0 + b$,

(16)

b) функция $g(t,K)$ удовлетворяет по переменной K условию Липшица в области D.

Условие b) всегда выполнено, если функция $g(t,K)$ имеет в каждой точки области D частную производную, ограниченную во всей области.

Функция $g(t,K)$ очевидно непрерывна в любой области вида (16) (как композиция и сумма непрерывных функций). Частная производная $g_K(t,K)$ непрерывна в любой области вида (16) (как сумма и композиция непрерывных функций) не содержащей начало координат, и следовательно ограниченна в ней. Т.к. $K_0 + L_0 > 0$, число b очевидно можно выбрать так, чтобы $K_0 + L_0 - b > 0$. Число a можно взять любым. В полученной области выполнены оба условия теоремы Коши, и следовательно задача (14),(15) имеет единственной решение в некоторой окрестности вида $(t_0 - h, t_0 + h)$. При этом, если указанный интервал не выходит за область D, то решение может быть продолжено вплоть до границы D [3]. Так как, a может быть выбрано произвольно, то можно считать, что задача (14), (15) имеет единственное решение на промежутке (t_0, ∞),

В качестве примере рассмотрим два наиболее распространенных в малых предприятиях вида производственных функций:

-линейная производственная функция

$$F_1(K,L) = \lambda_1 K + \lambda_2 L,$$

(17)

-производственная функция Кобба-Дугласа

$$F_2(K,L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}.$$

(18)

Тогда для линейной производственной функции уравнение (17) преобразуется следующим образом

$$\frac{dK}{dt} = K(t) \cdot (\xi\lambda_1 - \delta) + \xi\lambda_2\, L_0 e^{t-t_0} + \mu + I(t),$$

(19)

для нелинейной

$$\frac{dK}{dt} = \xi K^{\alpha} L_0^{\alpha} e^{\alpha(t-t_0)} - \delta K(t) + \mu + I(t).$$

(20)

Т.к. обе функции (17), (18) удовлетворяют условиям указанных во введении, то обе задачи Коши (19),(15) и (20),(15) имеют единственное решение.

Решение задачи (19),(15) имеет вид

$$K(t) = e^{(\xi\lambda_1-\delta)t}\frac{K_0+L_0}{e^{(\xi\lambda_1-\delta)t_0}} + \int_{t_0}^{t}\frac{\xi\lambda_2 L_0 e^{s-t_0}+\mu+I(s)}{e^{(\xi\lambda_1-\delta)s}}ds. \quad (21)$$

Уравнение (20) выгодно решать численно, с помощью какого-нибудь пакета прикладных программ (ППП), например MathCAD 14.

В качестве примера рассмотрим малое предприятие ООО «Консалтинг-Внешторг» и с помощью полученной модели опишем динамику изменения его основных производственных фондов.

ООО «Консалтинг-Внешторг» является представителем в России американской компании AMERICAN CONSTRUCTION TECHNOLOGIES LLC, которая занимается продвижением на Российский рынок американских строительных технологий в области модульного строительства жилых домов и нежилых помещений, металлокаркасного строительства высокоэтажных домов, а также звукоизолирующих заборов вдоль автотрасс, особо прочных фундаментов, искусственного облицовочного камня,

Параметры модели были определены статистически или названы экспертами компании:

$K_0 = 100$ дес. тыс. руб. – объем основных производственных фондов в момент времени $t = 0$;

$L_0 = 20$ человек – число сотрудников организации в момент $t = 0$;

$r = 18\%$ - годовая процентная ставка по кредиту;

$A_0 = 50$ дес. тыс. руб, – сумма заемных (кредитных) средств в момент $t = 0$;

$\zeta = 0{,}3$ – доля прибыли, отчисляемой на реинвестирование;

$c_1 = 18\%$ - ставка налога на прибыль;

$c = 0{,}1$ - удельная себестоимость выпуска продукции;

$\nu = 0{,}2$ - годовой темп прироста числа занятых;

$I(t) = 0$ – безвозмездная финансовая поддержка;

В работе [2] было показано, что производственная функция данной компании может быть представлена в виде (18). Там же были определены коэффициенты:

$f = 4$ - коэффициент фондоотдачи компании;

$\alpha = 0{,}72$ – коэффициент эластичности капитала;

Подставляя полученные значения, получим уравнение описывающее изменение капитала компании в течение двух лет (2008-2009) года:

$$\frac{dK}{dt} = 2{,}05K^{0{,}72}1{,}2^{0{,}28t} - 0{,}05K - 15{,}1,$$

(21)

$$K(0) = 150.$$

(22)

Численное решение этой задачи, а также средние значения основных производственных фондов, предоставленные руководством компании приведены в таблице 1 в виде сетки с шагом один месяц.

Таблица 1 – Теоретические и эмпирические значения капитала компании ООО «Консалтинг-Внешторг» за 2008-2009 гг.

Номер месяца	Капитал	Капитал
1	150	150
2	154,687	155
3	159,533	162
4	164,543	163
5	169,72	164
6	175,071	170
7	180,599	179

8	186,31	190
9	192,209	192
10	198,301	203
11	204,591	204
12	211,085	206
13	217,788	212
14	224,706	214
15	231,844	223
16	239,209	230
17	246,806	238
18	254,642	244
19	262,723	250
20	271,056	262
21	279,646	270
22	288,501	279
23	297,628	280
24	307,033	302

Т.к. решение задачи (21)-(22) незначительно отличается от реальных значений основных производственных фондов, то модель (1),(14),(21),(22) может считаться адекватной, статистически значимой и может активно использоваться многими российскими малыми предприятиями при обосновании плановых решений производственной деятельности.

Литература:

1. Хачатрян, С.Р. Методы и модели решения экономических задач/ С.Р. Хачатрян, М.В. Пинегина, В.П. Буянов. – М.: Экзамен, 2005. -384 с.
2. Колемаев, В.А. Экономико-математическое моделирование/ В.А. Колемаев.– М.: Юнити - Дана, 2005. – 295 с.
3. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений/ В.В. Степанов. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. – 468 с.
4. Ариничев, И.В. Математическая модель процесса производства в малых строительных фирмах/И.В. Ариничев, Е.А. Семенчин//Тр./КубГАУ.-2010.-Вып. 8(23)