УДК 539.3:532.5

УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ В ФИЗИЧЕСКИ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЯХ

Аршинов Г.А. Елисеев Н.И.

Кубанский государственный аграрный университет

Метод возмущений применяется для исследования дисперсионных волн в геометрически нелинейных стержнях из линейно- и нелинейно-вязкоупругого материала. Выведены эволюционное уравнение Кортевега де Вриза – Бюргерса для линейно-вязкоупругого и модифицированное уравнение для нелинейно-вязкоупругого стержня.

Построим одномерную модель колебаний, учитывающую в определенной степени инерцию поперечных движений стержня. Отнесем бесконечный стержень неизменного поперечного сечения, свободный от внешних объемных и поверхностных воздействий, к системе координат, направив ось x вдоль оси стержня, а оси y и z расположим в одном из поперечных сечений.

Аппроксимируем перемещения точек стержня функциями [1]

$$u_1 = u(x,t), u_2 = -\nu y u_x, u_3 = -\nu z u_x, \tag{1}$$

где u_1, u_2, u_3 – соответственно перемещения по осям x, y, z, t – время, ν - коэффициент Пуассона.

Буквенные индексы, которые содержат функции (1), определяют частную производную от функции по указанной переменной, т.е.

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{и т.д.}$$

Конечные деформации стержня зададим соотношениями:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}), \tag{2}$$

где индекс после запятой определяет частную производную от функции по соответствующей переменной, т.е. $u_{i,j} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1,2,3$, предполагается, что $x_1 = x,$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

Для описания реологических свойств стержня воспользуемся уравнениями линейной вязкоупругости [2]

$$\sigma_{ij}(t) = \lambda\theta(t)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(t) - \alpha \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)}[\lambda\theta(\tau)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\tau)]d\tau, \tag{3}$$

где $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – соответственно компоненты тензоров напряжений и деформаций; $\theta = \varepsilon_{ii}$ – объемное расширение, δ_{ij} – символы Кронекера; $\lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ – параметры Ламе; α, β - константы, определяющие реологические свойства стержня; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона.

Для упрощения исследования заменим интегральный оператор в (3) дифференциальным, разлагая функцию $f(\tau)=\lambda\theta(\tau)\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}(\tau)$ в ряд Тейлора по степеням $(t-\tau)$. Ограничиваясь двумя слагаемыми, что возможно для βt >>1, получаем

$$\sigma_{ij}=L(\lambda\theta\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}), \qquad (4)$$

где оператор $L=\frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial t}+(1-\frac{\alpha}{\beta})$ и действует на функцию $f(t)$ по правилу

$$Lf=\frac{\alpha}{\beta^2}f_t+(1-\frac{\alpha}{\beta})f\ .$$

Формулы (4) можно представить в развернутом виде

$$\sigma_{11}=L\left\{Eu_x+\frac{1}{2}\left[\left((\lambda+2\mu)+2\nu^2\lambda\right)u_x^2+(\lambda+2\mu)\nu^2r^2u_{xx}^2\right]\right\}$$

$$\sigma_{22}=\sigma_{33}=L\left\{\frac{1}{2}\left[\left(2(\lambda+\mu)\nu^2+\lambda\right)u_x^2+\lambda\nu^2r^2u_{xx}^2\right]\right\}$$

$$\sigma_{12}=L[\mu y\left(-\nu u_{xx}+\nu^2u_xu_{xx}\right)]$$

$$\sigma_{13}=L[\mu z\left(-\nu u_{xx}+\nu^2u_xu_{xx}\right)]$$

или

$$\sigma_{11}=L[E\left(u_x+A_1u_x^2+A_2r^2u_{xx}^2\right)]$$

$$\sigma_{22}=\sigma_{33}=L[E\left(B_1u_x^2+B_2r^2u_{xx}^2\right)]$$

$$\sigma_{12}=L\left[\frac{Ey}{2(1+\nu)}\left(-\nu u_{xx}+\nu^2u_xu_{xx}\right)\right]$$

$$\sigma_{13} = L\left[\frac{EZ}{2(1+\nu)}\left(-\nu u_{xx} + \nu^2 u_x u_{xx}\right)\right],$$

где

$$A_1 = a\left(2\nu^3 - \nu + 1\right), \qquad B_1 = a\nu\left(2\nu - 2\nu^2 + 1\right),$$

$$A_2 = a\nu^2(1-\nu), \quad B_2 = a\nu^3, \quad a = \frac{1}{2(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Уравнение движения стержня получим из вариационного принципа

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \{\rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i - \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\} dV = 0, \tag{5}$$

где точкой обозначена производная по t, ρ – плотность материала стержня, $\delta\varepsilon_{ij}$ – вариации деформаций, δu_i - вариации перемещений, а тройной интеграл вычисляется по объему стержня.

Вычислим вариации деформаций.

$$\delta\varepsilon_{11} = \delta u_x + u_x \delta u_x + \nu^2 r^2 u_{xx} \delta u_{xx}$$

$$\delta\varepsilon_{22} = \delta\varepsilon_{33} = (-\nu + \nu^2 u_x)\delta u_x$$

$$\delta\varepsilon_{12} = -\frac{\nu y}{2}\delta u_{xx} + \frac{\nu^2 y}{2}(u_{xx}\delta u_x + u_x \delta u_{xx})$$

$$\delta\varepsilon_{13} = -\frac{\nu z}{2}\delta u_{xx} + \frac{\nu^2 z}{2}(u_{xx}\delta u_x + u_x \delta u_{xx})$$

или в операторной форме

$$\delta\varepsilon_{11} = [-\frac{\partial}{\partial x} - u_x \frac{\partial}{\partial x} + \nu^2 r^2 u_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2}]\delta u$$

$$\delta\varepsilon_{22} = \delta\varepsilon_{33} = [\nu \frac{\partial}{\partial x} - \nu^2 u_x \frac{\partial}{\partial x}]\delta u$$

$$\delta\varepsilon_{12} = [-\frac{\nu y}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\nu^2 y}{2} u_{xx} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\nu^2 y}{2} u_x \frac{\partial^2}{\partial x^2}]\delta u$$

$$\delta\varepsilon_{13} = [-\frac{\nu z}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\nu^2 z}{2} u_{xx} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\nu^2 z}{2} u_x \frac{\partial^2}{\partial x^2}]\delta u \, .$$

Используя формулы (4) и вариации компонент деформации, определим вариацию внутренней энергии:

$$\delta w = L\{E[-\left(u_x + A_1 u_x^2 + A_2 r^2 u_{xx}^2 + u_x^2 + A_1 u_x^3 + A_2 r^2 u_x u_{xx}^2\right)_x +$$

$$+\nu^2 r^2\left(u_x u_{xx} + A_1 u_{xx} u_x^2 + A_2 r^2 u_{xx}^3\right)_{xx} +$$

$$+2\left(\nu B_1 u_x^2 + \nu B_2 r^2 u_{xx}^2 - \nu^2 B_1 u_x^3 - \nu^2 B_2 r^2 u_x u_{xx}^2\right)_x +$$

$$+\frac{r^2\nu^2}{4(1+\nu)}((-4_{xx} + \nu u_x u_{xx})_{xx} - \nu\left(-u_{xx}^2 + \nu u_x u_{xx}^2\right)_x +$$

$$+\nu\left(-u_x u_{xx} + \nu u_x^2 u_{xx}\right)_{xx})\ ]\ \}\delta u$$

или

$$\delta w = L\{E[-\left(u_{xx} 2A_1 u_x u_{xx} + 2A_2 r^2 u_{xx} u_{xxx} + 2u_x u_{xx} + 3A_1 u_x^2 u_{xx} +\right.$$

$$+A_2 r^2 u_{xx}^4 + 2A_2 r^2 u_x u_{xx} u_{xxx}\left.\right) + \nu^2 r^2\left(u_{xx}^2 + u_x u_{xxx} + A_1 u_{xxx} u_x^2 +\right.$$

$$+2A_1u_{xx}^2u_x+3A_2r^2u_{xx}^2u_{xxx}\big)_x+2\big(2\nu B_1u_xu_{xx}+2\nu B_2r^2u_{xx}u_{xxx}-$$

$$-3\nu B_1u_x^2u_{xx}-\nu B_2r^2u_{xx}^3-2\nu^2r^2B_2u_xu_{xx}u_{xxx}\big)+$$

$$+\frac{r^2\nu^2}{4(1+\nu)}\Big(u_{xxxx}-\big(2\nu u_xu_{xx}-\nu^2u_xu_{xx}\big)_{xx}-\nu\big(-u_{xx}^2+\nu u_xu_{xx}^2\big)_x\Big)\ \Big]\Big\}\delta u.$$

Подставляя значение вариации внутренней энергии в выражение (5), получим уравнение движения стержня:

$$\rho\big(-u_{tt}+\nu^2r^2u_{ttxx}\big)+L\Big\{E\Big[u_{xx}-\big(u\nu B_1-2A_1-2\big)u_xu_{xx}-\frac{\nu^2r^2}{4(1+\nu)}u_{xxxx}+$$

$$+\left(3\nu^2r^2-2A_2r^2+4\nu B_2r^2-\frac{\nu^3r^2}{1+\nu}\right)u_{xx}u_{xxx}+\left(6\nu^2r^2A_1-2A_2r^2-4\nu^2B_2r^2-\frac{3\nu^4r^2}{2(1+\nu)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\nu^3r^2}{2(1+\nu)}\right)u_xu_{xx}u_{xxx}-\big(3A_1+6\nu B_1\big)u_x^2u_{xx}-A_2r^2u_{xx}^4+\left(\nu^2r^2+\frac{\nu^3r^2}{2(1+\nu)}\right)u_xu_{xxxx}+$$

$$+\left(2\nu^2A_1r^2-2\nu^2B_2r^2+\frac{\nu^4r^2}{2(1+\nu)}\right)u_{xx}^3+\left(A_1\nu^2r^2-\frac{r^2\nu^4}{4(1+\nu)}\right)u_x^2u_{xxxx}+$$

$$+6A_2\nu^2r^4u_{xx}u_{xxx}^2+3A_2r^4\nu^2u_{xx}^2u_{xxxx}\Big]\Big\}=0.$$

После преобразования имеем:

$$\rho\big(-u_{tt}+\nu^2r^2u_{ttxx}\big)+LE\left\{\left[u_{xx}+\big(2A_1-4\nu B_1+2\big)u_xu_{xx}-\frac{\nu^2r^2}{4(1+\nu)}u_{xxxx}\right]+\right.$$

$$+z^2\left(2A_2-3\nu^2-4\nu B_2+\frac{\nu^3}{1+\nu}\right)u_{xx}u_{xxx}+r^2\big(2A_2-6\nu^2A_1+4\nu^2B_2+$$

$$+\frac{3\nu^4}{2(1+\nu)}+\frac{\nu^3}{2(1+\nu)}\ \big)u_xu_{xx}u_{xxx}+\big(3A_1+6\nu B_1\big)u_x^2u_{xx}+\alpha_2r^2u_{xx}^4-z^2\left(\nu^2+\frac{\nu^3}{2(1+\nu)}\right)u_xu_{xxxx}+$$

$$+r^2\left(-2\nu^2A_1+2\nu^2B_2-\frac{\nu^4}{2(1+\nu)}\right)u_{xx}^3+r^2\left(\frac{\nu^4}{4(1+\nu)}-A_1\nu^2\right)-6A_2\nu^2r^4u_{xx}u_{xxx}^3-$$

$$-3A_2\nu^2r^4u_{xx}^2u_{xxxx}\ \}=0.$$

Перейдем в последнем уравнении к безразмерным переменным

$$\xi=\frac{x}{l}-\frac{c}{l}t,\ \tau=\varepsilon\frac{c}{l}t,\ u*=\frac{u}{A},\ x^*=\frac{x}{d},\ y^*=\frac{y}{d},$$

где A – амплитудный параметр возмущения, l, d – соответственно характерные длина волны и поперечный размер стержня, $c-$скорость волны, $\varepsilon=\dfrac{A}{l}$ - характеристика нелинейности волнового процесса и допустим, что $\varepsilon=\dfrac{A}{l}$ – малый параметр, т.е. характерная длина волны l значительно превосходит амплитудный параметр A, а поперечные размер стержня и реологические постоянные α,β, определяют отношения порядков

$$\frac{\alpha c}{\beta^2 l}=O(\varepsilon),\qquad \frac{d}{l}=O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Пренебрегая членами порядка выше, чем ε, получаем уравнение движения стержня:

$$\frac{\rho c^2}{E}\left(-u_{\xi\xi}+2\varepsilon u_{\xi\tau}+\nu^2\frac{r^2}{l^2}u_{\xi\xi\xi\xi}\right)+\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)u_{\xi\xi}-\frac{\alpha c}{\beta^2 l}u_{\xi\xi\xi}+$$
$$+2(A_1-4\nu B_1+2)\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\varepsilon u_\xi u_{\xi\xi}-\frac{\nu^2r^2}{4(1+\nu)l^2}\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)u_{\xi\xi\xi\xi}=0 \qquad (6)$$

Представим функцию $u(\xi,\tau)$ в виде асимптотического разложения

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \mathbf{K}. \tag{7}$$

Учитывая введенные соотношения порядков и асимптотическое разложение (7), из уравнения (6) в нулевом приближении получим

$$\left[-\frac{\rho c^2}{E} + \left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\right] u_{0\xi\xi} = 0.$$

Так как $u_{0\xi\xi} \neq 0$, то из последнего уравнения следует, что скорость распространения волны

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}(1-\frac{\alpha}{\beta})} \tag{8}$$

Из первого приближения получаем условие разрешимости уравнения для u_1, которое дает известное уравнение Кортевега де Вриза – Бюргерса:

$$\psi_\tau + b_1 \psi \psi_\xi + b_2 \psi_{\xi\xi\xi} + b_3 \psi_{\xi\xi} = 0, \tag{9}$$

где

$$\psi = u_{0\xi},\ b_1 = 1-\frac{\alpha}{\beta},\ b_2 = \frac{\nu r^2 d^2}{2l^2\varepsilon},\ b_3 = \frac{\alpha}{2\rho c \beta^2 l \varepsilon}.$$

Как и в линейном случае, рассмотрим бесконечный стержень неизменного поперечного сечения, свободный от внешних объемных и поверхностных воздействий в системе координат с осью x, направленной вдоль линии центров тяжести поперечных сечений, и осями y, z, расположенными в одном из них.

Аппроксимируем перемещения точек стержня функциями (1), а конечные деформации стержня определим формулами (2).

Для описания реологических свойств стержня в отличие от предыдущего случая воспользуемся уравнениями квадратичной теории вязкоупругости [2]

$$\sigma_{ij}(t) = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \alpha \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)}[\lambda\theta(\tau)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\tau) + 2\mu\gamma\varepsilon_u^2(\tau)e_{ij}(\tau)]d\tau, \qquad (10)$$

где λ, μ - параметры Ламе, $\theta = \varepsilon_{ii}$ - объемное расширение, δ_{ij} - символы Кронекера $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\theta\delta_{ij}$ - компоненты девиатора деформаций, α, β, γ - физические константы материала, $\varepsilon_u^2 = \frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}$ - интенсивность деформаций.

Для упрощения исследования заменим интегральный оператор в уравнениях (10) дифференциальным, разлагая функцию

$$f(\tau) = \lambda\theta(\tau)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\tau) + 2\mu\gamma\varepsilon_u^2(\tau)e_{ij}(\tau)$$

в ряд Тейлора по степеням $(t-\tau)$. Ограничиваясь двумя слагаемыми ряда, что возможно для $\beta t >> 1$, получаем

$$\sigma_{ij} = P(\lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}) + 2\gamma\mu p(\varepsilon_u^2 e_{ij}),$$

где введены операторы

$$P = \frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial t} + (1 - \frac{\alpha}{\beta}), \qquad p = \frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\alpha}{\beta},$$

действующие на функцию $f(t)$ по правилу

$$Pf = \frac{\alpha}{\beta^2} f_t + (1 - \frac{\alpha}{\beta}) f, \qquad pf = \frac{\alpha}{\beta^2} f_t - \frac{\alpha}{\beta} f.$$

Вычислим компоненты девиатора деформаций:

$$e_{11} = \varepsilon_{11} - \frac{\theta}{3} = u_x + \frac{1}{2}(u_x^2 + \nu^2 r^2 u_{xx}^2) - \frac{1-2\nu}{3} u_x - \frac{1}{3}(\frac{1+2\nu^2}{2} u_x^2 + \frac{\nu^2 r^2}{2} u_{xx}^2)$$

$$e_{22} = e_{33} = \varepsilon_{22} - \frac{\theta}{3} = -\nu u_x + \frac{\nu^2}{2} u_x^2 - \frac{1-2\nu}{3} u_x - \frac{1}{3}(\frac{1+2\nu^2}{2} u_x^2 + \frac{\nu^2 r^2}{2} u_{xx}^2)$$

$$e_{12} = \varepsilon_{12} = -\frac{\nu y}{2} u_{xx} + \frac{\nu^2 y}{2} u_x u_{xx}$$

$$e_{13} = \varepsilon_{13} = -\frac{\nu z}{2} u_{xx} + \frac{\nu^2 z}{2} u_x u_{xx},$$

где $r^2 = z^2 + y^2$

или

$$e_{11} = \frac{2(1+n)}{3} u_x + \frac{1}{3}(1-n^2) u_x^2 + \frac{n^2 r^2}{3} u_{xx}^2$$

$$e_{22} = -\frac{1}{3}(1+n) u_x - \frac{1}{6}(1-n^2) u_x^2 - \frac{n^2 r^2}{6} u_{xx}^2$$

$$e_{12} = -\frac{ny}{2} u_{xx} + \frac{n^2 y}{2} u_x u_{xx}$$

$$e_{13} = -\frac{nz}{2} u_{xx} + \frac{n^2 z}{2} u_x u_{xx}.$$

Из вариационного принципа (5) получаем уравнение движения стержня, в котором перейдем к безразмерным переменным

$$\xi = \frac{x}{l} - \frac{c}{l}t, \ \tau = \varepsilon \frac{c}{l}t, \ u^* = \frac{u}{A}, \ x^* = \frac{x}{d}, \ y^* = \frac{y}{d},$$

где A – амплитудный параметр возмущения, l, d – соответственно характерные длина волны и поперечный размер стержня, $c -$скорость волны, $\varepsilon = \frac{A}{l}$ - характеристика нелинейности волнового процесса.

Допустим, что $\varepsilon = \frac{A}{l}$ – малый параметр, т.е. характерная длина волны l значительно превосходит амплитудный параметр A, а поперечные размер стержня и реологические постоянные α, β, γ определяют отношения порядков

$$\frac{\alpha c}{\beta^2 l} = O(\varepsilon), \qquad \gamma = O(\frac{1}{\varepsilon}), \ \frac{d}{l} = O(\sqrt{\varepsilon}),$$

где d - характерный размер поперечного сечения.

Опуская звездочки в выражениях для соответствующих безразмерных переменных, получим уравнение движения

$$\frac{\rho c^2}{E}\left[-u_{\xi\xi}+2\varepsilon u_{\xi\tau}-\varepsilon^2 u_{\tau\tau}+\varepsilon\nu^2\left(u_{\xi\xi\xi\xi}-2\varepsilon u_{\xi\xi\xi\tau}+\varepsilon^2 u_{\xi\xi\tau\tau}\right)\right]+$$

$$+(1-\frac{\alpha}{\beta})u_{\xi\xi}+\varepsilon(1-\frac{\alpha}{\beta})u_{\xi}u_{\xi\xi}+\frac{\alpha c}{\beta^2 l}(\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial\xi})\cdot[u_{\xi\xi}+\varepsilon u_{\xi}u_{\xi\xi}]+ \quad (11)$$

$$+\varepsilon^2 a\gamma u_{\xi}^2 u_{\xi\xi}=0,$$

где $a=\dfrac{\alpha}{\beta(1+\nu)}$.

Представим функцию u асимптотическим разложением $u=u_0+\varepsilon u_1+\ldots$. Подставляя это разложение в уравнение движения (11) и учитывая введенные отношения порядков, в нулевом приближении приходим к уравнению

$$\left[-\frac{\rho c^2}{E}+\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]u_{0\xi\xi}=0,$$

где E - модуль упругости. Так как $u_{0\xi\xi}\neq 0$, то из полученного уравнения скорость распространения возмущения $c=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}(1-\dfrac{\alpha}{\beta})}$.

Первое приближение дает модифицированное уравнение Кортевега де Вриза – Бюргерса

$$\psi_{\tau}+b_1\psi\psi_{\xi}-b_2\psi^2\psi_{\xi}+b_3\psi_{\xi\xi}+b_4\psi_{\xi\xi\xi}=0 \quad (12)$$

где $\psi=u_{0\xi}$, $b_1=1-\dfrac{\alpha}{\beta}$, $b_2=a\gamma\varepsilon$, $b_3=-\dfrac{\alpha c}{\beta^2 l\varepsilon}$, $b_4=\dfrac{\nu^2 r^2 d^2}{2\varepsilon l^2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Аршинов Г.А., Могилевич Л.И. Статические и динамические задачи вязкоупругости. Саратов: Изд-во СГАУ, 2002. 152 с.

2. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. М., 1972.