

УДК 519.6;519.17

UDC 519.6;519.17

РАСПОЗНАВАНИЕ ПРЕДФРАКТАЛЬНОГО ГРАФА ПОРОЖДАЕМОГО ДВУМЯ ПОЛНЫМИ ЗАТРАВКАМИ**RECOGNIZING OF PREFRACTAL GRAPH ARISING FROM OF TWO FULL ZATRAVKAS**

Хапаева Лёля Халисовна

L.H. Hapaeva

*Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия, Черкесск, Россия**North-Caucasian state humane-technological Academy, Cherkessk, Russia*

В статье рассмотрена частная задача распознавания предфрактального графа, порожденного парой полных затравок чередованием. Предложенный алгоритм распознавания решает эту задачу за полиномиальное время.

The private task of prefractal graph recognizing, arising from pair of full zatrovka by alternations, was examined. The offered algorithm of recognizing decide this task during the polynomial time.

Ключевые слова: ПРЕДФРАКТАЛЬНЫЙ ГРАФ. РАСПОЗНАВАНИЕ ГРАФА. СЕТЕВЫЕ СИСТЕМЫ. ЗАТРАВКА

Key words: PREFRACTAL GRAPF. GRAPH RECOGNIZING. NET SYSTEM. ZATRAVKA.

Развивающаяся экономика и глобализационные процессы вынуждают сетевые системы [6] развивать, адаптировать, оптимизировать свою сетевую структуру под сильно изменчивую конкурентную среду, и под новую геополитическую конъюнктуру. В такой ситуации в регулярных изменениях сетевых структур прослеживаются закономерности. Сетевые структуры не только теряют свою стационарность (фиксированность), но и приобретают признаки динамических систем. Сетевые структуры приобретают признаки и свойства иерархических и масштабно-инвариантных структур. Процессы изменения, развития, поведения сетевых структур можно объединить общим понятием “*структурная динамика*”.

Интересные и оригинальные результаты были получены при моделировании сложных иерархических систем самоподобными или фрактальными графами [2]. Своим рождением фрактальные (предфрактальные) графы обязаны синтезу идей синергетики [3] и нелинейной динамики [4], фракталов [8], и теории графов [1].

Исследования в области структурной динамики ведутся в научных школах профессора Кульбы В.В. [7], член-корреспондента РАН Новикова Д.А. [8], профессора Кочкарова А.М. [4] в таких научно-исследовательских институтах и ведущих ВУЗах России, как Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Институт прикладной математики им.

М.В. Келдыша РАН, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Карачаево-Черкесская государственная технологическая академия. Работы членов школ профессора Кульбы В.В. и член-корреспондента Новикова Д.А. посвящены в большей степени вопросам взаимодействия между элементами сложных иерархических систем, чем вопросам изменчивости и динамики самих сетевых структур. В работах же школы профессора Кочкарова А.М., наоборот, первичное внимание уделено именно вопросам поведения-развития сетевых структур.

При исследовании сетевых систем, необходимо решать не только задачу распознавания структуры уже существующей сетевой системы, но и задачу распознавания самого процесса развития-изменения структуры сетевой системы. Задачу, объединяющую две указанные, назовем задачей *структурного распознавания*. Алгоритмы распознавания, строящие решение задачи структурного распознавания, во-первых, устанавливают, что процесс развития сетевых структур соответствует тем или иным правилам порождения предфрактальных графов, а во-вторых, определяют какие типы затравок при порождении были использованы. В настоящей работе описан и обоснован алгоритм предфрактального графа, порожденного парой регулярных затравок с чередованием.

Фрактальные и предфрактальные графы: основные понятия. В настоящей работе определен особый класс предфрактальных графов - предфрактальный граф, порождаемый множеством затравок с чередованием. Именно этот класс предфрактальных графов может наиболее адекватно описывать структуры сложных многоэлементных сетевых систем при построении моделей. Поэтому в настоящей работе решается задача распознавания предфрактальных графов, порожденных множеством затравок с чередованием. Предложен и обоснован алгоритм распознавания предфрактального графа, порожденного двумя полными затравками с чередованием.

Предфрактальный граф будем обозначать через $G_L = (V_L, E_L)$, где V_L – множество вершин графа, а E_L – множество его ребер. Определим его рекуррентно, поэтапно, заменяя каждый раз в построенном на преды-

дущем этапе $l = \{1, 2, \dots, L-1\}$ графе G_l каждую его вершину связной затравкой $H = (W, Q)$. На первом этапе предфрактальному графу соответствует затравка. При этом об описанном процессе говорят, что предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ порожден затравкой $H = (W, Q)$. Ребра, появившиеся на этапе l , $l = \overline{1, L}$, порождения предфрактального графа, будем называть *ребрами ранга l* . Новыми ребрами предфрактального графа G_L назовем – ребра ранга L , а все остальные ребра назовем *старыми*. Процесс построения предфрактального графа, по существу, есть процесс построения последовательности предфрактальных графов, которую и назовем *траекторией*. *Фрактальный граф* определяется бесконечной траекторией. Обобщением описанного процесса порождения предфрактального графа G_L является такой случай, когда вместо единственной затравки H используется множество затравок $\mathbf{H} = \{H_t\} = \{H_1, H_2, \dots, H_t, \dots, H_T\}$, $T \geq 2$. Суть этого обобщения состоит в том, что при переходе от графа G_{l-1} к графу G_l каждая вершина замещается некоторой затравкой $H_t \in \mathbf{H}$, которая выбирается случайно или согласно определенному правилу, отражающему специфику моделируемого процесса или структуры. Если при переходе от графа G_{l-1} к графу G_l каждая вершина графа G_{l-1} замещается одной конкретной случайно выбранной затравкой $H_{t^*} \in \mathbf{H}$, то будем говорить, что *предфрактальный граф G_L порожден множеством затравок $\mathbf{H} = \{H_t\}$, $t = 1, 2, \dots, T$, $T \geq 2$, с чередованием*. Если же при порождении предфрактального графа G_L множеством затравок $\mathbf{H} = \{H_t\}$, $T \geq 2$, с чередованием задано некоторое правило выбора затравок из \mathbf{H} , например, неубывание числа вершин или ребер выбираемых затравок, то будем говорить, что *предфрактальный граф G_L порожден множеством затравок $\mathbf{H} = \{H_t\}$, $t = 1, 2, \dots, T$, $T \geq 2$, с упорядоченным чередованием*.

Очевидно, что порождение фрактального графа $G = (V, E)$ (т.е. когда траектория является бесконечным множеством

$G_1, G_2, \dots, G_l, \dots, G_L, G_{L+1}, \dots$) с чередованием затравок, возможно только при бесконечном числе замещений затравок $\mathbf{H} = \{H_t\}$, $t = 1, 2, \dots, T$, $T \geq 2$.

Если при порождении предфрактального графа с чередованием, для замещения вершин на последующих шагах порождения выбираются затравки с возрастанием числа вершин, то такой предфрактальный граф будем называть *порожденным с упорядоченным возрастанием затравок*. Если же для замещения вершин на последующих шагах порождения выбираются затравки с убыванием числа вершин, то такой предфрактальный граф будем называть *порожденным с упорядоченным убыванием затравок*. Использованием для порождения предфрактального графа чередованием затравок одной и той же затравки на различных этапах порождения исключается.

В случае порождения предфрактального графа G_L с упорядоченным возрастанием (с упорядоченным убыванием) затравок $\mathbf{H} = \{H_t\}$, $t = 1, 2, \dots, T$, $T \geq 2$, если $L > T$, то переход на $l = T + 1$ шаге порождения от предфрактального графа G_T к G_{T+1} , осуществляется заменой всех вершин графа G_T затравкой с наименьшим (наибольшим) числом вершин из $\mathbf{H} = \{H_t\}$, $t = 1, 2, \dots, T$, $T \geq 2$. На последующих шагах $l = T + 2, T + 3, \dots, L$ порождения предфрактального графа G_L затравки из $\mathbf{H} = \{H_t\}$, $t = 1, 2, \dots, T$, $T \geq 2$, используются последовательно по очередности возрастания (убывания) числа вершин. В случае порождения предфрактального графа G_L число этапов порождения больше числа затравок, $L > T$, целесообразно говорить о периоде замещения вершин затравками. Период замещения вершин затравкам в процессе порождения предфрактального графа G_L с возрастанием или убыванием вершин затравок $\mathbf{H} = \{H_t\}$, $t = 1, 2, \dots, T$, $T \geq 2$, обозначим через P .

Алгоритм распознавания. Рассмотрим задачу, когда требуется распознать предфрактальный граф, порожденный парой полных затравок с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер.

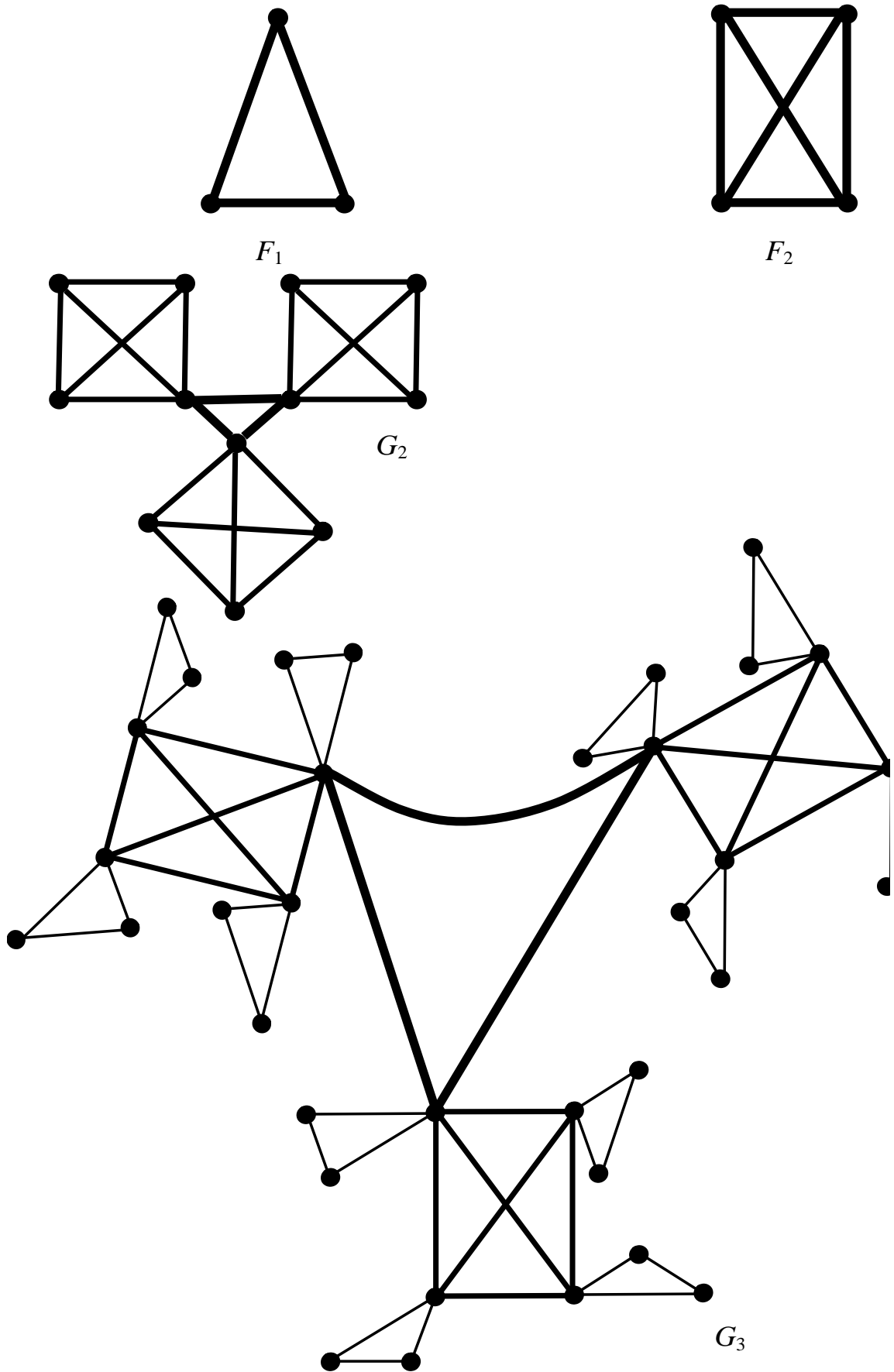


Рис. 1. Траектория предфрактального графа, порожденного парой полных затравок

Переход в траектории $G_1, G_2, \dots, G_r, \dots, G_L$ графа с чередованием затравок от текущего графа $G_r = (V_r, E_r)$ к следующему графу G_{r+1} всякий раз подчиняется основным правилам порождения предфрактального графа с чередованием затравок при сохранении смежности старых ребер.

Распознавание предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного парой полных затравок $F_1 = (V_1, E_1)$ и $F_2 = (V_2, E_2)$ с числом вершин m_1 и m_2 ($m_1 < m_2$) соответственно, с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер можно осуществить алгоритмом b . Суть алгоритма b заключается в идентификации графов $F_1 = (V_1, E_1)$, $F_2 = (V_2, E_2)$ как затравок предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, а также идентификации траектории самого предфрактального графа.

На рис. 1 изображена траектория предфрактального графа $G_3 = (V_3, E_3)$, порожденного парой полных затравок – 3-вершинным графом $F_1 = (V_1, E_1)$ и 4-вершинным $F_2 = (V_2, E_2)$, с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер.

Алгоритм b состоит из $k = 1, 2, \dots, l, \dots, L$ этапов. На каждом из этапов алгоритма b выполняются три ключевые операции: окрашивание (выделение) вершины, окрашивание (выделение) ребра, стягивание ребра, стягивание цепи. На вход первого $k = 1$ этапа алгоритма предъявляется предназначенный для распознавания граф $G = (V, E)$. На вход каждого из этапов $k = 1, 2, \dots, l, \dots, L - 1$ алгоритма b предъявляется граф $G^k = (V^k, E^k)$, как результат работы предыдущего этапа.

Определим число вершин графа $G = (V, E)$ и обозначим их через N . Разделим число вершин графа $G = (V, E)$ на произведение $m_1 m_2$ последовательно необходимое количество раз, чтобы получить представление $N = (m_1 m_2)^K r$. Возможны два случая: $r = 1$, $r = m_1$. Рассмотрим каждый из них подробно. Если остаток r

не удовлетворяет ни одному из указанных вариантов, то алгоритм b_3 завершает свою работу с отрицательным результатом.

Пусть $r = 1$. Тогда $G = G^L$, а число этапов алгоритма b равно $L = 2K$. Затем у графа G^L производим поиск всех вершины степени $m_2 - 1$ и объединяем их в множество $V_{m_2}^L$. Затем полученное множество $V_{m_2}^L$ разбивается на подмножества с учетом взаимной смежности составляющих его вершин следующим образом. Выделяем вершину $v \in V_{m_2}^L$ и смежные ей $(m_2 - 2)$ вершины из множества $V_{m_2}^L$. Если вершина $v \in V_{m_2}^L$ не имеет в множестве $V_{m_2}^L$ смежных с ней $(m_2 - 2)$ вершин, то алгоритм b заканчивает свою работу с отрицательным результатом. В процессе разбиения множества $V_{m_2}^L$ на подмножества, вершины не выделяются более одного раза. После разбиения множества $V_{m_2}^L$ на подмножества, в каждом подмножестве проводится проверка на взаимную смежность всех ее $(m_2 - 1)$ вершин. Далее выделяются ребра обеспечивающие смежность вершин в каждом из подмножестве. Их число в каждом из подмножестве равно $\frac{(m_2 - 1)(m_2 - 2)}{2}$, в противном случае алгоритм заканчивает свою работу с отрицательным результатом.

Далее проверяем смежность всех $(m_2 - 1)$ вершин каждого выделенного подмножества с одной вершиной, степень которой больше чем $m_2 - 1$. Если такая имеется, выделяя ее и все ребра соединяющие эту вершину с уже выделенными, получим выделенный полный подграф с m_2 вершинами. Такие полные подграфы должны быть выделены на графе G^L в соответствии с числом подмножеств множества $V_{m_2}^L$, в противном случае алгоритм заканчивает свою работу с отрицательным результатом.

Далее стягиваем все выделенные ребра. И на вход следующего этапа алгоритма b передается граф G^{L-1} . На графе G^{L-1} , как и предыдущем шаге, выделяем все вершины степени $m_1 - 1$ и объединяются в множество $V_{m_1}^{L-1}$. С множеством $V_{m_1}^{L-1}$ прodelьваются те же операции относительно вершин со степенью $m_1 - 1$, что и с вершинами множества. Далее стягиваем все выделенные ребра. На вход следующего этапа алгоритма b передается граф G^{L-2} . На всех последующих этапах проведем операции по стягиванию выделяемых полных подграфов, чередуя число их вершин m_1 и m_2 в продолжении уже начатой последовательности на первых двух шагах. На выходе последнем шага получим полный граф G^1 с числом вершин m_1 , в противном случае алгоритм b завершает свою работу с отрицательным результатом.

Пусть $r = m_1$. Тогда $G = G^L$, а число этапов алгоритма b равно $L = 2K + 1$. Затем на графе G^L выделяем все вершины степени $m_1 - 1$. Далее процесс распознавания графа $G = G^L$ при $r = m_1$ идентичен предыдущему случаю, когда $r = 1$.

Результатом работы алгоритма b_3 в случаях когда $r = 1$, $r = m_1$ является траектория $G^k = (V^k, E^k) = G_k = (V_k, E_k)$, $k = 1, 2, \dots, l, \dots, L$, предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного парой полных затравок $F_1 = (V_1, E_1)$, $F_2 = (V_2, E_2)$ с числом вершин m_1 и m_2 ($m_1 < m_2$) соответственно, с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер. ◀

Не налагая дополнительных ограничений на входные данные с алгоритмом b_3 , кроме изменения условия $m_1 < m_2$ на $m_1 > m_2$ можно переориентировать алгоритм b_3 на распознавание предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного парой полных затравок $F_1 = (V_1, E_1)$, $F_2 = (V_2, E_2)$ с числом вершин m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$) соответственно, с убыванием и при сохранении смежности старых ребер.

ТЕОРЕМА 1. *Всякий предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, порожденный парой полных затравок $F_1 = (V_1, E_1)$ и $F_2 = (V_2, E_2)$, $|V_1| = m_1$ и $|V_2| = m_2$ ($m_1 > m_2$), с упорядоченным возрастанием и сохранением смежности старых ребер распознается алгоритмом b с полиномиальной трудоемкостью $O(|E_L| + L|V_L|)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО разделим на две части. В первой будет доказано соответствия выполняемой алгоритмом b работы заявленным целям, т.е. распознаванию предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного парой полных затравок $F_1 = (V_1, E_1)$, $F_2 = (V_2, E_2)$ с числом вершин m_1 и m_2 ($m_1 < m_2$) соответственно, с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер. Во второй будет подсчитана трудоемкость самого алгоритма b .

Д) При порождении предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ парой полных затравок $F_1 = (V_1, E_1)$ и $F_2 = (V_2, E_2)$ с числом вершин m_1 и m_2 ($m_1 < m_2$) соответственно число вершин самого графа будет равно произведению с чередующимися множителями $N = m_1 m_2 m_1 m_2 * \dots * r$, где каждый множитель соответствует этапу порождения предфрактального графа. Формула $N = m_1 m_2 m_1 m_2 * \dots * r$ позволяет вычислять число вершин предфрактального графа, порождаемого парой полных с упорядоченным возрастанием. А множитель r , если число этапов порождения нечетно, равен m_1 . Если же число этапов порождения четно, то множитель r равен 1. Рассмотрим оба случая в отдельности.

Пусть число этапов порождения предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ нечетно, т.е. $r = m_1$. Это значит, что при порождении предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ число его вершин будет равно $N(G_L) = (m_1 m_2)^M m_1$, а $L = 2M + 1$. Кроме того это значит, что последней затравкой использованной для замещения вершин предфрактального графа $G_{L-1} = (V_{L-1}, E_{L-1})$ является полный m_1 -вершинный граф $F_1 = (V_1, E_1)$.

Всякий предфрактальный граф, порождаемый полными затравками с сохранением смежности старых ребер, можно получить склеиванием новых затравок с вершинами предфрактального графа предыдущего этапа. Это следует из общего описания процесса порождения предфрактального графа с сохранением смежности старых ребер. Поэтому только лишь одна вершина каждой новой подграф-затравки предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ будет инцидентна старым ребрам, а значит только степень этой вершины подграф-затравки будет отличаться от $m_1 - 1$.

Выделив на предфрактальном графе $G_L = (V_L, E_L)$ все вершины степени $m_1 - 1$ и объединив их в множество $V_{m_1}^L$, можно сгруппировать их в подмножества исходя из взаимной смежности выделенных вершин. Эти подмножества представляют собой $(m_1 - 1)$ смежные вершины каждой новой подграф-затравки предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$. В каждом из сгруппированных подмножеств множества $V_{m_1}^L$ не достает по одной вершине, чтобы каждое подмножество соответствовало множеству вершин отдельно взятой подграф-затравке. Для добавления этих подмножеств последними вершинами достаточно выделить все инцидентные вершинам подмножеств ребра, часть из которых $(m_1 - 1)$ ребро) окажется инцидентными недостающей вершине.

После выделения все новые ребра стягиваются. На вход следующему этапу порождения подается предфрактальный граф $G_{L-1} = (V_{L-1}, E_{L-1})$.

Далее на каждом этапе распознавания чередуя проводится выделение и стягивание новых подграф-затравок, соответствующих затравкам $F_2 = (V_2, E_2)$ и $F_1 = (V_1, E_1)$, по аналогии с описанным и обоснованным первым этапом распознавания алгоритма b .

Пусть число этапов порождения предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ четно, т.е. $r = 1$. Это значит, что число замещений, учитывая чередующийся характер процесса порождения, вершин затравкой $F_1 = (V_1, E_1)$ и затравкой

$F_2 = (V_2, E_2)$ будет равным. Поэтому число вершин предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ вычисляется в соответствии с произведением $N(G_L) = (m_1 m_2)^K$, а $L = 2K$. Кроме того, это значит, что последней затравкой использованной для замещения вершин предфрактального графа $G_{L-1} = (V_{L-1}, E_{L-1})$ является полный m_2 -вершинный граф $F_2 = (V_2, E_2)$. Тогда с выделения, именно, подграф-затравок соответствующих затравке $F_2 = (V_2, E_2)$ и целесообразно начинать распознавание предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$. Последующие шаги в алгоритме b при $r = 1$ аналогичны шагам при $r = m_1$. Поэтому и обоснование этой части алгоритма аналогично предъявленному выше.

II) На каждый из $k = 1, 2, \dots, l, \dots, L$ этапов алгоритм b просматривает все вершины графа $G = (V, E)$ и выделяет соответствующие требованиям текущего этапа. Т.е. на каждом этапе алгоритма b объединяются в множества $V_{m_2}^l$ и $V_{m_1}^l$ поочередно вершины степени $m_2 - 1$ и $m_1 - 1$, соответственно. На каждом шаге алгоритма эти действия соответствуют $|V_L|$ операциям. На протяжении всего алгоритма эти действия соответствуют $L|V_L|$ операциям. Кроме того на протяжении всего алгоритма b каждое ребро графа $G = (V, E)$ выделяется лишь единожды, общая вычислительная сложность алгоритма b распознавания предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного парой полных затравок $F_1 = (V_1, E_1)$, $F_2 = (V_2, E_2)$ с числом вершин m_1 и m_2 ($m_1 < m_2$) соответственно, с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер им равна $O(|E_L| + L|V_L|)$. ◀

Заключение. Книга [7] целиком посвящена распознаванию фрактальных (предфрактальных) графов, порожденных одной затравкой. Вопрос же о распознавании фрактальных (предфрактальных) графов, порожденных множеством затравок, оставался открытым до недавнего времени.

В настоящей работе приведен пример адаптации (изменение правила) процесса порождения предфрактальных графов для моделирования развивающихся сетевых

структур. Результатом адаптации стал новый класс предфрактальных графов, порождаемый множеством затравок с чередованием. Как следствие этого, рассмотрена частная задача распознавания предфрактального графа, порожденного парой полных затравок чередованием. Предложенный алгоритм распознавания решает эту задачу за полиномиальное время.

Список литературы

1. *Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.* Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990.
2. *Strogatz S.* Exploring complex networks // *Nature*. – 2001. – № 410. – P. 268–276.
3. *Watts D.J.* Small Worlds. – Princeton: Princeton University Press, 1999.
4. *Dorogovtsev S.N., Mendes J.F.F.* Evolution of networks: From Biological Nets to the Internet and WWW. – Oxford: Oxford University Press, 2003.
5. *Albert R., Barabasi A.* Statistical mechanics of complex networks // *Reviews of Modern Physics*. – 2002. – № 74. – P. 47–97.
6. *Krön B.* Growth of self-similar graphs // *J. Graph Theory*, 45(3):224–239, 2004.
7. *Кочкаров А.М.* Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. – Нижний Архыз: РАН САО, 1998.
8. *Малинецкий Г.Г.* Математические основы синергетики. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. – М.: КомКнига, 2005.
9. *Малинецкий Г.Г., Курдюмов С.П.* Нелинейная динамика и проблемы прогноза // *Вестник РАН*, 2001, т.71, №3. С.210-224.
10. *Фракталы в физике / Под ред. Л. Пьетронеро, Э. Тозатти.* – М.: Мир, 1988.
11. *Малащенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Модели неопределенности в многопользовательских сетях. – М.: Эдиториал УРСС, 1999.
12. *Кульба В.В., Ковалевский С.С., Уткин В.А.* и др. Управление и контроль реализации социально-экономических целевых программ. – М.: Книжный дом "Либриком", 2009.