УДК 004.8

5.2.2. Математические, статистические и инструментальные методы в экономике

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УЖИВАЕМОСТИ РАСТЕНИЙ

Ганичева Антонина Валериановна
к.ф.-м.н., профессор кафедры “Физико-математических дисциплин и информационных технологий“
SPIN-код: 9049-4545, AuthorID: 177856
tgan55@yandex.ru
Тверская государственная сельскохозяйственная академия, ул. Василевского, дом 7, поселок Сахарово, Тверь, 17131, Россия

Ганичев Алексей Валерианович
старший преподаватель кафедры “Информатики и прикладной математики“,
SPIN-код: 4747-0880, AuthorID: 178091
alexej.ganichev@yandex.ru
Тверской государственный технический университет, *170026, Тверь, наб. Аф. Никитина, дом 22, Россия*

Проблема построения математических моделей взаимодействия растения является важной и особенно актуальной в условиях цифрового сельского хозяйства. Для решения данной проблемы в статье разработана новая модель коллективного взаимодействия растений. Модель описывается матричным уравнением

Ключевые слова: ВЛИЯНИЕ СОСЕДЕЙ, СОСТОЯНИЕ, ПЕРЕХОД, АПОСТЕРИОРНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ, МАТРИЧНЫЙ ВИД

http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-213-006

UDC 004.8

5.2.2. Mathematical, statistical and instrumental methods in economics

MATHEMATICAL MODEL OF PLANT SURVIVAL

Ganicheva Antonina Valerianovna
Cand.Phys-Math.Sci., Professor of the Department of Physical and Mathematical Sciences and Information Technologies
tgan55@yandex.ru
Tver state agricultural academy, Vasilevsky's street, pos.Saharovo, Tver, 171314, Russia

Ganichev Alexey Valerianovich
Associate Professor of the Department of Computer Science and Applied Mathematics
SPIN code: 4747-0880, AuthorID: 178091
alexej.ganichev@yandex.ru
Tver State Technical University, Nab.Nikitina, 22, Tver, 170026, Russia

The problem of building mathematical models of plant interaction is important and especially relevant in the context of digital agriculture. To solve this problem, the article develops a new model of collective plant interaction. The model is described by a matrix equation

Keywords: NEIGHBOR INFLUENCE, STATE, TRANSITION, APOSTORIAL PROBABILITY, MATRIX VIEW

Введение

Исследование роста и развития растений методом математического моделирования является важной и актуальной проблемой в условиях цифрового сельского хозяйства [2]. При организации сельскохозяйственного производства важной задачей является оценка совместного существования (уживаемости) сельскохозяйственных культур [3]. Возможность решать эту задачу позволяет индексный метод [1]. Взаимное воздействие растений друг на друга чрезвычайно разностороннее и может быть как положительным, так и отрицательным

[4]. Ограниченность ресурсов жизнеобеспечения вызывает конкурентную борьбу между растениями. Исключительную важность проблема конкуренции культурных и сорных растений имеет при выращивании сельскохозяйственных культур. Если с наиболее вредными сорняками не вести никакой борьбы, то они могут полностью заглушить культурные растения. Конкуренция за свет, воду и минеральное питание обычно приводит к потере урожая у культурных растений. С помощью агротехнологических приемов (внесение удобрений, использование севооборотов, обработка пестицидами) можно существенно повлиять на исход борьбы с сорняками в пользу сельскохозяйственных растений [5].

Методы и материалы

Известно, что разные растения по-разному уживаются со своими соседями. В результате такого взаимодействия растения переходят в новое состояние. При переходе растения из состояния в состояние целесообразно ввести количественную меру оценки его отношения к тому состоянию, в которое оно переходит (индивидуальное восприятие перехода). В простейшем случае при рассмотрении таких оценок можно выделить две их разновидности: 1) индивидуальное восприятие перехода в данное состояние (без влияния соседей, например, без их окружения), 2) восприятия перехода в результате контакта с другими растениями.

Формализуем эти ситуации.

Обозначим: j – номер растения (j = 1, 2, …, N), α_j - вероятность перехода растения в данное состояние без влияния соседей, P_j - вероятность такого перехода при контакте с другими растениями. Пусть μ_j - вероятность того, что в данной конкретной ситуации растение независимо от других. При этом если $\mu_j = 1$, то имеет место абсолютная независимость, если $\mu_j = 0$ - абсолютная зависимость.

Примем: P_j^1 - апостериорная вероятность перехода для независимого растения. Эта вероятность совпадает с априорной вероятностью α_j данного события. Допустим для зависимого растения λ_{ij} обозначает вероятность того, что j-ое растение перейдет в новое состояние с вероятностью P_i при условии, что влияние i-го растения на j-ое не зависит от влияния других растений. Тогда для абсолютно зависимого растения вероятность перехода в новое состояние будет определяться по следующей формуле:

$$P_j^0 = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ji} P_i .$$

При этом выполняется равенство: $\sum_{i=1}^{N} \lambda_{ji} = 1$. Тогда для произвольно выбранного j-го растения имеем:

$$P_j = \mu_j P_j^1 + (1 - \mu_j) P_j^0,\ j = 1,\ldots,N,$$

т.е.

$$P_j = \mu_{j\alpha_j} \alpha_j + (1 - \mu_j) \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ji} P_i . \quad (1)$$

В матричном виде это равенство можно представить так:

$$P = \mathrm{M} \cdot \mathrm{A} + (E - \mathrm{M}) \cdot \Lambda P , \quad (2)$$

где $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ \cdots \\ p_n \end{pmatrix}$, $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_N \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \ldots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{N1} & \lambda_{N2} & \ldots & \lambda_{NN} \end{pmatrix}.$$

Из равенства (2) получаем:

$$(E - (E - \mathrm{M})\Lambda) \cdot P = \mathrm{MA} . \quad (3)$$

Тогда вектор вероятностей перехода в данное состояние N растений определяется по формуле:

$$P = (E - (E - \mathrm{M})\Lambda)^{-1} \cdot \mathrm{M}\mathrm{A}. \tag{4}$$

Уравнение (4) представляет собой общую математическую модель коллективного взаимодействия соседствующих растений.

Результаты и их обсуждение

Для иллюстрации полученных соотношений рассмотрим следующий числовой пример.

Пусть имеем следующие исходные данные:

$$N = 3,\ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,6 \\ 0,2 \end{pmatrix},\ \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix},\ \Lambda = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,9 \\ 0,6 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле (4) получаем:

$$P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,9 \\ 0,6 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} \right]^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,9 \\ 0,6 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,6 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,122091 \\ 0,372781 \\ 0,219724 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,12 \\ 0,37 \\ 0,22 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, первое растение (j=1) переходит в данное состояние с вероятностью $P_1 = 0,12$, второе растение (j=2) переходит в данное состояние с вероятностью $P_2 = 0,37$, наконец, третье растение (j=3) переходит в данное состояние с вероятностью $P_3 = 0,22$.

Для анализа математической модели коллективного взаимодействия соседствующих растений примем, что в рассматриваемом примере априорные вероятности перехода в данное состояние одинаковы для трех растений, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. Исследуем, как зависят в этом случае координаты вектора $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$ (апостериорные вероятности конечного состояния) от A (априорных вероятностей начального состояния системы).

Графики изменения P_1, P_2, P_3 в зависимости от значений α представлены на рис. 1.

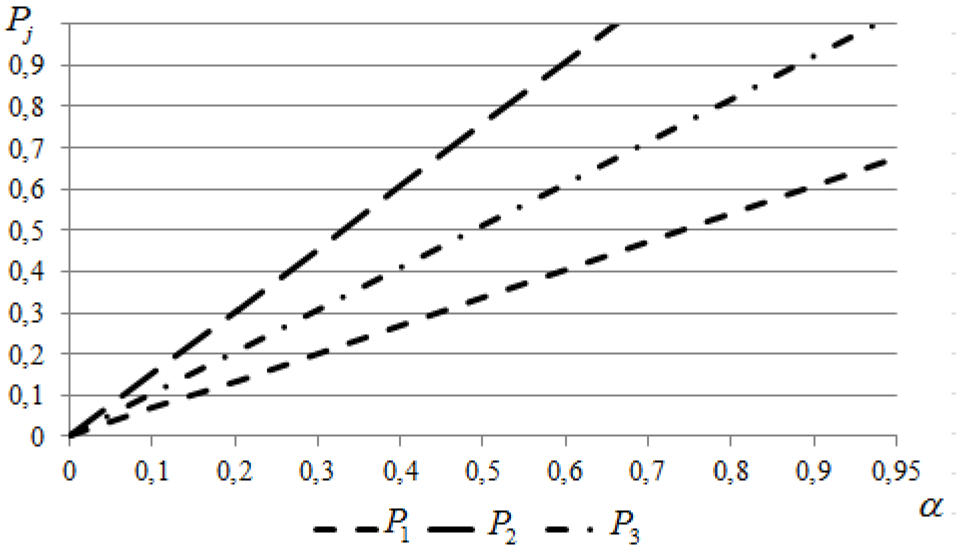

Рис. 1 – Зависимости апостериорных вероятностей состояний от априорных

Из рис. 1 видно, что исследуемые зависимости являются линейными. При равных априорных вероятностях состояний значения апостериорных вероятностей определяются степенью зависимости данного растения от других растений (матрицей M) и вероятностью перехода в новое состояние (матрицей Λ).

При линейных зависимостях можно ввести в качестве характеристики коллективного взаимодействия соседствующих растений показатель $\chi_j = \dfrac{P_j}{\alpha_j}$ (j = 1, 2, …, N). Назовем этот показатель эластичностью взаимодействия растений. Он показывает степень изменения P_j при изменении α_j (устойчивость к изменению) и измеряется в долях или процентах. Чем больше эластичность взаимодействия растений, тем больше они подвержены изменению. Можно рассчитывать среднюю эластичность $\bar{\chi}_j = \dfrac{\bar{P}_j}{\bar{\alpha}_j}$, показывающую, насколько в в среднем изменяется апостериорная вероятность у при изменении априорной.

Заключение

В статье разработана новая математическая модель коллективного взаимодействия соседствующих растений. Уравнение, формализующее модель представлено в матричной форме. Для пояснения работы модели рассмотрен числовой пример. Дальнейшим направлением исследований является описание функционирования модели при большом количестве конкурирующих растений, а также ее работа в условиях нечеткой информации о параметрах системы.

Литература

1. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Индексно-кластерный метод в сельском хозяйстве. Биометрические индексы // Бизнес. Образование. Право. 2017. № 1 (38). С. 171–174.

2. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Математическая модель роста растений // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2024. № 203. С. 176-183.

3. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Моделирование процессов цифрового сельского хозяйства: монография. Тверь: Тверской государственный технический университет, 2021. 159 с.

4. Кошкин Е.И. К проблеме конкуренции культурных и сорных растений в агрофитоценозе // Известия Тимирязевской сельскохозяйственной академии. 2016. № 4. С. 53–68.

5. Письман Т.И., Ботвич И.Ю., Сомова Л.А. Взаимодействие культурных и сорных растений в агроценозах: математическая модель // Успехи современной науки. 2016. Т. 10. № 11. С. 102–104.

References

1. Ganicheva A.V., Ganichev A.V. Indeksno-klasternyj metod v sel'skom hozjajstve. Biometricheskie indeksy // Biznes. Obrazovanie. Pravo. 2017. № 1 (38). S. 171–174.

2. Ganicheva A.V., Ganichev A.V. Matematicheskaja model' rosta rastenij // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2024. № 203. S. 176-183.

3. Ganicheva A.V., Ganichev A.V. Modelirovanie processov cifrovogo sel'skogo hozjajstva: monografija. Tver': Tverskoj gosudarstvennyj tehnicheskij universitet, 2021. 159 s.

4. Koshkin E.I. K probleme konkurencii kul'turnyh i sornyh rastenij v agrofitocenoze // Izvestija Timirjazevskoj sel'skohozjajstvennoj akademii. 2016. № 4. S. 53–68.

5. Pis'man T.I., Botvich I.Ju., Somova L.A. Vzaimodejstvie kul'turnyh i sornyh rastenij v agrocenozah: matematicheskaja model' // Uspehi sovremennoj nauki. 2016. T. 10. № 11. S. 102–104.