

УДК 004

5.2.2. Математические, статистические и инструментальные методы в экономике (физико-математические науки, экономические науки)

СУЩНОСТЬ И РОЛЬ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ В ЭКОНОМИКЕ

Ануфриева Анна Петровна
кандидат экономических наук, доцент
РИНЦ SPIN-код: 1592-1309
gubskaya-a@mail.ru
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет» Краснодар, Россия

Буданок Аделина Романовна
Студентка
adelina.budanok2016@yandex.ru
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет» Краснодар, Россия
Краснодар, Россия

В статье рассматривается история возникновения оптимизационных моделей их преимущества. Проанализировано мнение различных ученых по поводу использования оптимизационных моделей, а также в заключении исследования приводятся два примера оптимизационных моделей. Оптимизационные модели в экономике играют ключевую роль, позволяя исследователям и практикам находить наилучшие решения в условиях ограниченных ресурсов. Одним из основных преимуществ таких моделей является их способность систематизировать и анализировать сложные экономические процессы. Они помогают определить оптимальное распределение ресурсов, что особенно важно в условиях конкуренции и нехватки ресурсов. Кроме того, оптимизационные модели могут учитывать различные ограничения, такие как бюджетные, технологические и временные рамки, что делает их более реалистичными и применимыми в реальных ситуациях. Это также позволяет принимать более обоснованные решения и минимизировать риски. С помощью этих моделей возможно прогнозирование последствий различных экономических стратегий, что помогает в планировании и управлении. Они также способствуют повышению эффективности и конкурентоспособности, позволяя организациям адаптироваться к изменениям на рынке и быстрее реагировать на новые вызовы. Таким образом, оптимизационные модели становятся незаменимым инструментом в современном экономическом анализе

Ключевые слова: ЭКОНОМИЧЕСКИЕ

UDC 004

5.2.2. Mathematical, statistical and instrumental methods in economics (physical and mathematical sciences, economic sciences)

THE ESSENCE AND ROLE OF OPTIMIZATION MODELS IN ECONOMICS

Anufrieva Anna Petrovna
Candidate in Economics, Associate Professor
RSCI SPIN-code: 1592-1309
gubskaya-a@mail.ru
Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Kuban State Technological University» Krasnodar, Russia

Budanok Adelina Romanovna
Student
adelina.budanok2016@yandex.ru
Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Kuban State Technological University» Krasnodar, Russia

The article examines the history of the emergence of optimization models and their advantages. The opinions of various scientists on the use of optimization models are analyzed, and the conclusion of the study provides two examples of optimization models. Optimization models in economics play a key role, allowing researchers and practitioners to find the best solutions in conditions of limited resources. One of the main advantages of such models is their ability to systematize and analyze complex economic processes. They help to determine the optimal allocation of resources, which is especially important in conditions of competition and lack of resources. In addition, optimization models can take into account various constraints such as budgetary, technological, and time constraints, making them more realistic and applicable in real-world situations. It also allows you to make more informed decisions and minimize risks. With the help of these models, it is possible to predict the consequences of various economic strategies, which helps in planning and management. They also contribute to increased efficiency and competitiveness, enabling organizations to adapt to market changes and respond more quickly to new challenges. Thus, optimization models are becoming an indispensable tool in modern economic analysis.

Keywords: ECONOMIC PROCESSES,

ПРОЦЕССЫ, ОПТИМИЗАЦИЯ, НЕЛИНЕЙНЫЙ
МЕТОД, ЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД, ИЗДЕРЖКИ,
РИСКИ, МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ, ОГРАНИЧЕННОСТЬ
РЕСУРСОВ

OPTIMIZATION, NONLINEAR METHOD,
LINEAR METHOD, COSTS, RISKS,
MACROECONOMIC MODELING, LIMITED
RESOURCES

<http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-209-004>

ВВЕДЕНИЕ

С развитием общества усложнялись хозяйственно-рыночные отношения, в связи с этим возникла потребность в решении различных задач, в том числе и экономических. Оптимизационные модели в экономике – мощный инструмент, позволяющий анализировать и решать широкий спектр задач, связанных с эффективным распределением ограниченных ресурсов. В условиях современного мира, где конкуренция растёт, а внешние факторы становятся всё более непредсказуемыми, внедрение оптимизационных подходов становится не просто желательным, а необходимым для обеспечения устойчивого развития как отдельных организаций, так и целых экономических систем.

Эти модели помогают экономистам и менеджерам принимать обоснованные решения, минимизируя затраты и максимизируя прибыль. Они находят применение в различных областях, включая производственные процессы, финансовое планирование, управление запасами и логистику. Основываясь на принципах математического моделирования, оптимизационные методы позволяют исследовать множество сценариев и оценивать последствия различных стратегий.

СУЩНОСТЬ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Оптимизационные модели основываются не только на экономической теории, но и на математических инструментах.

<http://ej.kubagro.ru/2025/05/pdf/04.pdf>

Современные вычислительные технологии позволяют реализовать сложные модели, что значительно расширяет возможность изучения экономических систем. В этой статье мы проанализируем основные принципы оптимизационных моделей, их актуальность в экономике, а также примеры успешных случаев, демонстрирующих их эффективность. Через эти примеры мы намерены продемонстрировать, как применение данных моделей может привести к более рациональным и обоснованным решениям, способствующим развитию бизнеса и улучшению экономических показателей.

Моделирование в сфере экономики начало активно развиваться с появлением капитализма в целях исследования и прогнозирования.

Основателем макроэкономического моделирования считается Я. Тинберген, который в 1937 году предпринял попытку построить первую макроэкономическую модель, используя методы математической статистики для вывода первой системы уравнений. [1]

Модель Тинбергена выглядела следующим образом:

эта модель экономического роста также включает в себя затраты труда, капитал и фактор времени, которые позволяют учитывать технический прогресс:

$$Y = A \times K^u \times L^v \times e^{\gamma t} \text{ или } Y = a \times K + (1-a) \times L + \gamma t \quad (1)$$

где A – положительный параметр, измеряющий производительность существующей технологии;

$1, \gamma$ – фактор времени;

Y – темп роста продукции;

K – темп роста затрат капитала;

L – темп роста затрат труда;

γ – темп роста, обусловленный технологическим прогрессом.

Рассмотрим модель на примере.

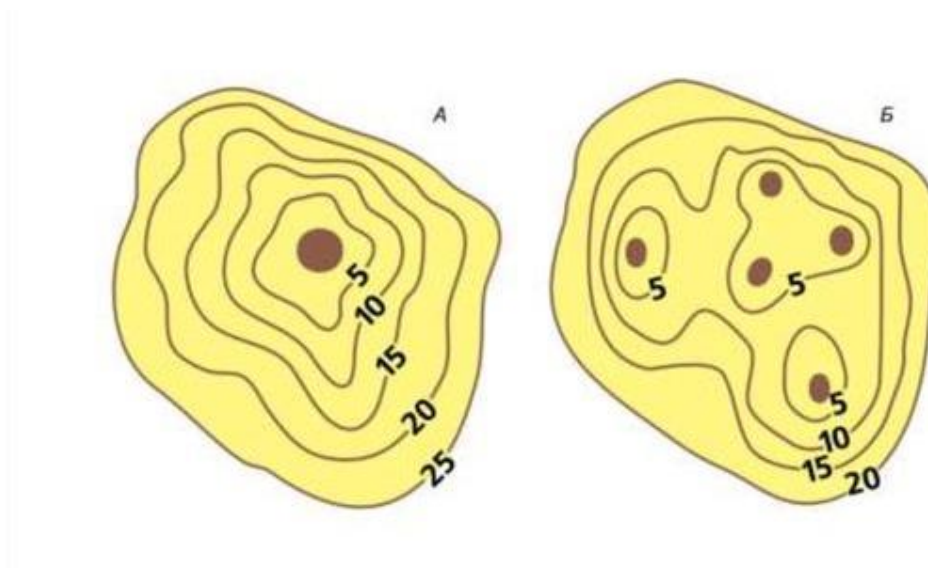


Рисунок 1 – Модель Тинбергена

Линии равных транспортных издержек позволяют проанализировать следующее: в сравнении ситуация (Б) является более выигрышной, т.к. центры разбросаны и их снабжение продовольствием может оказаться более эффективным в отличие от ситуации (А) в случае имеющегося того же объема спроса. Это утверждение также возможно отнести и к другим издержкам, например социальным. В целом историю развития моделирования в экономике подразделяют на следующие этапы.

В целом история развития экономического моделирования делится на несколько этапов. Начало XVII века стало временем, когда ученые впервые начали применять математические методы для решения задач в области общественных наук. В этот период английские экономисты, такие как Уильям Петти, использовали математические подходы для анализа вопросов налогообложения и скорости обращения денег, а Джон Граунт пытался с их помощью решить задачи, связанные с демографией.



Рисунок 2 – Факторы, влияющие на изменение скорости обращения денег

В XIX веке экономика начала подвергаться математизации. Немецкий экономист Иоганн фон Тюнен в своем исследовании экономических явлений разработал концепцию маржинальных величин. В это время он занимался моделированием использования сельскохозяйственных угодий, что позже было отражено в его труде «Изолированное государство», опубликованном в 1826 году.

В конце 1930-х годов наблюдалось значительное расширение математических методов в экономике, с активным использованием дифференциальных уравнений. [1]

В 1940–1950-х годах развивалось структурное макро моделирование, внедрялись стохастические и дифференциальные уравнения.

На сегодняшний день оптимизационные модели широко используются для исследования экономических процессов и явлений. К основным направлениям этих исследований относятся дифференциальное

исчисление, линейные модели, математическая оптимизация и эконометрическое моделирование.

Оптимизационные модели в экономике предназначены для нахождения оптимальных решений в условиях заданных ограничений.

Существует множество мнений среди ученых о целях использования этих моделей.

Так, И.Г. Русяк и К.В. Кетова утверждают, что оптимизационные модели могут проанализировать соотношения между объемами потребления и накопления, что поможет находить оптимальные решения для региональной экономики. Авторы считают, что данные модели подходят для достижения целей социально-экономического прогресса конкретных территорий. [2]

Г.Л. Бекларян представил свою оптимизационную модель региона, которая включала в себя методы системной динамики и численных исследований показателей региона с целью дальнейшего его развития в оптимальных для него условиях. [3]



Рисунок 3 – Система стратегического планирования

П.Д. Шимко говорил, что благодаря экономико-математическому моделированию возможно оценить все возможные варианты последствий управленческих решений и выбрать наиболее подходящий для дальнейшего развития.

В.С. Немчинов высказал следующее мнение по поводу оптимизационного моделирования: «экономико-математические методы обеспечивают планирование необходимой системой расчётов, соответствующими экономическими моделями и научно обоснованной информацией о возможной экономической эффективности конкретных хозяйственных мероприятий».

Экономика одновременно решает множество задач, на каждый исход событий влияет множество факторов. С помощью оптимизационных моделей стало возможно рассмотреть с разных точек зрения все возможные исходы при изменении одного или нескольких показателей. Что в следствие помогает выбрать наиболее оптимальный вариант для решения той или иной задачи, например, минимизация затрат при наращивании объемов выпуска продукции.

Оптимизационные модели представляют собой математическое выражение экономической задачи. Их главная характеристика – оптимальное решение формулируется в виде функционала. При заданных некоторых исходных данных данные модели позволяют проанализировать множество решений, соответствующих условиям. Таким образом, возможно, выбрать наиболее оптимальное решение. [4]

Задача математического программирования заключается в нахождении максимального или минимального значения целевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при соблюдении условий $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) < b_i$, где $i = 1, 2, \dots, t$. Здесь f и g_i представляют собой заданные функции, а b_i — это определенные действительные числа.

Задачи математического программирования можно подразделить на два типа – задачи линейного и нелинейного программирования. Их главное отличие заключается в том, что при линейном программировании функции f и g_i находятся в прямой зависимости друг от друга, в случае изменения одного параметра изменяется и другой, в противном случае, если данная закономерность не прослеживается, то это задача нелинейного программирования.

Линейное программирование — это раздел математики, который занимается разработкой теории и численных методов для решения задач, связанных с нахождением экстремальных значений (максимумов или минимумов) линейной функции. К задачам линейного программирования относится множество вопросов, связанных с планированием экономических процессов, где необходимо найти наилучшее (оптимальное) решение.

В рамках нелинейного программирования изучены задачи выпуклого программирования. Суть этих задач заключается в нахождении минимума выпуклой функции (или максимума вогнутой функции), заданной на выпуклом замкнутом множестве. Существуют также отдельные классы задач математического программирования, такие как задачи целочисленного, параметрического и дробно-линейного программирования.

В общем виде задача линейного программирования представлена ниже: необходимо найти вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, который максимизирует линейную функцию

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (2)$$

и удовлетворяющий условиям

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad (3)$$

$$x_j \geq 0, j=1, \dots, n. \quad (4)$$

Линейная функция $f(X)$ – целевая функция задачи. Условия первого типа являются функциональными ограничениями, а условия второго типа — прямые ограничения задачи.

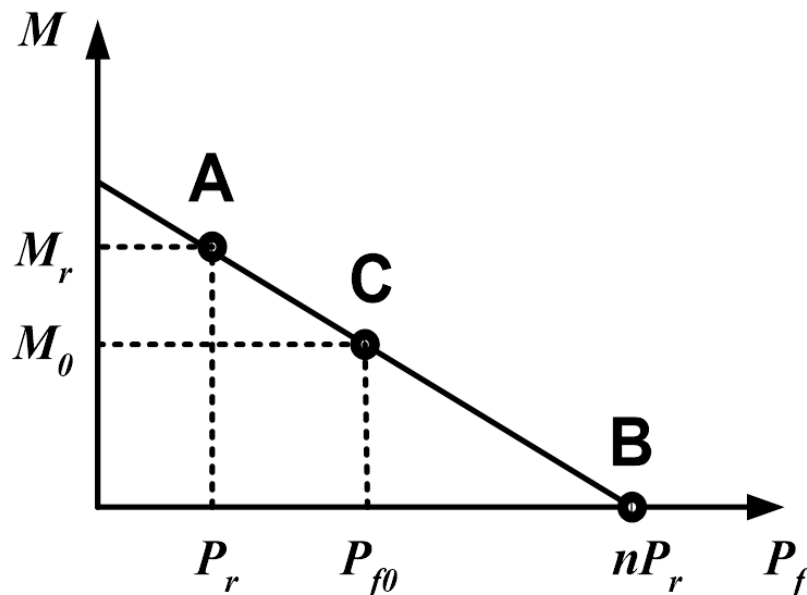


Рисунок 4 – Модель оптимизации цены реализации продукции

План (допустимое решение задачи линейного программирования) – вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, компоненты которого соответствуют функциональным и прямым ограничениям задачи. Область допустимых решений – это область определения программирования. Допустимое решение, которое максимизирует целевую функцию $f(X)$, называется оптимальным планом, и обозначается как $f(X) = \max f(X)$, где $(X) = (x_1, x_2, \dots, x_n^*)$ представляет собой оптимальное решение задач линейного программирования.

На данный момент в практике получили распространение следующие модели оптимизации:

- определение оптимальной производственной программы;
- оптимизация смешивания компонентов;
- оптимизация раскроя;

- оптимальное размещение предприятий в определенной отрасли на заданной территории;
- формирование оптимального портфеля ценных бумаг;
- решение транспортной задачи.

Рассмотрим ниже примеры оптимизационных задач.

Задача 1 – Оптимальное использование ресурсов.

На некоторой фабрике N в распоряжении имеется некоторое количество ресурсов: трудовые, производственные, сырьевые и т. д. В данном случае рассмотрим задачу с 3 параметрами, итак, пусть это будут трудовые ресурсы (90 чел./дней), сырьевые ресурсы (490 кг) и производственные мощности (140 станко/час). Производство одновременно может выпускать 3 вида печенья. Ресурсы необходимые для производства каждого вида печенья представлена ниже в таблице 1.

Таблица 1 – Норма расхода ресурсов на единицу изделия.

Ресурсы	Норма расходов ресурсов на единицу изделия			Наличие ресурсов
	Печенье 1	Печенье 2	Печенье 3	
Труд	5	3	4	90
Сырье	5	6	8	490
Оборудование	4	3	7	140
Цена ед. изделия (тыс.руб.)	6	7	9	

Цель задачи подобрать план, который поможет достигнуть максимальной общей стоимости продукции.

Для удобства введем переменные x_1 , x_2 , x_3 , которые будут обозначать число печенья каждого типа.

Целевая функция — это выражение, которое необходимо максимизировать:

$$f(X) = 6x_1 + 7x_2 + 9x_3 \quad (5)$$

Ограничения по ресурсам

$$(6) \quad 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 90,$$

$$(7) \quad 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 \leq 490,$$

$$(8) \quad 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 140,$$

$$(9) \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Рассмотрим задачу оптимизации, связанную с планированием производства, которая включает в себя нелинейную целевую функцию. Эта задача будет использоваться для нахождения оптимальной комбинации двух продуктов, которую предприятие может производить с целью максимизации своей прибыли. [5]

Предприятие производит два продукта: X и Y. Чтобы произвести x единиц продукта X и y единиц продукта Y, предприятие сталкивается с ограничениями по ресурсам, и прибыль, получаемая от продажи продуктов, будет зависеть от объема производства в соответствии с нелинейной функцией.

$$(10) \quad \text{- Прибыль от продукта X: } P_X = 50x - 0,5x^2$$

$$\text{- Прибыль от продукта Y: } P_Y = 40y - 0,2y^2 \quad (11)$$

Таким образом, общая прибыль Z, которую необходимо максимизировать, будет записываться как:

$$Z = P_X + P_Y = 50x - 0,5x^2 + 40y - 0,2y^2 \quad (12)$$

Но при этом существует ряд ограничений:

– Общее количество доступного ресурса для продукта X и Y: 600 единиц.

Для производства x и y продуктов требуется следующее количество ресурса:

- Продукт X требует 3 единицы ресурса на каждую единицу,
- Продукт Y требует 2 единицы ресурса на каждую единицу.

Тогда ограничение по ресурсам можно записать как:

$$3x + 2y \leq 600$$

Также необходимо соблюсти ограничения на количество производимых продуктов:

$$(13) \quad x \geq 0$$

$$(14) \quad y \geq 0$$

Теперь возможно сформулировать задачу оптимизации:

Максимизировать функцию:

$$Z = 50x - 0,5x^2 + 40y - 0,2y^2 \quad (15)$$

При ограничениях:

$$3x + 2y \leq 600 \quad (16)$$

$$x \geq 0 \quad (17)$$

$$y \geq 0 \quad (18)$$

Для нахождения максимума функции Z необходимо взять частные производные по x и y и приравнять их к нулю, чтобы найти критические точки.

Запишем частные производные:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 50 - x = 0 \rightarrow x = 50 \quad (19)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 40 - 0,4y = 0 \rightarrow y = 100 \quad (20)$$

Теперь необходимо проверить, удовлетворяют ли найденные значения ограничениям. Подставим $x = 50$ и $y = 100$ в ограничение:

$$3(50) + 2(100) = 150 + 200 = 350 \leq 600 \quad (21)$$

Это ограничение выполняется, что означает, что так как оба значения являются неотрицательными, критическая точка (50, 100) является допустимым решением.

Чтобы определить, максимизирует ли эта точка функцию, можно использовать тест второго порядка или проверить значения функции на границе.

Теперь вычислим значение функции в этой точке:

$$Z = 50(50) - 0,5(50^2) + 40(100) - 0,2(100^2) \quad (22)$$

$$Z = 2500 - 1250 + 4000 - 2000 = 3250 \quad (23)$$

После проверки потенциальных значений на границах ресурсов будет видно, что максимум прибыли Z достигается именно в данной точке.

Таким образом, оптимальные значения для производства составляют 50 единиц продукта X и 100 единиц продукта Y , что позволяет максимизировать прибыль до 3250 единиц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение следует отметить, что оптимизационные модели в экономике играют ключевую роль в формировании стратегий и принятии решений, направленных на максимизацию эффективности использования ресурсов. Они предоставляют мощные аналитические инструменты, позволяющие экономистам и бизнес-менеджерам разрабатывать обоснованные подходы, адаптированные к требованиям постоянно изменяющейся рыночной среды. Благодаря алгоритмам, использующим математические и статистические методы, предприятия могут не только минимизировать затраты, но и оптимизировать производственные процессы, управлять рисками и улучшать финансовую устойчивость.

Примеры успешного применения оптимизационных моделей в различных отраслях экономики подчеркивают их универсальность и практическую значимость. От управления цепями поставок до финансового моделирования — возможности для применения этих методов практически безграничны. С учетом стремительного роста технологий и увеличения объема доступных данных потенциал для дальнейшего развития оптимизационных моделей остается огромным.

В будущем важно продолжать исследовать новые методы и подходы, адаптируя их к специфике различных секторов. Это позволит не только решать текущие задачи, но и цифровизации экономики. Интеграция оптимизационных моделей в стратегическое планирование и оперативное управление будет способствовать более эффективному и рациональному развитию как отдельных компаний, так и экономики в целом. Таким образом, инвестиции в изучение и применение этих моделей представляют собой не только шаг к повышению конкурентоспособности, но и фундаментальную основу для устойчивого роста и инновационного развития в эпоху, насыщенную вызовами и возможностями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Статья Развитие экономического моделирования. Эконометрический аспект, автор Скрыпник Дмитрий Владимирович URL: <https://emm.jes.su/s042473880020013-3-1/> (дата обращения 01.02.2025 г.)
2. Иванов Е.А. Концепция оптимизационного моделирования // Современные проблемы науки и образования. — 2011. — № 6. ; URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=5224> (дата обращения: 02.02.2025).
3. Немчинов В.С. Экономико-математические методы и модели / В.С. Немчинов. — М.: Издательство социально-экономической литературы, 1962. — 40 с.
4. Лурье А.Л. Экономический анализ моделей социалистического хозяйства / А.Л. Лурье. — М: Наука, 1973.— 435 с.
5. Оптимальное территориально-производственное планирование / под ред. А.Г. Аганбегяна. — Новосибирск: «Наука», 1960.— 243с.

REFERENCES

1. Stat'ja Razvitie jekonomicheskogo modelirovanija. Jekonometricheskij aspekt, avtor Skrypnik Dmitrij Vladimirovich URL: <https://emm.jes.su/s042473880020013-3-1/> (data obrashhenija 01.02.2025 g.)
2. Ivanov E.A. Konceptija optimizacionnogo modelirovanija // Sovremennye problemy nauki i obrazovanija. — 2011. — № 6. ; URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=5224> (data obrashhenija: 02.02.2025).
3. Nemchinov V.S Jekonomiko-matematicheskie metody i modeli / B.C. Nemchinov. — M.: Izdatel'stvo social'no-jekonomicheskoy literatury, 1962. — 40 s.
4. Lur'e A.L. Jekonomicheskij analiz modelej socialisticheskogo hozjajstva / A.L. Lur'e. — M: Nauka, 1973.— 435 s.
5. Optimal'noe territorial'no-proizvodstvennoe planirovanie / pod red. A.G. Aganbegjana. — Novosibirsk: «Nauka», 1960.— 243s.