УДК 519.71; 51-76

5.2.2. Математические, статистические и инструментальные методы экономики (физико-математические науки, экономические науки)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РОСТА РАСТЕНИЙ

Ганичева Антонина Валериановна
к.ф.-м.н., профессор
SPIN-код: 9049-4545, AuthorID: 177856,
Тверская государственная сельскохозяйственная академия, Тверь, Россия, профессор кафедры "Физико-математических дисциплин и информационных технологий",
ул. Василевского, дом 7, поселок Сахарово, Тверь, 17131, Россия, tgan55@yandex.ru

Ганичев Алексей Валерианович
SPIN-код: 4747-0880, AuthorID: 178091
Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия, старший преподаватель кафедры "Информатики и прикладной математики",
170026, Тверь, наб. Аф. Никитина, дом 22, Россия, alexej.ganichev@yandex.ru

Проблема моделирования роста растений является важной и актуальной в сельском хозяйстве, так как от ее решения зависит эффективность производства продовольственной продукции. Целью статьи является моделирование роста и развития растений, разработана модель изменения массы и геометрических размеров составляющих элементов растений, рассмотрен случай изменения энергии роста с изменением их объема. Для построения моделей использован математический аппарат теории дифференциальных уравнений

Ключевые слова: РАСТЕНИЕ, ПИТАНИЕ, МАССА, ОБЪЕМ, УРАВНЕНИЕ, ЦИЛИНДР, СТЕБЕЛЬ

HTTP://DX.DOI.ORG/10.21515/1990-4665-203-016

UDC 519.71; 51-76

5.2.2. Mathematical, statistical and instrumental methods of economics (physical and mathematical sciences, economic sciences)

MATHEMATICAL MODEL OF PLANT GROWTH

Ganicheva Antonina Valerianovna,
Cand.Phys-Math.Sci., Associate Professor
Tver state agricultural academy, Tver, Russia, Professor of the Department of Physical and Mathematical Sciences and Information Technologies,
ul.Vasilevskogo, pos.Sakharovo, Tver, 171314, Russia, tgan55@yandex.ru

Ganichev Alexey Valerianovich
SPIN code: 4747-0880, AuthorID: 178091
Tver State Technical University, Tver, Russia, Associate Professor of the Department of Computer Science and Applied Mathematics,
Nikitin nab., 22, Tver, 170026, Russia,
alexej.ganichev@yandex.ru

The problem of modeling plant growth is important and relevant in agriculture, since the efficiency of food production depends on its solution. The purpose of the article is to model the growth and development of plants, a model of changing the mass and geometric dimensions of the constituent elements of plants is developed, the case of changing the energy of growth with a change in their volume is considered. The mathematical apparatus of the theory of differential equations is used to build models

Keywords: PLANT, NUTRITION, MASS, VOLUME, EQUATION, CYLINDER, STEM

Введение

Важность и актуальность проблемы разработки математических моделей расчета роста и продуктивности сельскохозяйственных растений показана в обзорной статье [2]. Автор данной статьи отмечает, что в настоящее время в научных публикациях основное внимание уделяется экспериментальным исследованиям, а теоретических работ в данном направлении существенно меньше. В данной статье разработана цифровая модель роста растений и урожайности. Модели роста культурных однолетних растений представлены в работе [3]. На основе подобных моделей можно прогнозировать развитие растений. При разработке моделей роста растений следует использовать системный подход, который применен, например, в статье [1]. В этом случае растение рассматривается как сложная биологическая система, состоящая из множества взаимосвязанных и взаимодействующих элементов.

1. Метод описания роста растений

Метод описания роста растений включает следующие этапы.

1. Перечисляются ингредиенты водных растворов и удобрений, которые ежедневно потребляет данное растение.

2. Определяются границы влажности, температуры и другие показатели.

3. На основе ингредиентов, определенных в п. 1 и показателей выбранных в п. 2 производится расчет основного показателя результирующей калорийности питательных веществ (энергии), поступающих в рассматриваемое растение за единицу временного интервала. Полученное таким образом значение пересчитывается с учетом времени проведения эксперимента *t*.

4. Вычисленное в п. 3 значение результирующе показателя рассматривается состоящим из двух частей: 1) расхода энергии на транспортировку питательных веществ; 2) затраты энергии на рост массы растения.

5. Составляется схема растения, состоящая из геометрических фигур. Например, стебли изображаются цилиндрами, листья (лепестки, сердцевины цветков) - сечениями шаров или эллипсоидов.

6. Предлагается отдельно описывать рост стеблей, листьев, лепестков, сердцевин цветков за малые промежутки времени, а потом рассматривать

результаты все вместе на каждом малом промежутке времени. Окончательные результаты на каждом таком промежутке будут представлять собой начальные значения показателей следующего временного промежутка.

2. Математическая модель изменения массы и размеров составляющих элементов растений

Рассмотрим данный вопрос на примере роста стебля растений, который можно рассматривать как цилиндр (рис. 1).

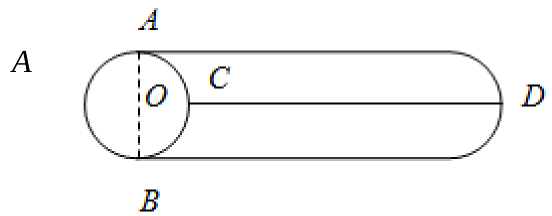

Рис. 1. Вид части стебля растения

Пусть x – величина полудиаметра AO, характеризующего толщину стебля, $y = kx$ – величина отрезка CD, характеризующего длину рассматриваемого на данном промежутке времени участка стебля. Считаем, что длина пропорциональна диаметру, в противном случае по результатам наблюдений строится эконометрическая модель. Здесь $x = x(t)$ – функция времени, причем коэффициент k определяется из статистических данных.

Тогда объем цилиндра, изображенного на рис. 1, будет

$$V = \frac{1}{4}\pi k x^3. \tag{1}$$

Рассмотрим сначала случай, когда энергия p (количество калорий) в единицу времени постоянная величина. Тогда за время t норма калорий (энергии) будет равна pt. Общая энергия тратится на два процесса:

1) доставку питательных веществ элементам растения.

2) рост растения (т.е. на увеличение его массы), этот процесс пропорционален скорости роста растения.

Первую составляющую общей энергии обозначим как p_1, вторую как p_2. Эти составляющие определяются по формулам: $p_1 = \alpha V t$, $p_2 = \beta m'(t) = \beta(\gamma V)'$ (т.к. масса растения $m(t) = \gamma V(t)$, γ -плотность массы растения), α, β - коэффициенты пропорциональности.

Очевидно, что имеет место равенство

$$pt = p_1 + p_2 .$$

Следовательно, имеем

$$pt = \alpha V t + \beta(\gamma V)' = \frac{1}{4}\pi k \alpha x^3 t + \frac{3}{4}\pi k \beta \gamma x^2 x_t' . \qquad (3)$$

Пусть для упрощения записи $\delta = \frac{1}{4}\pi k \alpha$, $\omega = \frac{3}{4}\pi k \beta \gamma$.

Тогда получаем выражение

$$pt = \delta x^3 t + \omega x^2 x_t'$$

Отсюда следует уравнение

$$\frac{\omega x^2 dx}{p - \delta x^3} = t dt . \qquad (4)$$

Найдем решение этого уравнения:

$$-\frac{1}{3\delta} \ln\left| p - \delta x^3 \right| = \frac{1}{2\omega} t^2 + C ,$$

где C – константа.

Отсюда получаем

$$\ln\left| p - \delta x^3 \right| = -\frac{3\delta}{2\omega} t^2 - 3\delta C . \qquad (5)$$

Если имеет место неравенство $p > \delta x^3$, то из (5) получаем

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{\delta}\left(p - e^{-3\delta\left(\frac{t^2}{2\omega} + C\right)} \right)} . \qquad (6)$$

В противном случае, при $p < \delta x^3$, то из (5) получаем

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{\delta}\left(p + e^{-3\delta\left(\frac{t^2}{2\omega}+C\right)}\right)}. \quad (7)$$

Если заданы начальные значения $x(t_0) = x_0$, то подставляя эти значения в (6) (или (7)), находим постоянную C:

$$C = -\frac{1}{3\delta}\ln\left(p - \delta x_0^{\ 3}\right) - \frac{t_0^{\ 2}}{2\omega}, \text{ если } p > \delta x^3; \quad (8)$$

$$C = -\frac{1}{3\delta}\ln\left(\delta x_0^{\ 3} - p\right) - \frac{t_0^{\ 2}}{2\omega}, \text{ если } p < \delta x^3; \quad (9)$$

Подставляя данные значения, соответственно, в формулы (6) и (7), находим частные решения.

Интересен случай, когда $t_0 = 0$ и $x_0 = 0$. Тогда $C = -\frac{1}{3\delta}\ln p$, если $p > \delta x^3$, и C не существует, если $p < \delta x^3$.

Рассмотрим пример.

Пусть в условных единицах заданы следующие данные: p = 7,29, k = 10, α =0,4, β =0,2, $t_0 = 0$, $x_0 = 1$.

Тогда δ = 3,14, ω = 0,942, $C = -\frac{1}{3 \cdot 3{,}14}\ln 4{,}15 = -0{,}151$. В этом случае

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{3{,}14}\left(7{,}29 - e^{-9{,}42\left(\frac{t^2}{1{,}884}-0{,}151\right)}\right)}. \quad (10)$$

График протекания данного процесса во времени показан на рис 2.

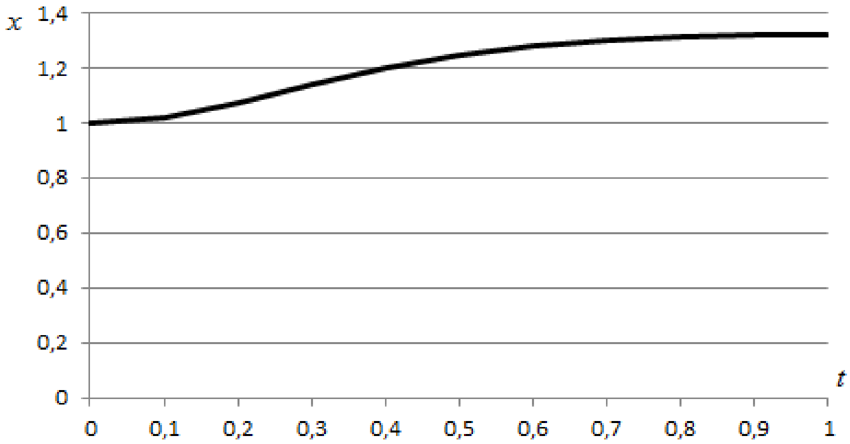

Рис. 2. Изменение роста во времени

Из графика видно, что в наблюдаемом процесса выделяются две составные части, определяемые точкой перегиба графика (сменой выпуклости кривой вниз на выпуклость вверх). Первая часть соответствует экспоненциальному росту энергии, осваиваемой растением, вторая часть связана с замедлением рассматриваемого процесса (насыщению растения потребляемой энергией)

Объем части стебля, изображенного на рис. 1, определяется по формуле (1) с учетом (10), т.е. получаем выражение

$$V = \frac{1}{4}\pi k \frac{1}{\delta}\left(p - e^{-3\delta\left(\frac{t^2}{2\omega}+C\right)}\right),$$

где константа C вычисляется либо по формуле (8), либо по формуле (9).

3. Случай изменения энергии с изменением объема

В этом случае уравнение (3) преобразуется к виду:

$$\eta V(t)t = \alpha V(t)t + \beta(\gamma V)', \tag{12}$$

здесь η - коэффициент пропорциональности.

Отсюда получаем соотношения:

$$(\eta-\alpha)V(t)t = \beta\gamma V'(t), \text{ т.е.}$$

$$(\eta-\alpha)\frac{1}{4}\pi k x^3 t = \beta\gamma\frac{3}{4}\pi k x^2 x_t'.$$

Отсюда имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{x}=\frac{(\eta-\alpha)tdt}{3\beta\gamma}. \tag{13}$$

Решение уравнения (13) дает следующий результат:

$$x=C\cdot e^{\frac{\eta-\alpha}{6\beta\gamma}t^2}. \tag{14}$$

$$C=x_0\cdot e^{\frac{\alpha-\eta}{6\beta\gamma}t_0^2}. \tag{15}$$

$$x=x_0\cdot e^{\frac{\eta-\alpha}{6\beta\gamma}(t^2-t_0^2)}. \tag{16}$$

Таким образом, изменение размеров элементов стебля растения происходит по экспоненциальному закону, возрастая, если $\eta>\alpha$, и убывая, если $\eta<\alpha$.

Заключение

В статье перечислены основные этапы нового метода описания роста растений, разработана математическая модель изменения массы и размеров составляющих элементов растений, рассмотрен случай изменения энергии роста с изменением объема рассматриваемого биологического объекта. Предложенный метод основан на анализе основных энергетических процессов, происходящих в растении. Разработанные в статье метод и математические модели могут быть использованы для мониторинга роста и развития растения, а также для прогнозирования данных процессов. Эти мероприятия позволят повысить эффективность производства сельскохозяйственной продукции.

Литература

1. Ганичева А.В. Системы в растениеводстве // Инновационные и нанотехнологии в системе стратегического развития АПК региона: материалы Международной научно-практической конференции. Тверь: ТГСХА, 2013. - С. 271–274.
2. Григулецкий В.Г. Приближенные цифровые модели роста и продуктивности растений (обзор) // Масличные культуры, 2022. - Вып. 3 (191). - С. 79–108.
3. Чечулин В.Л. О простых математических моделях роста культурных растений // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика, 2018, - №1. - С. 46-50.

References

1. Ganicheva A.V. Sistemy v rastenievodstve // Innovacionnye i nanotehnologii v sisteme strategicheskogo razvitija APK regiona: materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii. Tver': TGSHA, 2013. S. 271–274.

2. Griguleckij V.G. Priblizhennye cifrovye modeli rosta i produktivnosti rastenij (obzor) // Maslichnye kul'tury, 2022. Vyp. 3 (191). S. 79–108.

3. Chechulin V.L. O prostyh matematicheskih modeljah rosta kul'turnyh rastenij // Vestnik Permskogo universiteta. Serija: Matematika. Mehanika. Informatika, 2018, №1. S. 46-50.