УДК 622.011.43

UDC 622.011.43

5.2.2. Математические, статистические и инструментальные методы экономики (физико-математические науки, экономические науки)

5.2.2. Mathematical, statistical and instrumental methods of economics (physical and mathematical sciences, economic sciences)

РАСЧЕТ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ПОЛОСТИ В МАССИВЕ СОЛЯНЫХ ПОРОД МЕТОДОМ УПРУГИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

CALCULATION OF STRESS CONCENTRATION NEAR A CAVITY IN A SALT ROCK MASS BY THE ELASTIC APPROXIMATION METHOD

Аршинов Георгий Александрович
д-р техн. наук, профессор
Кубанский государственный аграрный университет, Краснодар, Россия

Arshinov Georgy Aleksandrovich
Dr.Sci.Tech., Professor
Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

Аршинов Александр Георгиевич
студент факультета прикладной информатики
Кубанский государственный аграрный университет, Краснодар, Россия

Arshinov Alexander Georgievich
student of the Faculty of Applied Informatics
Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

Выводятся условия, при которых последовательность, состоящая из элементов, являющихся упругими приближениями, сходится к точному решению физически нелинейной краевой задачи теории вязкоупругости

This article derives the conditions under which a sequence consisting of elements that are elastic approximations converges to an exact solution of a physically nonlinear boundary value problem in the theory of viscoelasticity

Ключевые слова: СОЛЯНЫЕ ТОЛЩИ, ПОЛЗУЧЕСТЬ СОЛЕЙ, ПОДЗЕМНЫЕ ВЫРАБОТКИ, ПОЛЯ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ, МЕТОД УПРУГИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Keywords: SALT SEQUENCES, SALT CREEP, UNDERGROUND WORKINGS, STRAIN AND STRESS FIELDS, ELASTIC APPROXIMATION METHOD

http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-191-001

В соляных породах возводятся горные выработки, которые применяются для различных целей. Известно, что при больших значениях горного давления соляные породы проявляют свойства нелинейной ползучести. Ползучесть солей вызывает значительные деформации, которые могут приводить к потери прочности сооружений, возводимых в горных породах.

Произвольный выбор форм, размеров подземных сооружений может вызывать их разрушение, поэтому необходимо разработать обоснованные методы расчета концентрации напряжений в окрестности подземных сооружений на основе строгих математически обоснованных моделях.

В настоящее время подземные массивы каменных солей используются для сооружения полостей, предназначенных для хранения больших объемов газа, нефти, нефтепродуктов, а также для захоронения опасных отходов различных промышленных производств. Подобные подземные выработки широко применяются, поскольку соляные породы представляют идеальный материал для сооружения в них различных хранилищ.

Соли хорошо растворимы в воде, что позволяет сооружать полости недорогим методом глубинного размыва. Кроме того, прочность соляных пород такова, что в них возможно создавать большие устойчивые полости.

Соли химически инертны по отношению к нефтепродуктам, газам и различным токсичным отходам, поэтому непроницаемы для них, так как при большом горном давлении в силу свойства ползучести все трещины в соляных породах с течением времени затягиваются и исчезают.

По сравнению с наземными подземные хранилища нефтепродуктов и газов в соляных породах не ухудшают экологию окружающей среды, не занимают площадь на поверхности земли и безопасны в пожарном отношении.

Выбор конфигурации, размеров подземных полостей хранилищ зависит от деформационных и прочностных характеристик соляной толщи, обладающей реологическими свойствами. Строительство и эксплуатация хранилищ в соляных массивах опирается на большой практический опыт, однако расчеты их на прочность, если не считать некоторые частные случаи, не имеют достаточного научного обоснования.

Известные строгие методы расчета подземных емкостей позволяют изучить лишь частные формы, то есть не обеспечивают полного анализа прочности таких хранилищ.

Опубликованные приближенные расчеты распределения напряжений вблизи полостей-хранилищ опираются на модели деформирования солей, которые недостаточно экспериментально обоснованы и не учитывают нелинейность свойств ползучести соляной толщи.

Емкости-хранилища, сооружаемые под землей, предназначены для длительной эксплуатации, поэтому в их расчетах прочности необходимо опираться на модели деформирования солей, которые учитывают влияния времени в длительных опытах при одноосном сжатии (растяжении) стержня, а также необходимо проводить опыты над полыми образцами цилиндрической формы под нагрузкой при формировании плоской деформации.

Нелинейность физических свойств реологических материалов с учетом возможности развития больших деформаций требует разработки математических моделей, которые предназначены для расчета полей напряжений и деформаций в конструкциях и в их элементах, когда изучается квазистатическое равновесие.

Опубликованные материалы, в которых предлагаются результаты расчета полей напряжений и деформаций, возникающих вблизи полостей, опираются на линейно-упругие методы, а поэтому недостаточно точны.

Аналитическими методами исследуется концентрация напряжений возле шаровой и эллипсоидальной форм емкостей-хранилищ. Эти формы не исчерпывают множества конфигураций полостей, возводимых в соляных породах.

Кроме того, нелинейные свойства ползучести дополнительно осложняют методы расчета выработок в соляных отложениях, поэтому необходимо применить численные методы анализа полей напряжений и деформаций, возникающих вблизи хранилищ реальных конфигураций.

В частности, для подобных расчетов успешно применяется метод конечных элементов. Он нашел широкое использование при расчетах различных деталей в ракетостроении, судостроении, исследовании на прочность плотин и откосов.

Более полный учет механических свойств горных массивов, в частности, солей возможен при использовании метода конечных элементов. Для того, чтобы повысить надежность и безопасность подземных полостей-хранилищ, необходимо при расчетах корректно поставить квазистатическую краевую задачу для массива, обладающего нелинейными вязкоупругими свойствами и содержащего полость с осевой симметрией с применением экспериментально обоснованных уравнений связи между напряжениями и деформациями соляных пород.

При расчете полей деформаций и напряжений, возникающих при вымывании полостей-газохранилищ в соляных породах, для описания связи между напряжениями и деформациями применяются соотношения теории нелинейной ползучести [1,2]

$$E\varepsilon_{ij}(t)=\sigma_{ij}(t)+\nu[\sigma_{ij}(t)-3\delta_{ij}\sigma(t)]+\frac{E}{2G}\int_0^t P[t,\tau,\sigma_{ij}(\tau)][\sigma_{ij}(\tau)-\delta_{ij}\sigma(\tau)]d\tau,$$

с ядром

$$P=D\tau^{-\alpha}\sigma_и^2(\tau),$$

в котором $\sigma_и$ – интенсивность напряжений, а α, D – реологические константы соляной породы.

Рассмотрим вопрос о сходимости последовательности, элементами которой являются упругие решения, получаемые при исследовании нелинейных задач теории вязкоупругости.

В работах А. А. Илюшина и Б. Е. Победри математически обосновываются зависимости между напряжениями и деформациями нелинейной теории вязкоупругости.

Авторы в нормированных пространствах H_ε и H_σ, элементами которых являются тензоры деформаций и напряжений $\varepsilon_{ij}(\tau)$ и $\sigma_{ij}(\tau)$ соответственно ($\tau\in[0,t]$), с нормами

$$\|E\| = \left(\int_0^t \varepsilon_{ij}(\tau)\varepsilon_{ij}(\tau)\rho_\varepsilon(t,\tau)d\tau\right)^{0,5};\quad \|\sigma\| = \left(\int_0^t \sigma_{ij}(\tau)\sigma_{ij}(\tau)\rho_\sigma(t,\tau)d\tau\right)^{0,5},$$

где функции $\rho_\varepsilon(t,\tau) > 0$, $\rho_\sigma(t,\tau) > 0$, показывают, что для любых операторов F, Q в отображениях $\sigma = F(E)$, $E = Q(\sigma)$, являющихся аналитическими в окрестности нуля, справедливо представление

$$\begin{cases} F(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \overset{v}{\Gamma} n\ E^n; \\ Q(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \overset{v}{K} n\ \sigma^n, \end{cases}$$

где

$$\overset{v}{\Gamma}_n E^n = \int_0^t \ldots \int_0^t \Gamma_n(t,\tau_1,\ldots,\tau_n)\ E(\tau_1)\ldots E(\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n;$$

$$\overset{v}{K}_n \sigma^n = \int_0^t \ldots \int_0^t K_n(t,\tau_1,\ldots,\tau_n)\ \sigma(\tau_1)\ldots\sigma(\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n.$$

Пусть деформирование соли описывается уравнениями [3]

$$S_{ij}(t) = 2G\ell_{ij}(t) - 18DG^3\int_0^t \tau^{-\alpha}\ell_и^2(\tau)\ell_{ij}(\tau)d\tau, \qquad (1)$$

где функции

$$P(\ell_{ij}, S_{ij}) = \frac{1}{2G}S_{ij}(t) + 9DG^2\int_0^t K(\tau)\ell_и^2(\tau)\ell_{ij}(\tau)d\tau,$$

причем $0 \le \tau \le \alpha$; $0 \le t \le \alpha$; $\ell_и^2 = \frac{2}{3}\ell_{ij}\ell_{ij}$,

а ядро

$$K(\tau) = \begin{cases} \tau^{-\alpha}, & 0 \le \tau \le t \\ 0, & \tau > t \end{cases}.$$

Допустим, что девиаторные компоненты тензоров напряжений и деформаций $S_{ij}(\tau)$, $\ell_{ij}(\tau)$ – элементы пространства C $[0,\alpha]$, норма которого $\|h_{ij}\| = \max\limits_{0\le\tau\le\alpha} |h_{ij}|$.

Производная по Фреше оператора $P[(\lambda_{ij}(\tau),S_{ij}(\tau)]$ имеет вид

$$P^{|}_{\tilde{\ell}_{ij}}(\ell_{ij}) = 9DG^2\int_0^t \tau^{-\alpha} f[\tilde{\ell}_{ij}(\tau)]\ell_{ij}(\tau)d\tau,$$

где

$$f(\tilde{\ell}_{ij}) = \begin{cases} \tilde{\ell}^2_{и} + \frac{4}{3}\tilde{\ell}^2_{IJ}, & i = j \\ \tilde{\ell}^2_{и} + \frac{8}{3}\tilde{\ell}^2_{IJ}, & i \ne j \end{cases}.$$

Пусть в шаре R $\|\ell_{ij}\| \le r$ пространства функций $C[0,\alpha]$ справедливо условие $\|P^{|}_{\tilde{\ell}_{ij}}(\ell_{ij})\| \le L$, тогда для произвольных девиаторных составляющих $\ell^{|}_{ij}$, $\ell^{||}_{ij} \in R$ имеет место неравенство

$$\|P(\ell^{|}_{ij}, S_{ij}) - P(\ell^{||}_{ij}, S_{ij})\| \le L\|\ell^{|}_{ij} - \ell^{||}_{ij}\|.$$

Отсюда следует, что в случае параметра L меньше единицы в шаре R с радиусом r оператор P – сжимающий, и метод последовательных приближений позволяет найти его неподвижную точку. За нулевое выбирается значение $P[0,S_{ij}(\tau)]$, для которого выполняется неравенство

$$\|P(0, S_{ij})\| \le (1-L)r.$$

(2)

С помощью оценки установим условие, для которого константа $L<1$:

$$\|P^{|}_{\tilde{\ell}_{ij}}(\ell_{ij})\| = \max_{0\le\tau\le\alpha}\left|9DG^2\int_0^t K(\tau)f[\tilde{\ell}_{ij}(\tau)]\ell_{ij}(\tau)\partial\tau\right| \le 9DG^2\|\ell_{ij}\|\cdot\|f(\tilde{\ell}_{ij})\|\cdot\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \le 81DG^2r^3\,\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

В результате

$$L = 81DG^2r^3 \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} < 1 ,$$

если

$$t < \left(\frac{1-\alpha}{81G^2Dr^3} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} . \tag{3}$$

Чтобы выполнялось неравенство (2), положим

$$\left\| S_{ij} \right\| \le 2G(1-L)r , \tag{4}$$

допуская, что справедливы неравенства (3) и (4).

Строя два приближения с условием применения (1), приходим к соотношению [2,3]:

$$\ell_{ij}(t) = \frac{1}{2G} S_{ij}(t) + \frac{D}{2G} \int_0^t \tau^{-\alpha} \sigma_и^2(\tau) S_{ij}(\tau) d\tau , \tag{5}$$

где

$$\sigma_и^2 = \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} .$$

А. А. Илюшин, Б. Е. Победря исследуют вопрос сходимости последовательности упругих решений задач теории нелинейной ползучести, когда описание физико-механических свойств материала имеют вид

$$S_{ij}(t) = \int_0^t \Gamma(t-\tau)\ell_{ij}(\tau)d\tau - \int_0^t \Gamma_\varphi(t-\tau)\varphi(\ell_и^2)\ell_{ij}(\tau)d\tau . \tag{6}$$

Здесь

$$\Gamma(t) = \overset{0}{\Gamma} \delta(t) + \widehat{\Gamma}(t); \quad \Gamma_\varphi(t) = \overset{0}{\Gamma}_\varphi \delta(t) + \widehat{\Gamma}_\varphi(t) .$$

Функция u есть так называемое обобщенное решение задачи

$$S_{ij,j}(u)+\sigma_{,i}(u)+F_i=0 \quad (7)$$

$$u|_{S=0,} \quad (8)$$

записанной в перемещениях, если она является решением уравнения

$$\int_v [S_{ij}(u)\ell_{ij}(w)+f_i w_i]=0,$$

в котором введены обозначения

$$f_i=\sigma_{,i}+F_i, \text{ а } \sigma=\frac{1}{3}\sigma_{ii},$$

В пространстве Н с нормой

$$(u,w)=\int_\nu \ell_{ij}(u)\ell_{ij}(w)d\nu \qquad (9)$$

путем замыкания по норме (9) совокупности функций, для которых выполняются условия, удовлетворяющие (7, 8), строится обобщенное решение.

Рассмотрим уравнение

$$x=\int_0^t \Gamma(t-\tau)y(\tau)d\tau.$$

Пусть его единственное решение

$$y=\int_0^t K(t-\tau)x(\tau)d\tau,$$

а для $\varphi(\ell_и^2)$ и $\Gamma_\varphi(t)$, когда t≥0, справедливы выражения

$$0\le\varphi(\ell_и^2)\le\varphi(\ell_и^2)+\frac{\varphi(\ell_и^2)-\varphi(\ell_{и1}^2)}{\ell_и-\ell_{и1}}\ell_{и1}\le\eta,$$

$$(10) \qquad \left|\Gamma_{\varphi}(t)\right| \le A\Gamma(t),$$

в которых $A\eta = q < 1$.

Пусть нулевым приближением будет такое $\lambda^2_И$, для которого $\ell^2_{и0} \le (1 - A\eta)M$, где М – некоторая постоянная величина, тогда получим сходимость последовательности упругих решений задачи теории ползучести с использованием (6).

Соотношения (1) являются следствием (6), если в них принять

$$\overset{0}{\Gamma} = 2G, \quad \tilde{\Gamma}(t) = \overset{0}{\Gamma}_к = 0, \quad \varphi(\ell^2_и) = \ell^2_и \ ,$$

а $\tilde{\Gamma}_{\varphi}(t - \tau)$ задать равенством

$$\Gamma(\tau) = 18DG^3\tau^{-\alpha}.$$

Приведенная теорема, определяющая условия сходимости последовательности упругих решений, остается справедливой для (1), т. е. для выражения (5).

Если имеет место условие

$$\max_{0 \le \tau \le t} |\ell_{ij}| \le r$$

то для величины η=12r^2 справедливо соотношение (10).

Если η и нулевое приближение u_0 отвечают неравенствам

$$\eta \le 10^{-3} \ ; \quad \ell^2_и(u_0) \le (1 - \eta)M, \qquad (11)$$

то последовательность упругих приближений решения задач для зависимостей (1) и (5) будет сходящейся, так как условия (3), (4) и (11) для t∈ [0–8,7·10^3 ч] имеют место.

Для построения сходящейся последовательности упругих приближений краевой задачи теории ползучести в качестве начального используется упругое поле перемещений u_0 этой задачи.

Список литературы

1. Аршинов Г. А. Конечно-элементная модель расчета напряженно-деформированного состояния упругого массива, содержащего осесимметричную полость [Электронный ресурс] / Г. А. Аршинов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ). – Краснодар: КубГАУ, 2005. – №08(016). С. 68–72. – IDA [article ID]: 0160508008. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2005/08/pdf/08.pdf, 0,312 у.п.л.

2. Аршинов Г. А. Исследование процесса деформирования массива каменной соли, содержащего подземное нефтегазохранилище [Электронный ресурс] / Г. А. Аршинов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ). – Краснодар: КубГАУ, 2005. – №08(016). С. 89–98. – IDA [article ID]: 0160508011. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2005/08/pdf/11.pdf, 0,625 у.п.л.

3. Аршинов Г. А. Квазистатический анализ напряженного и деформированного состояния вязкоупругого полупространства с осесимметричной полостью [Электронный ресурс]/ Г. А. Аршинов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ). – Краснодар: КубГАУ, 2005. – №08(016). С. 99–112. – IDA [article ID]: 0160508012. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2005/08/pdf/12.pdf, 0,875 у.п.л.

References

1. Arshinov G. A. Konechno-e`lementnaya model` rascheta napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya uprugogo massiva, soderzhashhego osesimmetrichnuyu polost` [E`lektronny`j resurs] / G. A. Arshinov // Politematicheskij setevoj e`lektronny`j nauchny`j zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchny`j zhurnal KubGAU). – Krasnodar: KubGAU, 2005. – №08(016). S. 68–72. – IDA [article ID]: 0160508008. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2005/08/pdf/08.pdf, 0,312 u.p.l.

2. Arshinov G. A. Issledovanie processa deformirovaniya massiva kamennoj soli, soderzhashhego podzemnoe neftegazoxranilishhe [E`lektronny`j resurs] / G. A. Arshinov // Politematicheskij setevoj e`lektronny`j nauchny`j zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchny`j zhurnal KubGAU). – Krasnodar: KubGAU, 2005. – №08(016). S. 89–98. – IDA [article ID]: 0160508011. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2005/08/pdf/11.pdf, 0,625 u.p.l.

3. Arshinov G. A. Kvazistaticheskij analiz napryazhennogo i deformirovannogo sostoyaniya vyazkouprugogo poluprostranstva s osesimmetrichnoj polost`yu [E`lektronny`j resurs]/ G. A. Arshinov // Politematicheskij setevoj e`lektronny`j nauchny`j zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchny`j zhurnal KubGAU). – Krasnodar: KubGAU, 2005. – №08(016). S. 99–112. – IDA [article ID]: 0160508012. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2005/08/pdf/12.pdf, 0,875 u.p.l.