

УДК 532.526.4

UDC 532.526.4

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and Math

ЗАКОН БЭРА И ГИПОТЕЗЫ ЭЙНШТЕЙНА О ВИХРЯХ**BAER'S LAW AND EINSTEIN'S VORTEX HYPOTHESES**Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D.Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.*Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада**Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada*

В работе рассматриваются численные решения уравнений Навье-Стокса, описывающие ламинарные и турбулентные течения в каналах различной геометрии и в полости при больших числах Рейнольдса. Разработан оригинальный численный алгоритм интегрирования системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, основанный на сходимости последовательности решений задачи Дирихле. На основе этого алгоритма создана численная модель слияния двух ламинарных потоков в Т-образном канале. Установлен новый механизм меандрирования, заключающийся в том, что при слиянии двух потоков образуется струя, содержащая зоны возвратного течения. Исследовано вихревое движение в прямоугольной полости. Установлено, что численное решение задачи с разрывными граничными условиями теряет устойчивость при числе Рейнольдса $Re > 2340$. Исследованы траектории частиц пассивной примеси в цилиндрической полости. Дано объяснение поведения чаинки в чашке чая при формировании тороидального вихря в результате кругового помешивания, чем подтверждается известная гипотеза Эйнштейна. Развита численная модель течения в открытом канале с уклоном дна во вращающейся системе. Показано, что как в ламинарном, так и в турбулентном потоке при некоторых условиях в канале возникает вторичное вихревое течение, обусловленное силой Кориолиса, чем объясняется известный закон Бэра и подтверждается гипотеза Эйнштейна

We consider numerical solutions of the Navier-Stokes equations describing laminar and turbulent flows in channels of various geometries and in the cavity at large Reynolds numbers. An original numerical algorithm for integrating a system of nonlinear partial differential equations is developed, based on the convergence of the sequence of solutions of the Dirichlet problem. Based on this algorithm, a numerical model is created for the fusion of two laminar flows in a T-shaped channel. A new mechanism of meandering is established, which consists in the fact that when the two streams merge, a jet is formed containing the zones of return flow. Vortex motion in a rectangular cavity is studied. It is established that the numerical solution of the problem with discontinuous boundary conditions loses stability at Reynolds number $Re > 2340$. The trajectories of passive impurity particles in a cylindrical cavity are investigated. An explanation of the behavior of tea leaves in a cup of tea in the formation of a toroidal vortex because of circular stirring is confirmed, which is confirmed the well-known hypothesis of Einstein. A numerical model of flow in an open channel with a bottom incline in a rotating system is developed. It is shown that in both laminar and turbulent flow under certain conditions a secondary vortex flow arises in the channel due to the Coriolis force, which explains the well-known Baer law and confirms the Einstein hypothesis

Ключевые слова: УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА,
ТУРБУЛЕНТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ, ЗАКОН БЭРАKeywords: NAVIER-STOKES, TURBULENT
FLOWS, BAER'S LAW**Doi: 10.21515/1990-4665-133-048****Введение**

Закон Бэра [1] и его качественное физическое объяснение данное Эйнштейном [2] демонстрируют влияние вращения нашей планеты на

течение рек и эрозионные процессы, приводящие к размыву берегов. Бэр справедливо полагал, что наблюдаемая в природе закономерность - у «рек, текущих на север или на юг, правый берег высок, а левый низмен» [1], обусловлена силой Кориолиса, которая действует на всем протяжении течения реки (отметим, что берега определяются по отношению к наблюдателю, повернутому лицом в направлении течения реки). В 1926 г Эйнштейн [2] добавил к этому объяснению гипотетический вихрь, располагающийся поперек течения.

Интересно, что гипотеза Эйнштейна переключалась во многие статьи как полноценное объяснение явления, хотя современные модели речных потоков [3-4] свидетельствуют о сложном турбулентном течении, едва ли похожем на гипотетический вихрь Эйнштейна. Тем не менее, наше исследование показывает, что существуют условия, при которых в прямоугольном канале под влиянием силы Кориолиса формируется вихрь, охватывающий течение от одного берега до другого.

В работах [5-15] мы рассмотрели некоторые вопросы моделирования турбулентных течений. Основные результаты, касающиеся неизотермических потоков с учетом силы плавучести, были получены в наших работах [7-10] и других. В работе [11] рассмотрено общее соотношение для плотности, скорости и давления в турбулентных потоках, которое позволяет осуществить регуляризацию системы уравнений Навье-Стокса при числе Маха $M \rightarrow 0$, что соответствует несжимаемому течению.

Основной результат, который получен при численном интегрировании регуляризированной системы уравнений [12-15] — это устойчивость численного алгоритма при больших числах Рейнольдса, $Re \geq 10^6$, что объясняется, в первую очередь, параболическим типом системы и большой величиной турбулентной вязкости. К сожалению, ввиду отсутствия теоремы

существования и единственности для решений системы уравнений Навье-Стокса, остается вопрос о единственности полученных решений.

В настоящей работе развиты численные модели ламинарных и турбулентных течений в Т-образном канале, в полости в форме прямоугольника и в цилиндрической полости при больших числах Рейнольдса. Установлен новый механизм меандрирования, заключающийся в том, что при слиянии двух потоков образуется струя, содержащая зоны возвратного течения. Развита численная модель ламинарного и турбулентного течения в открытом канале с уклоном дна во вращающейся системе. Показано, что в канале прямоугольного сечения возникает вихревое течение, обусловленное вращением системы, чем объясняется известный закон Бэра.

Уравнения Навье-Стокса и проблема моделирования турбулентных течений над шероховатой поверхностью

Рассмотрим систему уравнений, описывающую неизотермическое атмосферное течение несжимаемого газа с учетом сил плавучести и переноса инертной примеси, имеем [5-15]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho_0} &= \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} (\rho - \rho_0) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \frac{\nu}{\text{Pr}} \nabla^2 T \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi &= \frac{\nu}{\text{Sc}} \nabla^2 \phi \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь обозначено: ρ - плотность воздуха; $\mathbf{u} = (u, v, w)$ - вектор скорости потока; ν - кинематическая вязкость; P - давление за вычетом гидростатического атмосферного давления; \mathbf{g} - вектор ускорения свободного падения; ρ_0 - равновесная плотность; T - температура, Pr - число Прандтля; ϕ

массовая концентрация примеси; $Sc = \nu / D$ - число Шмидта; D - коэффициент молекулярной диффузии.

Гидростатическое уравнение и стандартное приближение Буссенеска для возмущений плотности заданы в виде

$$\nabla p_0 = \mathbf{g}\rho_0(p_0, T_0), \quad \rho - \rho_0 = -\rho_0\beta(T - T_0) \quad (2)$$

Здесь $\beta = -\rho^{-1}(\partial\rho/\partial T)_p$ - коэффициент расширения, $\beta = 1/T$ для идеального газа.

Определим систему декартовых координат таким образом, чтобы ось Z была направлена против направления вектора ускорения свободного падения. Рельеф обтекаемой поверхности описывается уравнением $z = r(x, y)$. Граничные условия для параметров течения зададим на обтекаемой поверхности и на границе пограничного слоя следующим образом:

$$\begin{aligned} z = r(x, y): \quad \mathbf{u} = 0, \quad T = T_g, \quad \phi = \phi_g \\ z = H: \quad \mathbf{u} = U_0(1, 0, 0), \quad T = T_0, \quad \phi = \phi_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь T_g - температура подстилающей поверхности, ϕ_g - концентрация примеси на поверхности, H - высота пограничного слоя, U_0 - скорость течения на высоте $z = H$, T_0, ϕ_0 - температура и концентрация примеси на высоте $z = H$ соответственно.

По координатам x, y зададим периодические граничные условия. Считаем, что в начальный момент скорость течения, температура и концентрация примеси описываются линейными функциями, имеем

$$t = 0: \quad \mathbf{u} = U_0 z / H, \quad T = T_g + (T_0 - T_g)z / H, \quad \phi = \phi_g + (\phi_0 - \phi_g)z / H \quad (4)$$

Решения задачи (1)-(4) для различных турбулентных течений были получены в наших работах [7-15] и других. Практически при любой функции распределения шероховатости $z = r(x, y)$ течение довольно быстро переходит в

турбулентный режим с установлением логарифмического профиля скорости, температуры и концентрации примеси

Этот факт, установленный во многих исследованиях, показывает, что природа изобрела наиболее экономичный способ движения в форме логарифмического профиля. Однако если логарифмический профиль подставить во второе уравнение (1), то можно убедиться, что это уравнение не выполняется. Такой результат означает, что в природе существуют силы, которые поддерживают логарифмический профиль, но которые не нашли отражения в уравнениях (1). Обычно происхождение этих сил приписывают так называемым напряжениям Рейнольдса, обусловленным турбулентной вязкостью или диффузией.

Обратимся к методу решения проблемы турбулентной диффузии, который был предложен в наших работах [5-11]. Основная идея заключается во введении в уравнения (1) случайных параметров. Например, в пограничном слое можно представить вектор скорости течения $\mathbf{u} = (u, v, w)$ в форме $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z/h(x, y, t), t)$, где $h = h(x, y, t)$ — это поверхность, описывающая динамическую шероховатость [5-11].

Предполагается, что такую поверхность можно характеризовать случайными параметрами h, h_x, h_y, h_t , которые имеют смысл высоты, скорости движения элемента и наклонов поверхности. Обозначим функцию распределения этих параметров $f_s = f_s(h, h_x, h_y, h_t)$.

Предположим, что $\eta = z/h = const$ и рассмотрим достаточно представительную область течения объемом $dV = L_x L_y dz$, где L_x, L_y - типичные масштабы течения в направлениях x, y соответственно – рис.1. Рассмотрим подобласть течения dV_s , которая принадлежит рассматриваемой области

течения dV , и в которой случайные параметры h, h_t, h_x, h_y изменяются в интервалах $(h; h + dh)$, $(h_t; h_t + dh_t)$, $(h_x; h_x + dh_x)$, $(h_y; h_y + dh_y)$.

В общем случае подобласть dV_s является многосвязной областью, объем которой задается уравнением

$$dV_s = dV f_s(h, h_x, h_y, h_t) dh dh_x dh_y dh_t.$$

Случайная амплитуда скорости может быть определена путем суммирования выражения $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z/h(x, y, t), t)$ в объеме dV_s :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t) = \lim_{\delta V \rightarrow dV_s} \frac{1}{\delta V} \int \mathbf{u}(x, y, \eta, t) dx dy dz \quad (5)$$

Здесь δV - произвольный объем, вложенный в $dV = L_x L_y dz$ и содержащий dV_s . Очевидно, что $\tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t)$ является случайной функцией, поскольку зависит от случайных параметров. Уравнения, описывающие динамику $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t)$, следуют из уравнений (1) и (5), а их вывод дан в [3-5].

Статистический момент порядка m случайной функции $\tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t)$ определяется следующим образом

$$\bar{\tilde{\mathbf{u}}}^m(z, t) = \int \tilde{\mathbf{u}}^m(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t) f_s(h, h_x, h_y, h_t) dh dh_x dh_y dh_t \quad (6)$$

В результате применения указанных преобразований система уравнений (23) принимает вид [7-10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= 0 \quad (7) \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{N}}{\rho_0 h} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \eta} &= \frac{\nu}{h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \eta} - \\ &- \frac{\nu n^2 \eta}{h^2} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \eta} + \frac{\nu \mathbf{N}}{h^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} (\tilde{\rho} - \rho_0) \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} &= \frac{\nu}{Pr h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} - \frac{\nu n^2 \eta}{Pr h^2} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta} = \frac{\nu}{Sch^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta} - \frac{\nu n^2 \eta}{Sch^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta}$$

Здесь $\tilde{W} = \tilde{w} - \eta \Phi$, $\Phi = h_t + h_x \tilde{u} + h_y \tilde{v}$, $\tilde{P} = \tilde{p} + \theta$, $n = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$, $\mathbf{N} = (-\eta h_x, -\eta h_y, 1)$.

Отметим, что фигурирующая в уравнениях (7) турбулентная вязкость пропорциональна квадрату расстояния до шероховатой стенки. Система уравнений (7) имеет установившееся решение в форме логарифмического профиля, как для скорости, так и для температуры и концентрации [7].

Модель турбулентной среды

Методы прямого численного моделирования турбулентных течений (DNS) опираются непосредственно на систему уравнений (1). При этом для вычисления профиля скорости часто используется приближенный метод Галеркина или метод моментов, а также метод Ритца и другие приближенные методы. В частности, в работе [16] используется усредненная система уравнений Навье-Стокса. В этом смысле использованное нами разложение (4)-(5) можно рассматривать как один из таких приближенных методов.

Но даже при наличии приближенного метода решения прямое численное моделирование турбулентности не всегда приводит к желаемому результату, так как система уравнений (1), сформулированная для несжимаемых течений, содержит в себе противоречие. Действительно, при выводе этой системы уравнений предполагается, что плотность среды не меняется, а это, в свою очередь, означает малость числа Маха потока [17]

$$M = U_0 / c_s \ll 1 \tag{8}$$

Здесь c_s – скорость звука. Однако, на таких решениях, которые описаны в работе [12], условие (8) может нарушаться, что приводит к необходимости учета сжимаемости среды. При этом желательно, чтобы тип системы

уравнений (1) не изменился при всех ее модификациях. Известно множество способов регуляризации системы уравнений (1), как по давлению, так и по градиенту скорости [17].

Рассмотрим следующий подход к учету сжимаемости без изменения типа системы уравнений (1). Запишем уравнение неразрывности для сжимаемой среды в форме

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\rho^{-1} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{\rho c_s^2} \frac{dP}{dt} \quad (9)$$

Оценка правой части уравнения (9) имеет порядок $M^2 \omega_0$, где ω_0 – характерная частота пульсаций давления. При выполнении условия (8) и для умеренных частот правую часть можно устремить к нулю, в результате приходим к первому уравнению (1). Однако для больших частот колебаний параметров потока, характерных для турбулентных режимов, условия (8) может оказаться недостаточно для того, чтобы положить нулю правую часть уравнения (9). Область таких частот определяется неравенством $M^2 \omega_0 \geq 1$.

Следовательно, турбулентная среда не может считаться несжимаемой даже при малых числах Маха. Для такой среды необходимо сформулировать такое уравнение состояния, которое отражало бы связь параметров в турбулентном потоке. Рассмотрим функционал

$$\tilde{P} = \frac{1}{t} \int_0^t P dt \quad (10)$$

Функционал (10) обладает следующими свойствами

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t P dt = P \\ \tilde{P} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P dt = \langle P \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, используя функционал (10) можно описать мгновенное и среднее значение давления в турбулентном потоке. Вычисляя производную по времени от обеих частей выражения (10), находим

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = \frac{P - \tilde{P}}{t} \quad (12)$$

Положим в правой части (12) $t = 1/\omega_0$, а соответствующий этому времени функционал (10) обозначим P_0 . Теперь мы можем сформулировать необходимый критерий регуляризации в виде

$$\frac{dP}{dt} = \alpha\omega_0(P - P_0) \quad (13)$$

Здесь α, ω_0, P_0 – некоторые параметры, которые могут быть определены для потока в целом. В результате применения (13) к уравнению (10), находим

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\alpha\omega_0 \frac{P - P_0}{\rho c_s^2} = -\frac{P - P_0}{\mu_T} \quad (14)$$

Где обозначено $\mu_T = \rho c_s^2 / \alpha\omega_0$ - параметр, характеризующий вязкость в турбулентном потоке. Используя уравнение (14), можно переформулировать модель Навье-Стокса (1) в виде, удобном для численного интегрирования. Для этого запишем второе уравнение (1) в общей форме

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho_0} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (15)$$

Здесь $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, x_i)$ – вектор объемных сил. Вычислим дивергенцию от обеих частей уравнения (15), тогда, используя (14) с постоянными параметрами μ_T, P_0 получим

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) P = \nu_T \nabla^2 P - \mu_T (\nabla \cdot \mathbf{f}) - \mu_T \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (16)$$

Здесь по повторяющимся индексам $i, k = 1, 2, 3$ осуществляется суммирование, $\nu_T = (\mu_T + \mu) / \rho_0$ - параметр турбулентной диффузии поля

давления, $\mu = \rho_0 \nu$ - динамическая вязкость. Наконец, мы можем записать систему уравнений (1) в форме системы уравнений параболического типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} &= \nu \nabla^2 u_i + f_i, \quad i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) P &= \nu_T \nabla^2 P - \mu_T (\nabla \cdot \mathbf{f}) - \mu_T \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \frac{\nu}{\text{Pr}} \nabla^2 T \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi &= \frac{\nu}{\text{Sc}} \nabla^2 \phi \end{aligned} \quad (17)$$

Отметим, что параметры турбулентной диффузии и вязкости возникают в системе (17) в силу уравнения (14). Параметр турбулентной диффузии в модели (17) имеет ясный физический смысл, как и происхождение напряжений Рейнольдса. Система уравнений (17) может быть использована для моделирования неустановившихся турбулентных течений [11-15].

Другой вариант преобразованной системы уравнений Навье-Стокса может быть получен путем прямой подстановки выражения давления (14) в уравнение (15), имеем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P_0}{\rho_0} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla (\mu_T (\nabla \cdot \mathbf{u})) + \mathbf{f} \quad (18)$$

Здесь параметры P_0, μ_T следует считать заданными функциями координат и времени. Отметим, что в модели (18) турбулентность проявляется через механизм второй или объемной вязкости, а не через сдвиговые напряжения, как в стандартных моделях турбулентности, включая модель [5-10].

Уравнение (18) было использовано в работах [11-15] для моделирования турбулентного течения в прямоугольной полости при

ускорении внешнего потока и при наличии объемной силы, а также вихревых течений на Юпитере и Сатурне.

Метод решения системы уравнений Навье-Стокса

В случае ламинарных течений при больших числах Рейнольдса может быть эффективным следующий метод. Рассмотрим задачу Дирихле для системы линейных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}[k]}{\partial t} + (\mathbf{u}[k-1] \cdot \nabla) \mathbf{u}[k] + \frac{\nabla P[k]}{\rho_0} = \nu \nabla^2 \mathbf{u}[k] + \mathbf{f}[k], \quad \nabla \cdot \mathbf{u}[k] = 0 \quad (19)$$

Предположим, что существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max |\mathbf{u}[k] - \mathbf{u}[k-1]| \rightarrow 0 \quad (20)$$

Тогда $\mathbf{u}[\infty]$ есть решение системы уравнений Навье-Стокса при заданных граничных условиях. На практике при использовании метода конечных элементов с известной погрешностью число итераций колеблется в пределах $10 \leq k \leq 100$, в зависимости от числа Рейнольдса. Метод является эффективным при решении установившихся ламинарных течений вплоть до перехода к турбулентности. Рассмотрим задачи, при решении которых был использован указанный метод.

Течение в Т-образном канале

Два неравных по расходу потока движутся в Т-образном канале навстречу друг другу, сталкиваются, разворачиваются и устремляются в отвод перпендикулярно первоначальному направлению течения – рис. 1. Сформулируем условия на открытых границах канала в виде:

$$u(0, y) = 2y(1-y), \quad u(3, y) = -y(1-y), \quad p(x, -7) = 0 \quad (21)$$

На стенках канал выполняется условие прилипания $\mathbf{v} = 0$. Поле скорости имеет две компоненты $\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y))$. На рис. 1 представлены результаты численного решения задачи (20), (21) по предложенному алгоритму при числе Рейнольдса $Re = 1500$.

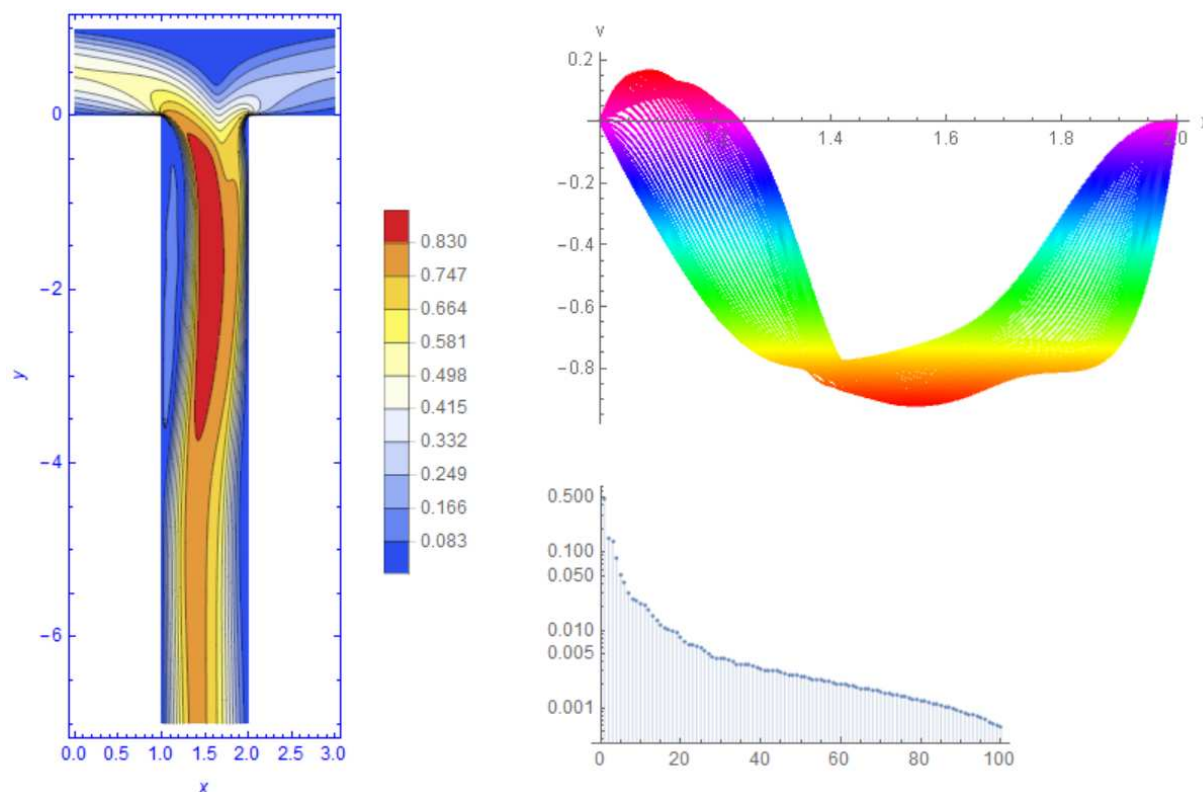


Рис. 1. Течение в Т-образном канале при числе Рейнольдса $Re = 1500$: линии уровня модуля скорости (слева) и семейство профилей компоненты скорости $v(x, y_i), -7 \leq y_i \leq -0.5$ (справа сверху). Справа внизу показана сходимость метода с ростом числа итераций.

Из приведенных на рис. 1 данных следует, что после слияния двух потоков возникают длинноволновые колебания с образованием зон возвратного течения, что можно рассматривать как механизм меандрирования. Отметим, что в настоящее время известно несколько различных гипотез о механизме меандрирования рек [4], включая теорию Эйнштейна [2] и статистическую модель [18].

2D течение в прямоугольной полости

Рассмотрим двумерное стационарное течение в прямоугольной полости $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ – рис. 2. Поле скорости в этом случае имеет две компоненты $\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y))$. На верхней границе поставим условия:

$$u(x,1) = 1, \quad v(x,1) = 0, \quad p(x,1) = 0 \quad (22)$$

На остальных границах полости выполняется условие прилипания $\mathbf{v} = 0$.

На рис. 2-3 представлены данные моделирования течения в прямоугольной полости при числе Рейнольдса $Re = 1000; 2400$ соответственно.

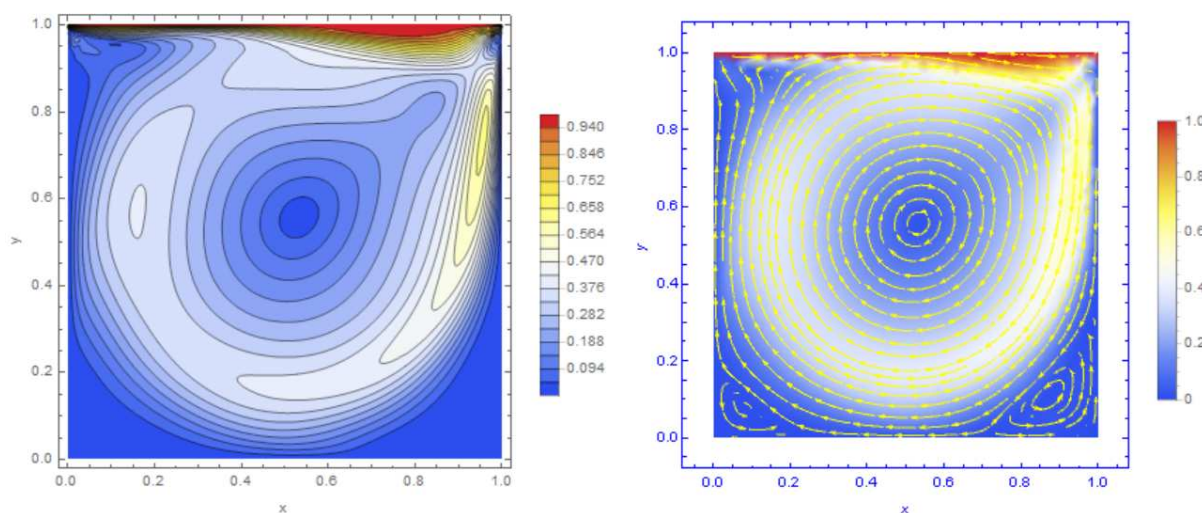


Рис. 2. Ламинарное течение в прямоугольной полости при числе Рейнольдса $Re = 1000$: слева - линии уровня модуля скорости; справа – линии тока.

Полученные данные при $Re = 1000$ согласуются с известными результатами [20]. Однако уже при $Re > 2430$ обсуждаемый метод решения задачи о течении в прямоугольной полости теряет устойчивость, что, видимо, указывает на отсутствие стационарных решений в этой области параметров. Из данных, приведенных на рис. 3 можно видеть, что вторичные течения развиваются в углах полости. Было установлено в экспериментах с водой и

раствором глицерина [21], что переход к режиму автоколебаний в кубической полости происходит при $1700 < Re < 1970$. Течение в полости в экспериментах [21] возбуждалось движением ленты транспортера, прилегающей к верхней грани. Таким образом, с большой точностью выполнялись граничные условия (22) для скорости.

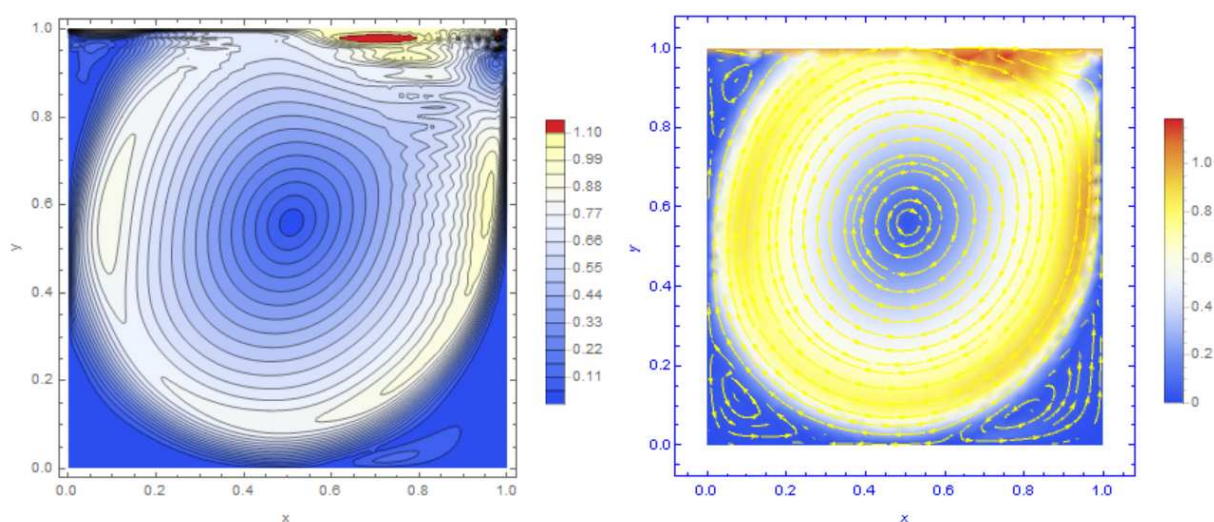


Рис. 3. Ламинарное течение в прямоугольной полости при числе Рейнольдса $Re = 2400$: слева - линии уровня модуля скорости; справа – линии тока.

С другой стороны, некоторые численные модели в плоском случае демонстрируют устойчивость вплоть до $Re = 20000$ [20]. Заметим, что наши результаты получены на сетках 2000×2000 . Кроме того, мы использовали уравнения Навье-Стокса в исходной форме, тогда как, например, в [20] численно интегрировалась система уравнений для функции тока и завихренности, т.е. поле скорости предполагалось заведомо более гладким, чем в обсуждаемой задаче (19) и (22).

Движение чайных листочков в чашке чая

Эйнштейн [2] обратил внимание на поведение чайных листочков (чаинок) в чашке чая: при любом исходном распределении чаинок по дну чашки, круговое помешивание ложкой приводит чаинки в движение таким образом, что чаинки собираются в центре чашки. Реально в эксперименте чаинки вначале собираются в бублик, а потом стягиваются к центру по мере уменьшения скорости потока – рис. 4.



Рис. 4. Последовательность кадров (слева направо) в двух экспериментах демонстрирует изменение распределения взвешенных частиц (чаинок) при уменьшении числа Фруда.

Будем моделировать движение жидкости и частиц по числу Фруда

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gL}}$$

Здесь g – ускорение свободного падения, L – характерный размер системы.

Рассмотрим две гипотезы: 1) снижение скорости потока при неизменных размерах системы приводит к уменьшению числа Фруда, чем и объясняется поведение чаинок - рис. 4; 2) при помешивании в чашке образуется тороидальный вихрь, который подхватывает чаинки и стягивает

их к центру [2]. Обе гипотезы были проверены в численных экспериментах и получили подтверждение – рис 5-6.

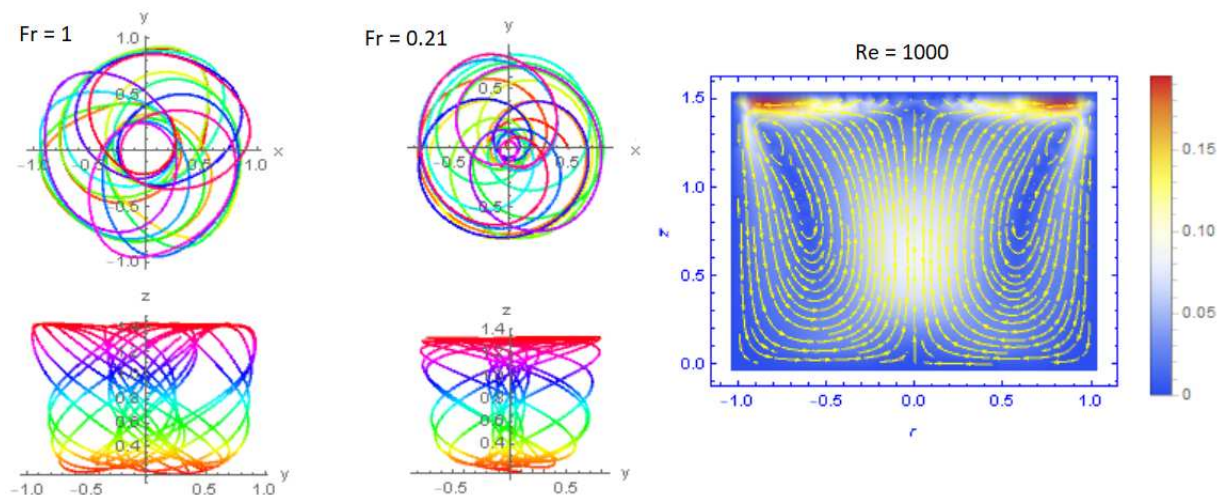


Рис. 5. Траектории частиц при двух значениях числа Фруда $Fr = 1; 0.21$ и линии тока вторичного течения, вычисленные по модели (18), (23) при $Re = 1000$.

При моделировании по числу Фруда используем модель установившегося осесимметричного течения в цилиндрической полости, которое возбуждается через верхнюю границу аналогично рассмотренному выше течению в прямоугольной полости. Поле скорости в цилиндрической системе координат имеет в этом случае три компоненты, $\mathbf{u} = (u_r(r, z), u_\phi(r, z), u_z(r, z))$. На верхней границе поставим условия:

$$u_r(r, h) = 0, u_\phi(r, h) = r, u_z(r, h) = 0, p(r, h) = 0 \quad (23)$$

На остальных границах полости выполняется условие прилипания $\mathbf{u} = 0$. Физически условия (23) реализуются при возбуждении течения плоским вращающимся диском, примыкающим к поверхности жидкости. Результаты решения задачи (18), (23) при числе Рейнольдса $Re = 1000$ представлены на рис. 5 слева. Линии тока, изображенные на этом рисунке, показывают, что

вторичное течение действительно образует тороидальный вихрь в полном соответствии с гипотезой Эйнштейна [2]. Траектории частиц, вычисленные с учетом сопротивления среды и силы тяжести демонстрируют сильную зависимость от числа Фруда, что качественно соответствует экспериментальным данным, приведенным на рис. 4.

Вообще говоря, течение в чашке является турбулентным, в чем легко можно убедиться, размешав ложкой чистую воду и бросив туда кристаллы марганцовки. Для моделирования турбулентного течения в цилиндрической полости используем уравнение (18). Результат существенно зависит от способа возбуждения течения – рис. 6.

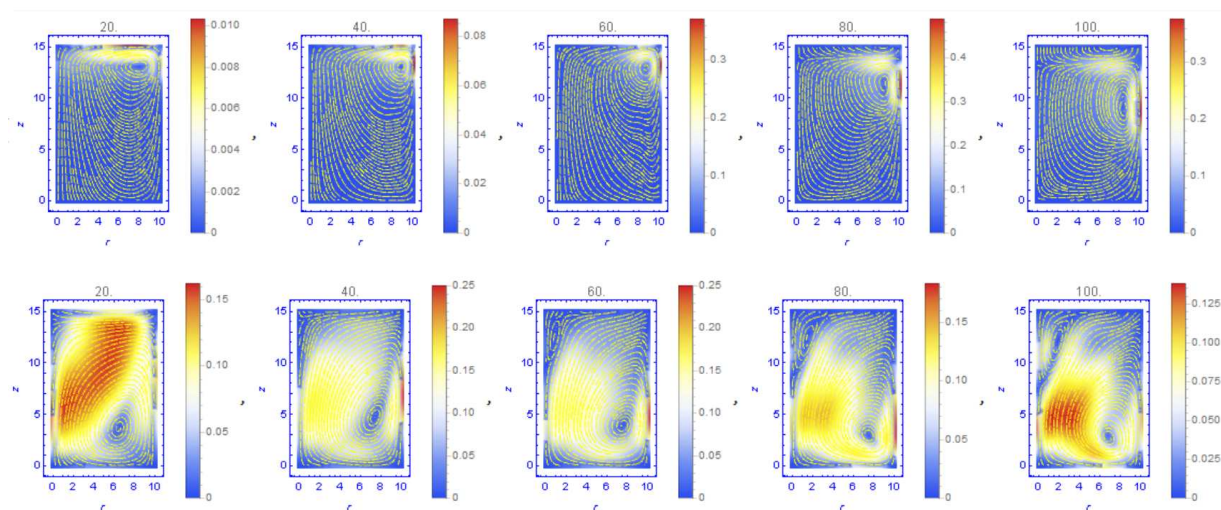


Рис. 6. Турбулентное течение в цилиндрической полости при поверхностном (вверху) и объемном (внизу) возбуждении при $Re = 10^5$. Над рисунками указано время с момента начала возбуждения.

Так, при возбуждении с поверхности формируется вихревое течение, похожее на тороидальный вихрь в ламинарном течении – рис. 5. При объемном же возбуждении возникает тороидальный вихрь, прижатый ко дну

полости – рис. 6. Следовательно, гипотеза Эйнштейна [2] находит свое подтверждение и в случае турбулентного течения.

Течение во вращающемся канале с уклоном дна

В современных моделях предполагается, что в случае речных течений вклад силы Кориолиса мал, поэтому им можно пренебречь, во всяком случае, при определении профиля течения в поперечном направлении и в проблеме меандрирования [3-4, 19]. Но тогда следует отбросить гипотезы Бэра [1] и Эйнштейна [2], опирающиеся на предположение о влиянии силы Кориолиса на подмыв берегов и на формирование вихревого вторичного течения соответственно.

Чтобы оценить вклад силы Кориолиса, рассмотрим течение в канале с прямоугольным сечением, с уклоном дна во вращающейся системе координат – рис. 7-8. В этом случае уравнения Навье-Стокса модифицируются с учетом силы Кориолиса [14-15, 17], имеем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2[\boldsymbol{\Omega} \mathbf{u}] + \frac{\nabla P}{\rho_0} = \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

Здесь $\boldsymbol{\Omega}$ - вектор угловой скорости вращения планеты. Направим оси декартовой системы координат (x, y, z) на восток, по вертикали вверх и на юг соответственно.

Будем предполагать, что поле скорости имеет три компоненты, зависящие только от поперечных координат, $\mathbf{u} = (u_x(x, y), u_y(x, y), u_z(x, y))$. Скорость потока вдоль канала направлена на юг и поддерживается за счет постоянного уклона. Вторичное течение в установившемся ламинарном потоке возбуждается в этом случае благодаря силе Кориолиса. На рис. 7 представлены результаты расчетов течения в прямоугольном лотке с отношением сторон 1:4, полученные по модели (19) с учетом силы Кориолиса при $Re = 1000, Ek = 0.1$.

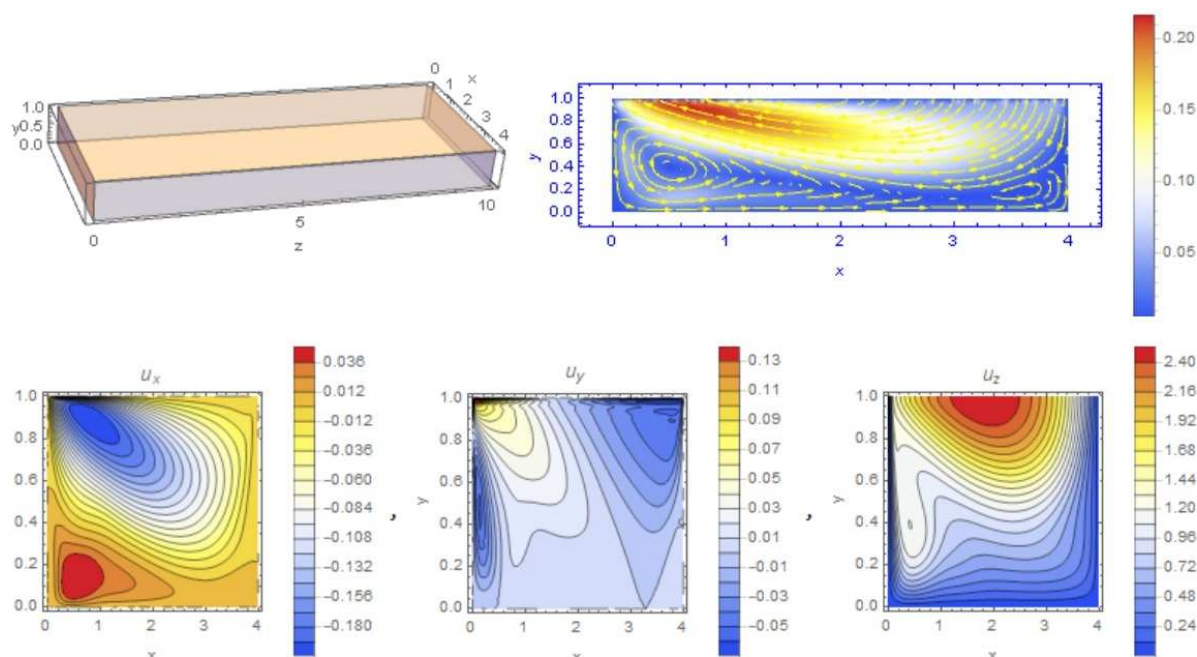


Рис. 7. Линии тока и компоненты скорости течения в прямоугольном лотке с отношением сторон 1:4, полученные по модели (19) с учетом силы Кориолиса при $Re = 1000, Ek = 0.1$

Параметр Кориолиса зависит от угла широты по формуле $f_c = 2\Omega \sin \varphi$. Динамика потока во вращающейся системе определяется числами Россби и Экмана:

$$Ro = \frac{u}{f_c L}, \quad Ek = \frac{\nu}{f_c L^2}$$

Для широты $\varphi = 45^\circ$ параметр Кориолиса составляет $f_c \approx 10^{-4} s^{-1}$. Кинематическая вязкость речной воды при нормальных условиях $\nu = 1.01 \times 10^{-6} m^2/s$, следовательно, число Экмана для потоков со средней глубиной $L \approx 1 m$ приблизительно равно $Ek \approx 10^{-2}$.

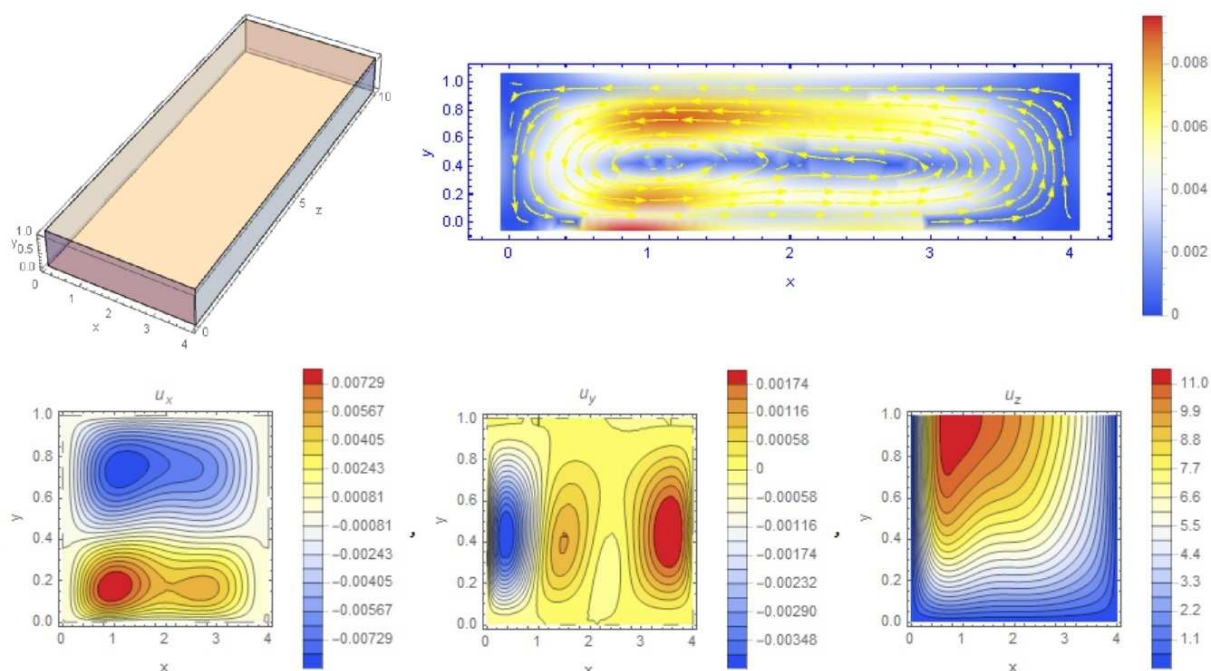


Рис. 8. Линии тока и компоненты усредненной скорости турбулентного течения в прямоугольном лотке с отношением сторон 1:4, полученные по модели (18) с учетом силы Кориолиса при $Re = 10^6$, $Ek = 0.01$

Заметим, что течения в реках являются турбулентными, поэтому данные на рис. 7 только демонстрируют наличие эффекта силы Кориолиса. Тем не менее, для турбулентных течений наблюдается аналогичная картина – рис. 8. Из приведенных на рис. 7-8 данных следует, что основной поток и вторичное течение сносятся к правому берегу под влиянием силы Кориолиса, в полном соответствии с гипотезами Бэра [1] и Эйнштейна [2].

Библиографический список

1. Бэр К. Почему у наших рек, текущих на север или на юг, правый берег высок, а левый низмен? // Морской сборник. СПб., 1857. Т. 27. Отд. 3. С. 110—126.
2. Einstein A. Die ursache der meandebildung der flusslaufe und des sogenannten baerschen gesetzes. Die Naturwissenschaften, 2 223, 1926; Эйнштейн А. Причины образования извилин в руслах рек и т. н. закон Бэра//УФН, 59, 185, 1956.

3. Nicholas A. P., Sambrook Smith G. H. Numerical simulation of three-dimensional flow hydraulics in a braided channel// Hydrol. Process. 13, 913-929,1999.

4. Coulthard T. J., Van De Wiel M. J. Modelling river history and evolution// Phil. Trans. R. Soc. A (2012) 370, 2123–2142.

5. Trunev A. P. Diffuse processed in turbulent boundary layer over rough surface/ Air Pollution III, Vol.1. Theory and Simulation, eds. H. Power, N. Moussiopoulos & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Publ., Southampton, pp. 69-76, 1995.

6. Trunev A. P., Similarity theory and model of diffusion in turbulent atmosphere at large scales, Air Pollution V. Modelling, Monitoring and Management, eds. H. Power, T. Tirabassi & C.A. Brebbia, CMP, Southampton-Boston, pp. 109-118, 1997.

7. Trunev A. P. Theory of Turbulence and Model of Turbulent Transport in the Atmospheric Surface Layer. - Russian Academy of Sciences, Sochi, 160 p., 1999 (in Russian).

8. Трунев А.П. Теория турбулентности и моделирование турбулентного переноса в атмосфере. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №05(059). С. 179 – 243; №06(060). С. 412 – 491.

9. Трунев А.П. Теория турбулентности и модель влияния плотности шероховатости // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №04(058). С. 348 – 382.

10. Трунев А.П. Теория и константы пристенной турбулентности // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №04(058). С. 383 – 394.

11. Трунев А.П. Физические механизмы турбулентной вязкости и моделирование турбулентности на основе уравнений Навье-Стокса // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №04(118). С. 1469 – 1487. – IDA [article ID]: 1181604096. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/96.pdf>

12. Трунев А.П. Моделирование турбулентного течения в полости на основе уравнений Навье-Стокса / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №05(119). С. 1111 – 1133. – IDA [article ID]: 1191605079. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/05/pdf/79.pdf>

13. Трунев А.П. Моделирование турбулентного МГД течения в прямоугольной полости во вращающемся магнитном поле / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №10(124). С. 1244 – 1269. – IDA [article ID]: 1241610079. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/10/pdf/79.pdf>, 1,625 у.п.л.

14. Трунев А.П. Моделирование гексагонального турбулентного течения в северной полярной области Сатурна / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №01(125). С. 738 – 759. – IDA [article ID]: 1251701050. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2017/01/pdf/50.pdf>, 1,375 у.п.л.

15. Трунев А.П. Моделирование атмосферных вихревых течений на Юпитере и Сатурне / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №02(126). С. 697 – 721. – IDA [article ID]: 1261702050. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2017/02/pdf/50.pdf>, 1,562 у.п.л.
16. Terence Tao. Finite time blowup for an averaged three-dimensional Navier-Stokes equation// arXiv:1402.0290v3 [math.AP] 1 Apr 2015.
17. Ландау Л. Д, Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика – 3 изд. – М.: Наука. – 1986; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics. - Pergamon, Oxford, UK, first edition, 1959.
18. Teman R. Some developments on Navier-Stokes equations in the second half of the 20th century/ Development of Mathematics 1950-2000, Birkhauser, Basel, 2000, 1049-1106.
19. Liverpool T. B., Edwards S. F. Dynamics of a meandering river// Phys. Rev. Lett. 75, 3016–3019, 1995.
20. Ercan Erturk. Discussions On Driven Cavity Flow//Int. J. Numer. Meth. Fluids, Vol 60, pp 275-294, 2009.
21. Liberzon, Yu. Feldman and A. Yu. Gelfgat. Experimental observation of the steady – oscillatory transition in a cubic lid-driven cavity// arXiv:1107.0449v1, 3 Jul 2011.

References

1. Bjer K. Pochemu u nashih rek, tekushhiv na sever ili na jug, pravij bereg vysok, a levij nizmen? // Morskoj sbornik. SPb., 1857. T. 27. Otd. 3. S. 110—126.
2. Einstein A. Die ursache der meandebildung der flusslaufe und des sogenannten baerschen gesetzes. Die Naturwissenschaften, 2 223, 1926; Jejnshtejn A. Prichiny obrazovanija izvilin v ruslah rek i t. n. zakon Bjera//UFN, 59, 185, 1956.
3. Nicholas A. P., Sambrook Smith G. H. Numerical simulation of three-dimensional flow hydraulics in a braided channel// Hydrol. Process. 13, 913-929,1999.
4. Coulthard T. J., Van De Wiel M. J. Modelling river history and evolution// Phil. Trans. R. Soc. A (2012) 370, 2123–2142.
5. Trunev A. P. Diffuse processed in turbulent boundary layer over rough surface/ Air Pollution III, Vol.1. Theory and Simulation, eds. H. Power, N. Moussiopoulos & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Publ., Southampton, pp. 69-76, 1995.
6. Trunev A. P., Similarity theory and model of diffusion in turbulent atmosphere at large scales, Air Pollution V. Modelling, Monitoring and Management, eds. H. Power, T. Tirabassi & C.A. Brebbia, CMP, Southampton-Boston, pp. 109-118, 1997.
7. Trunev A. P. Theory of Turbulence and Model of Turbulent Transport in the Atmospheric Surface Layer. - Russian Academy of Sciences, Sochi, 160 p., 1999 (in Russian).
8. Trunev A.P. Teorija turbulentnosti i modelirovanie turbulentnogo perenosa v atmosfere. // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №05(059). S. 179 – 243; №06(060). S. 412 – 491.
9. Trunev A.P. Teorija turbulentnosti i model' vlijanija plotnosti sherohovatosti // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №04(058). S. 348 – 382.

10. Trunев A.P. Teorija i konstanty pristennoj turbulentsnosti // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №04(058). S. 383 – 394.

11. Trunев A.P. Fizicheskie mehanizmy turbulentnoj vjazkosti i modelirovanie turbulentsnosti na osnove uravnenij Nav'e-Stoksa // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №04(118). S. 1469 – 1487. – IDA [article ID]: 1181604096. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/96.pdf>

12. Trunев A.P. Modelirovanie turbulentnogo techenija v polosti na osnove uravnenij Nav'e-Stoksa / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №05(119). S. 1111 – 1133. – IDA [article ID]: 1191605079. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/05/pdf/79.pdf>

13. Trunев A.P. Modelirovanie turbulentnogo MGD techenija v prjamougol'noj polosti vo vrashhajushhemsja magnitnom pole / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №10(124). S. 1244 – 1269. – IDA [article ID]: 1241610079. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/10/pdf/79.pdf>, 1,625 u.p.l.

14. Trunев A.P. Modelirovanie geksonal'nogo turbulentnogo techenija v severnoj poljarnoj oblasti Saturna / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2017. – №01(125). S. 738 – 759. – IDA [article ID]: 1251701050. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2017/01/pdf/50.pdf>, 1,375 u.p.l.

15. Trunев A.P. Modelirovanie atmosferyh vihrevyh techenij na Jupitere i Saturne / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2017. – №02(126). S. 697 – 721. – IDA [article ID]: 1261702050. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2017/02/pdf/50.pdf>, 1,562 u.p.l.

16. Terence Tao. Finite time blowup for an averaged three-dimensional Navier-Stokes equation// arXiv:1402.0290v3 [math.AP] 1 Apr 2015.

17. Landau L. D, Lifshic E. M. Teoreticheskaja fizika. T.6. Gidrodinamika – 3 izd. – M.: Nauka. – 1986; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics. - Pergamon, Oxford, UK, first edition, 1959.

18. Teman R. Some developments on Navier-Stokes equations in the second half of the 20th century/ Development of Mathematics 1950-2000, Birkhauser, Basel, 2000, 1049-1106.

19. Liverpool T. B., Edwards S. F. Dynamics of a meandering river// Phys. Rev. Lett. 75, 3016–3019, 1995.

20. Ercan Erturk. Discussions On Driven Cavity Flow//Int. J. Numer. Meth. Fluids, Vol 60, pp 275-294, 2009.

21. Liberzon, Yu. Feldman and A. Yu. Gelfgat. Experimental observation of the steady – oscillatory transition in a cubic lid-driven cavity// arXiv:1107.0449v1, 3 Jul 2011.