УДК 519.612 (075)

01.00.00 Физико-математические науки

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ

Хлонь Иван Дмитриевич
Студент

Сергеев Александр Эдуардович
к. ф.-м. н., доцент

Рождественская Евгения Васильевна
Преподаватель
Кубанский государственный аграрный университет, Краснодар, Россия

Обратная матрица для квадратичной матрицы A порядка n с коэффициентами из некоторого поля существует, как известно, тогда и только тогда, когда ее определитель не равен нулю. Если матрица A имеет определенный вид (определенную структуру), то обратная матрица A^{-1} совсем не обязана иметь ту же структуру. Поэтому представляет интерес описание таких квадратичных матриц A, у которых при определенных условиях существует обратная матрица A^{-1}, имеющая аналогичную структуру, что и матрица A. Например, нижняя треугольная матрица с ненулевыми элементами на главной диагонали имеет обратную матрицу над полем характеристики 0, имеющую также вид нижней треугольной матрицы. Аналогично, обратная матрица к симметрической или кососимметрической матрице также является соответственно симметрической или кососимметрической. Также матрица обратная к невырожденному циркуленту сама будет циркулянтом и наконец матрица обратная к невырожденной квазидиагональной матрице D сама будет квазидиагональной, причем имеет тоже клеточное строение, что и D. Таким образом, имеется проблема определения таких типов невырожденных матриц, которые имеют обратную матрицу того же типа, что и данная. В русле этой проблемы в данной работе определяется такой тип матриц, для которого обратная матрица тот же тип, при этом определяются условия в явном виде, обеспечивающие невырожденность матрицы. Подробно рассмотрены матрицы третьего порядков. Эти результаты позволяют определить характеристику полей, над которыми существуют обратные матрицы рассматриваемых типов

Ключевые слова: ОБРАТНАЯ МАТРИЦА, ПОРЯДОК МАТРИЦЫ, СИММЕТРИЧЕСКАЯ МАТРИЦА

UDC 519.612 (075)

Physical-Mathematical science

SPECIAL CASES OF INVERSE MATRICES

Khlon Ivan Dmitrievich
Student

Sergeev Alexandr Eduardovich
Cand. Phys.-Math. Sci. Associate Professor

Rozhdestvenskaya Evgeniya Vasilevna
Lecturer
Kuban state agrarian university, Krasnodar, Russia

The inverse matrix for the square matrix A of order n with coefficients of some field exists, as it is known then and only then, when its determinant is not equal to zero. If the matrix A has a certain type (certain structure), then an inverse matrix A^{-1} should not have exactly the same structure. Therefore, it is interesting to describe such square matrices A, which have an inverse matrix A^{-1}, having the same structure as the matrix A, under certain conditions. For example, a subdiagonal matrix with nonzero elements on the main diagonal has an inverse matrix over a field of characteristic zero, having also the form of subdiagonal matrix. Similarly, an inverse matrix towards symmetrical or skew-symmetric matrix is also symmetric or skew-symmetric accordingly. Also, the matrix inverse to non-degenerate (nonsingular) circulant will be a circulant itself, and finally, the matrix inverse to nonsingular quasdiagonal matrix D will be quasdiagonal itself, and will have the same partitioned structure as D. Thus, there is a problem of determining these types of nonsingular matrices that have an inverse matrix of the same type as a given matrix. In line with this problem in the present study it is determined such type of matrices for which an inverse matrix has the same type, at that the conditions are identified in explicit form, ensuring the nonsingularity of the matrix. The matrices of three orders are shown in detail. These results allow determining the characteristics of fields over which there are inverse matrices of the considered types

Keywords: INVERSE MATRIX, MATRIX ORDER, SYMMETRICAL MATRIX

Doi: 10.21515/1990-4665-130-071

Если взять матрицу размером $3*3$ и вида A= $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & b & a \\ b & a & b \end{pmatrix}$, при этом $a > b$ и находить ее обратную матрицу A^{-1}= $\begin{pmatrix} c & d & d \\ d & d & c \\ d & c & d \end{pmatrix}$, то элементы *c* и *d* можно найти следующим образом: обозначим $c = \frac{x}{y}$, $d = \frac{z}{y}$. При этом, $x = a + b$, $z = -b$, $y = a^2 - b^2 + k$, где $k = (a - b) * b$.

<u>Проверим.</u> Возьмем матрицу A_1= $\begin{pmatrix} 17 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 17 \\ 4 & 17 & 4 \end{pmatrix}$, где $b = 17$, $a = 4$. Подставим в формулы и посчитаем: $x = 4 + 17 = 21$, $z = -4$, $y = 289 - 16 + (17 - 4) * 4 = 325$, $c = \frac{21}{325}$, $d = -\frac{4}{325}$.

Получаем матрицу A_1^{-1}= $\begin{pmatrix} \frac{21}{325} & -\frac{4}{325} & -\frac{4}{325} \\ -\frac{4}{325} & -\frac{4}{325} & \frac{21}{325} \\ -\frac{4}{325} & \frac{21}{325} & -\frac{4}{325} \end{pmatrix}$. Но существует ряд исключений.

Гипотеза: ***если увеличивать b на 1 и при этом $a > b$, то чем больше b, тем больше исключений из правил***.

<u>Пример</u>, возьмем $b = 1$, $a > b \Rightarrow a = 2$. Начнем постепенно увеличивать *a* на 1 и находить обратные матрицы.

1) A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ → A^{-1} = $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

2) B = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ → B^{-1} = $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$

3) $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & -\frac{1}{18} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} & -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} \\ -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} & -\frac{1}{18} \end{pmatrix}$

4) $D = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \to D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} & -\frac{1}{28} & -\frac{1}{28} \\ -\frac{1}{28} & -\frac{1}{28} & \frac{3}{14} \\ -\frac{1}{28} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{28} \end{pmatrix}$

5) $E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \to E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{40} & -\frac{1}{40} & -\frac{1}{40} \\ -\frac{1}{40} & -\frac{1}{40} & \frac{7}{40} \\ -\frac{1}{40} & \frac{7}{40} & -\frac{1}{40} \end{pmatrix}$

6) $F = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix} \to F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{27} & -\frac{1}{54} & -\frac{1}{54} \\ -\frac{1}{54} & -\frac{1}{54} & \frac{4}{27} \\ -\frac{1}{54} & \frac{4}{27} & -\frac{1}{54} \end{pmatrix}$

7) $G = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix} \to G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{70} & -\frac{1}{70} & -\frac{1}{70} \\ -\frac{1}{70} & -\frac{1}{70} & \frac{9}{70} \\ -\frac{1}{70} & \frac{9}{70} & -\frac{1}{70} \end{pmatrix}$

8) $H = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 9 & 1 \end{pmatrix} \to H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{44} & -\frac{1}{88} & -\frac{1}{88} \\ -\frac{1}{88} & -\frac{1}{88} & \frac{5}{44} \\ -\frac{1}{88} & \frac{5}{44} & -\frac{1}{88} \end{pmatrix}$

Можно заметить, что, если в исходной матрице а-нечетное число, то в обратной матрице *c* будет рассчитываться, как $\frac{c}{2}$.

Возьмем матрицу, в которой $b = 2$, $a > b$. Проделаем такие же операции, как и с предыдущими матрицами.

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$

2) $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$

3) $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{27} & -\frac{2}{27} & -\frac{2}{27} \\ -\frac{2}{27} & -\frac{2}{27} & \frac{7}{27} \\ -\frac{2}{27} & \frac{7}{27} & -\frac{2}{27} \end{pmatrix}$

4) $D = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{20} \\ -\frac{1}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{20} \end{pmatrix}$

5) $E = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{55} & -\frac{2}{55} & -\frac{2}{55} \\ -\frac{2}{55} & -\frac{2}{55} & \frac{9}{55} \\ -\frac{2}{55} & \frac{9}{55} & -\frac{2}{55} \end{pmatrix}$

6) $F = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{36} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{36} \\ -\frac{1}{36} & -\frac{1}{36} & \frac{5}{36} \\ -\frac{1}{36} & \frac{5}{36} & -\frac{1}{36} \end{pmatrix}$

7) $G = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{91} & -\frac{2}{91} & -\frac{2}{91} \\ -\frac{2}{91} & -\frac{2}{91} & \frac{11}{91} \\ -\frac{2}{91} & \frac{11}{91} & -\frac{2}{91} \end{pmatrix}$

8) $H = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \\ 2 & 10 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{28} & -\frac{1}{56} & -\frac{1}{56} \\ -\frac{1}{56} & -\frac{1}{56} & \frac{3}{28} \\ -\frac{1}{56} & \frac{3}{28} & -\frac{1}{56} \end{pmatrix}$

Можно заметить две закономерности:

1) Начиная с матрицы номер 4 (где $a = 6$, $b = 2$) и повторяясь через каждые 4 матриц (или через каждые 2 четные матрицы), элемент *c* вычисляется как $\frac{c}{4}$, а элемент *d*, как $\frac{d}{2}$.

2) Начиная с матрицы номер 2 ($a = 4, b = 2$) и повторяясь через каждые 4 матриц (или через каждые 2 четные матрицы), элементы *c* и *d* вычисляются как $\frac{c}{2}, \frac{d}{2}$.

Возьмем матрицу, в которой $b = 3, a > b$. Аналогично проделаем те же самые действия. На этот раз можно будет заметить уже 3 закономерности:

1) Начиная с матрицы номер 3 ($a = 6, b = 3$) и повторяясь через каждые 18 матриц, элемент *c* вычисляется как $\frac{c}{9}$, а элемент *d*, как $\frac{d}{3}$.

2) Начиная с матрицы номер 6 ($a = 9, b = 3$) и повторяясь через каждые 12, а потом через каждые 6 и опять через 12 матриц, элемент *c* вычисляется как $\frac{c}{6}$, а элемент *d*, как $\frac{d}{3}$.

3) Начиная с матрицы номер 12 ($a = 15, b = 3$) и повторяясь через каждые 18 матриц, элемент *c* вычисляется как $\frac{c}{18}$, а элемент *d*, как $\frac{d}{3}$.

Во всех нечетных матрицах (кроме тех, что попадают под исключения 1-3) элемент с вычисляется, как $\frac{c}{2}$.

Возьмем матрицу, в которой $b = 4, a > b$. Аналогично проделаем те же самые операции. На этот раз можно будет заметить уже 4 закономерности:

1) Начиная с матрицы номер 4 ($a = 8, b = 4$) и повторяясь через каждые 8 матриц, элемент *c* вычисляется как $\frac{c}{4}$, а элемент *d*, как $\frac{d}{4}$.

2) Начиная с матрицы номер 8 ($a = 12, b = 4$) и повторяясь через каждые 32 матрицы, элемент c вычисляется как $\frac{c}{16}$, а элемент d, как $\frac{d}{4}$.

3) Начиная с матрицы номер 16 ($a = 20, b = 4$) и повторяясь через каждые 16 матриц, элемент c вычисляется как $\frac{c}{8}$, а элемент d, как $\frac{d}{4}$.

4) Начиная с матрицы номер 24 ($a = 28, b = 4$) и повторяясь через каждые 32 матрицы, элемент c вычисляется как $\frac{c}{32}$, а элемент d, как $\frac{d}{4}$.

Во всех нечетных матрицах элемент c вычисляется, как $\frac{c}{2}$, элемент d, как $\frac{d}{4}$.

Все элементы исключений можно вычислить по формуле арифметической прогрессии.

Также можно заметить, что в исключениях разность элементов (обозначается буквой d в формуле арифметической прогрессии) кратна числу b в исходной матрице. А также число, которому кратен элемента c в исключениях, кратно элементу b в исходной матрице.

Дальнейшие выводы требуют дополнительных вычислений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М: Наука, 1980.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М: Наука, 1988.
3. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М: Наука, 1984.
4. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М: Наука, 1970.
5. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М: Добросовет, 1988.
6. Стринг Г. Линейная алгебра и ее применение. М: Мир, 1980.
7. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М: Мир, 1989.
8. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричным неравенствам. М: Наука, 1972.
9. Белеман Р. Введение в теорию матриц. М: Наука, 1976.
10. Ланкастер П. Теория матриц. М: Наука, 1978.

References

1. Voevodin V.V. Linejnaja algebra. M: Nauka, 1980.

2. Gantmaher F.R. Teorija matric. M: Nauka, 1988.
3. Voevodin V.V., Kuznecov Ju.A. Matricy i vychislenija. M: Nauka, 1984.
4. Mal'cev A.I. Osnovy linejnoj algebry. M: Nauka, 1970.
5. Gel'fand I.M. Lekcii po linejnoj algebre. M: Dobrosovet, 1988.
6. String G. Linejnaja algebra i ee primenenie. M: Mir, 1980.
7. Horn R., Dzhonson Ch. Matrichnyj analiz. M: Mir, 1989.
8. Markus M., Mink H. Obzor po teorii matric i matrichnym neravenstvam. M: Nauka, 1972.
9. Beleman R. Vvedenie v teoriju matric. M: Nauka, 1976.
10. Lankaster P. Teorija matric. M: Nauka, 1978.