УДК 004.942

UDC 004.942

05.00.00 Технические науки

Technical sciences

ВОССТАНОВЛЕНИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПО ПОРОЖДАЕМОМУ ЕЙ ВРЕМЕННОМУ РЯДУ

RESTORATION OF A MODEL OF A DYNAMIC NONLINEAR SYSTEM FROM THE TIME SERIES GENERATED BY IT

Власенко Александра Владимировна
к.т.н., доцент кафедры компьютерных технологий и информационной безопасности
alex_vlasenko@list.ru

Жданов Андрей Андреевич
аспирант кафедры компьютерных технологий и информационной безопасности
zhdanovandrey234@mail.ru
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», 350002, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская 2

Vlasenko Aleksandra Vladimirovna
Cand.Tech.Sci., associate professor of the Department of computer technologies and information security
e-mail: alex_vlasenko@list.ru

Zhdanov Andrey Andreevich
postgraduate student of the Department of computer technologies and information security
zhdanovandrey234@mail.ru
Kuban state technological university, Krasnodar, Russia

Главной задачей при анализе временных рядов является реконструкция породившей этот ряд динамической системы. Для наглядного представления характера поведения динамической системы, описываемой нестационарным временным рядом, предложен метод «фазового портрета». Приемлемое описание фазового пространства динамической системы можно получить, если взять вместо реальных переменных системы векторы задержек, составленные из значений ряда в последовательные моменты времени. Восстановление в заданном классе системы дифференциальных или разностных уравнений осуществляется на базе скалярного временного ряда наблюдаемого процесса. С целью устранения погрешности измерения и представления с хорошей точностью положения объекта в текущий, будущий или какой-либо из прошедших моментов предложено применения фильтра Калмана, использующего известную математическую модель динамики объекта

The main task in the analysis of time series is the reconstruction of the dynamical system that generated this series. To illustrate the nature of the behavior of a dynamic system described by a nonstationary time series, a «phase portrait» method is proposed. An acceptable description of the phase space of a dynamical system can be obtained if we take instead of real variables of the system delay vectors composed of the values of the series at consecutive moments of time. Restoration in a given class of a system of differential or difference equations is performed based on the scalar time series of the observed process. In order to eliminate the measurement error and accurately represent the position of the object in the current, future, or any of the past moments, it is proposed to apply the Kalman filter using the known mathematical model of object dynamics

Ключевые слова: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА, ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО, АТТРАКТОР, ФИЛЬТР КАЛМАНА

Keywords: MATHEMATICAL MODEL, DYNAMIC NONLINEAR SYSTEM, PHASE SPACE, ATTRACTOR, KALMAN FILTER

Doi: 10.21515/1990-4665-129-007

Введение

Оправдываемость прогноза поведения системы в будущем во многом зависит от способности модели выявить такие факторы, которые носят антисистемный, деструктивный характер в перспективе, даже если локально они системны. Таким образом, в процессе моделирования динамических систем нас интересуют так называемые «параметры порядка» – те параметры (факторы), которые на анализируемом этапе определяют характер поведения системы или процесса. Даже малые изменения параметров порядка могут приводить к глобальным изменениям процесса [1].

Математическая модель динамической системы считается заданной, если введены параметры системы, определяющие однозначно ее состояние, и указан закон эволюции [2].

Для наглядного представления характера поведения динамической системы, описываемой нестационарным временным рядом, воспользуемся качественным методом «фазового портрета».

Фазовый портрет – это траектория движения системы в фазовом пространстве. Фазовое пространство образовано всеми параметрами, необходимыми для описания системы. Точка фазового портрета определяется значениями параметров в конкретный момент времени и представляет собой «изображение» элемента временного ряда [1].

То множество значений параметров, которые будут у системы в установившемся режиме, называются аттракторами, установившийся режим как бы «притягивает» систему. Под аттракторами следует понимать те реальные структуры в открытых нелинейных средах, на которые выходят процессы эволюции в этих средах в результате затухания в них переходных процессов» [3].

Вне зависимости от типа детерминированной диссипативной системы, существует только четыре типа аттракторов: «точечный аттрактор», «циклический (периодический) аттрактор», «квазипериодический аттрактор», «странный аттрактор». Тип аттрактора определяет наши возможности в прогнозировании [1].

Первые три из перечисленных типов аттракторов являются детерминированными. Зная положение системы, в какой-то момент времени установившегося режима, мы всегда можем предсказать с любой точностью положение системы для любого момента времени [1].

Процессы в странных аттракторах оказываются неустойчивыми и не позволяют прогнозировать на достаточно большое время. Начав движение при очень малом расхождении параметров, процессы очень быстро удаляются друг от друга [1].

Все фазовое пространство нелинейной динамической системы оказывается поделенным между бассейнами притяжения аттракторов. Под воздействием внешних возмущений становится возможен переход из бассейна притяжения одного аттрактора в бассейн другого аттрактора. В ходе такого перехода может поменяться структура динамической системы и характер ее движения, если произошел переход к аттрактору другого типа [1].

Моделирование динамики нелинейных систем

При анализе временных рядов главной задачей является реконструкция породившей этот ряд динамической системы. В соответствии с теорией Такенса–Мане приемлемое описание фазового пространства динамической системы можно получить, если взять вместо реальных переменных системы (которые могут быть неизвестны вообще) k–мерные векторы задержек, составленные из значений ряда в последовательные моменты времени. При выполнении условия [4]:

$$k \geq 2d_e + 1, \tag{1}$$

где d_e – размерность вложения, возможно реконструировать фазовое пространство системы. При условии стационарности временного ряда на базе этой реконструкции строится прогноз его дальнейшей динамики.

Пусть $X_0(t)$ – временная последовательность экспериментально измеренных величин. Рассмотрим фазовое пространство, образованное переменными $\{X_k(t)\}$, где $k=1, \ldots, n-1$. Некоторое мгновенное состояние системы в этом пространстве соответствует точке, а последовательность таких состояний, проходимая системой во времени, определяет некоторую кривую – фазовую траекторию. Если динамика системы сводится к системе детерминистических уравнений, то с течением времени в системе устанавливается какой-то постоянный режим. Это находит свое отражение в сходимости семейств фазовых траекторий к некоторому подмножеству фазового пространства – аттрактору или особой точке [5].

Первый шаг состоит в определении подходящего набора переменных, образующих фазовое пространство. Для этого удобно развернуть исходную временную последовательность $X_0(t)$ в ряд наборов с последовательно возрастающими сдвигами, определенными как величины, кратные некоторой фиксированной задержке $ф$ ($ф=mДt$, где m – целое и $Дt$ – интервал между последовательными выборками). Кроме того, выбирая из набора экспериментальных данных N эквидистантных точек, мы приходим к следующему набору дискретных переменных [5]:

$$\begin{aligned} &X_0: X_0(t_1), \ldots, X_0(t_N), \\ &X_1: X_0(t_1+\tau), \ldots, X_0(t_N+\tau) \\ &\vdots \\ &X_{n-1}: X_0(t_1+(n-1)\tau), \ldots, X_0(t_N+(n-1)\tau) \end{aligned} \qquad (2)$$

При должном выборе τ можно ожидать, что эти переменные будут линейно независимыми, что и требуется для определения фазового пространства. И все эти переменные можно получить из единственной временной последовательности, относящейся к $X_0(t)$, определенной экспериментально [6].

Таким образом, имеющейся в нашем распоряжении информации достаточно для того, чтобы выйти за рамки исходной временной последовательности и развернуть динамику системы в многомерном фазовом пространстве.

Введем следующее векторное обозначение [6]: пусть X_i обозначает точку фазового пространства с координатами $\{X_0(t_i),\ldots,X_0(t_i+(n\text{-}1)ф)\}$. Так устанавливается начало отсчета X_i для всех имеющихся данных, и можно вычислить расстояние от этой точки до остающихся $N\text{-}1$ точек: $|X_i\text{-}X_j|$.

Это позволяет сосчитать число точек в фазовом пространстве, отстоящих от X_i на расстояние, не превышающее некоторую заданную величину r.

Повторяя этот процесс для всех значений i, можно вычислить следующую величину [6]:

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} \theta\left(r - \left|X_i - X_j\right|\right), \qquad (3)$$

где u – функция Хевисайда: $u(x)=0$, при $x<0$ и $u(x)=1$, при $x>0$ [7].

Отклонение $C(r)$ от нуля служит мерой влияния точки X_i на положение других точек. Поэтому функцию $C(r)$ можно рассматривать как интегральную корреляционная функция аттрактора.

Зафиксируем некоторое малое e и воспользуемся им в качестве своеобразного метра для зондирования структуры аттрактора. Если последний представляет собой линию, то, очевидно, число пробных точек, расстояние которых до заданной точки не превышает r, должно быть пропорционально r/e. Если же аттрактор представляет собой поверхность, то число таких точек должно быть пропорционально $(r/e)^2$.

В более общем случае, если аттрактор представляет собой d-мерное многообразие, то число точек должно быть пропорционально $(r/e)^d$.

Поэтому можно ожидать, что при сравнительно малых r функция $C(r)$ должна изменяться как степенная.

Иными словами, размерность аттрактора d дается наклоном зависимости $\ln C(r)$ от $\ln r$ в определенном диапазоне r [6]:

$$\ln C(r) = d \ln r. \quad (4)$$

В работах Грибкова Д. предложен метод нахождения первых производных динамического процесса на основе ортогонализирующей процедуры перехода к базису собственных векторов ковариационной матрицы. Показана возможность применения этого метода к решению задачи построения дифференциальных уравнений динамической системы с хаосом по наблюдаемому временному ряду одной ее переменной.

Решение обратной задачи нелинейной динамики, т.е. восстановление в заданном классе системы дифференциальных или разностных уравнений по скалярному временному ряду наблюдаемого процесса, можно разделить на три основных этапа:

1) построение базиса независимых переменных, временная эволюция которых удовлетворяла бы некоторой системе дифференциальных уравнений;

2) построение общей модели исследуемой системы в выбранном классе дифференциальных уравнений и при заданном типе нелинейности;

3) редукция и уточнение модельных уравнений на основе требования глобальной устойчивости исследуемой системы.

В работах по восстановлению уравнений динамики излагается метод построения базиса производных динамического процесса, которые в качестве независимых переменных используются при восстановлении динамической системы по одномерному временному ряду.

Обозначим наблюдаемый процесс, генерируемый некоторой динамической системой, через $x(t)$. Определим вектор состояния n-мерной динамической системы, задавая отсчёты наблюдаемого процесса через достаточно малый интервал времени *ф*: $\vec{X}\left(x, x_{\tau}, \ldots, x_{(N-1)\tau}\right) \in R^N$, где $x=x(t)$, $x_{jф}=x(j+tф)$, $j=1,\ldots,N-1$, где $N(N>n)$ – размерность Евклидова пространства вложения.

В общем случае переменные $x_{jф} \in H$, $(j=1,\ldots,N-1)$ не являются ортогональными в смысле [6]:

$$\int_{-T}^{T} x_{i\tau} x_{j\tau} \neq 0, \tag{5}$$

где H – вещественное Гильбертово пространство, $i \neq j, T \gg \tau$.

Утверждение 1. Произвольная система собственных векторов $S_i = (\mu_{i1}, \ldots, \mu_{iN}), (i = 1, \ldots, n)$ ковариационной матрицы $\widehat{N}$ наблюдаемого процесса $x(t)$ порождает линейное преобразование координат $\widehat{P}: R^N \to R^n$:

$$\tilde{x}_i = (\vec{X}, \vec{S_i}), \tag{6}$$

в результате которого новые переменные $\tilde{x}_i \in H$ являются ортогональными в H для любого $i \neq j$ [6]:

$$\int_{-T}^{T} \tilde{x}_i \tilde{x}_j dt = 0, \tag{7}$$

Используя полученный результат, выясним структуру новых переменных $\tilde{x}_i$. Рассмотрим для наглядности случай трехмерной динамической системы (n=3). Для простоты выберем размерность N пространства вложения, равную трем.

Вектор состояния динамической системы, заданный в момент времени *t*, и каждый из собственных векторов ковариационной матрицы $\hat{C}$ записываются в виде: $\vec{X}(x, x_\tau, x_{2\tau}), \vec{S_i}(\mu_{i1}, \mu_{i2}, \mu_{i3})$ соответственно.

Учитывая условие ортогональности (7) и то, что при $T \to \infty$: $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_0 = const$ имеем [6]:

$$\int_{-T}^{T} \tilde{x}_i \tilde{x}_j dt = \sigma_0 \sum \mu_{ik}\mu_{jk} + (\mu_{i1}\mu_{j2} + \mu_{i2}\mu_{j1})J_1 + (\mu_{i1}\mu_{j3} + \mu_{i3}\mu_{j1})J_2 + \\ +(\mu_{i2}\mu_{j3} + \mu_{i3}\mu_{j2})J_3 = 0, \tag{8}$$

где $J_1 = \int_{-T}^{T} x x_\tau dt$, $J_2 = \int_{-T}^{T} x x_{2\tau} dt, J_3 = \int_{-T}^{T} x_\tau x_{2\tau} dt.$

Первое слагаемое в выражении (8) равно нулю в силу ортогональности любых двух собственных векторов. Заметим, что $J_1 = J_3$ при $T \to \infty$. Учитывая это, перепишем (8) в следующем виде [6]:

$$(\mu_{i1}\mu_{j2} + \mu_{i2}\mu_{j1} + \mu_{i2}\mu_{j3} + \mu_{i3}\mu_{j2})J_1 + (\mu_{i1}\mu_{j3} + \mu_{i3}\mu_{j1})J_2 = 0. \tag{9}$$

Используя уравнение (9), условия ортогональности и нормировки собственных векторов, получим систему линейных уравнений вида [6]:

$$\begin{cases} \mu_{i1}\mu_{j2} + \mu_{i2}\mu_{j1} + \mu_{i2}\mu_{j3} + \mu_{i3}\mu_{j2} = 0 \\ \mu_{i1}\mu_{j3} + \mu_{i3}\mu_{j1} = 0 \\ \mu_{i1}\mu_{j1} + \mu_{i2}\mu_{j2} + \mu_{i3}\mu_{j3} = 0 \\ \mu_{i1}^2 + \mu_{i2}^2 + \mu_{i3}^2 = 1 \\ \mu_{j1}^2 + \mu_{j2}^2 + \mu_{j3}^2 = 1 \end{cases} \tag{10}$$

Новые переменные $\tilde{x}_i = (\vec{X}, \vec{S_i})$ запишутся в виде [6]:

$$\widetilde{x_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}|x(t) + x(t+\tau) + x(t+2\tau)|;$$
$$\widetilde{x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}|x(t+2\tau) - x(t)|; \quad (11)$$
$$\widetilde{x_3} = \frac{1}{\sqrt{6}}|x(t) - 2x(t+\tau) + x(t+2\tau)|.$$

Условие ортогональности (7) выполняется для всех новых переменных (11). Из (11) следует также, что вторая и третья новые переменные пропорциональны с точностью до $\bar{o}(\tau^2)$ первой и второй производной от x по времени соответственно.

Для переменных $\tilde{x}$, с точностью до $\bar{o}(\tau^{N-1})$ в выявлении скрытых переменных в обратной задаче нелинейной динамики получено [6]:

$$\widetilde{x_1} = c_1 x;\ \widetilde{x_2} = c_2\frac{dx}{dt};\ \widetilde{x_3} = c_3\frac{d^2x}{dt^2}, \quad (12)$$

где c_k – константы.

Так, в частности, для N=5 точность аппроксимации производных возрастает до $\bar{o}(\tau^4)$.

Утверждение 2. Соотношение (10) позволяет построить по одномерному временному ряду модель динамической системы, где задача сводится к поиску минимума функционала вида [6]:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N_0}\left\{\frac{dz_i}{dt} - F(x_i, y_i, z_i, \vec{a}\right\}^2, \quad (13)$$

где N_0 – число точек исследуемого временного ряда.

Задача (13) решается методами усвоения данных: вариационным или с помощью Калмановской фильтрации.

Усвоение данных методом Калмановской фильтрации

Фильтр Калмана использует известную математическую модель динамики объекта, которая описывает, какие вообще изменения состояния объекта возможны, чтобы устранить погрешности измерения и представить с хорошей точностью положение объекта в данный момент (фильтрация), в будущие моменты (предсказание), или в какие-то из прошедших моментов (интерполяция или сглаживание). Теоретическим основам и истории развития фильтров Калмана посвящены работы [8-10].

Рассмотрим основные обозначения:

x_a – вектор переменных искомого анализа (размерности m);

x_b – вектор переменных первого приближения.

Первое приближение, как правило, является краткосрочным прогнозом, стартовавшим с предыдущего шага усвоения [11]:

$$x_j^b = M\left(x_{j-1}^a\right), \tag{14}$$

где M – оператор модели,

j – шаг усвоения.

И первое приближение, и наблюдения содержат априори неизвестную ошибку по отношению к истинному состоянию системы. Обозначим истинное состояние системы (размерности m) в точках модельной сетки x^t, тогда [11]:

$$x^b = x^t + \varepsilon_b, \tag{15}$$

$$y^o = H(x^t) + \varepsilon_r, \tag{16}$$

где y^0 – вектор наблюдений,

H – оператор наблюдений (проектирует из модельного пространства в пространство наблюдений),

ε_b – вектор ошибок первого приближения,

ε_r – вектор ошибок наблюдений.

Вектор анализа x^a также содержит некоторую ошибку [11]:

$$x^a = x^t + \varepsilon_a. \tag{17}$$

Задача усвоения данных состоит в том, чтобы найти анализ, минимизирующий ошибку ε_a.

Будем полагать, что ошибки модели, первого приближения и наблюдений независимы [12]. Кроме того, в исследованиях по усвоению данных обычно считается, что [11]:

1) ошибки наблюдений и первого приближения гауссовы (имеют гауссово распределение);

2) средние ошибки наблюдений и первого приближения равны нулю:

$$< \varepsilon_b >= 0, < \varepsilon_r >= 0.$$

Решением задачи является [11]:

$$x^a = x^b + K[y^0 + H(x^b)]. \tag{18}$$

При этом оптимальная весовая матрица K [10]:

$$K = P^b H^T (R + HP^b H^T)^{-1}. \tag{19}$$

Ансамбль полей первого приближения генерируется из ансамбля начальных условий, распределенных согласно результатам предыдущего анализа. На каждом шаге усвоения матрица ковариаций ошибок первого приближения аппроксимируется статистикой, полученной по ансамблю первых приближений.

Рассмотрим ансамбль первых приближений $x^b = \{x^{b1}, x^{b2}, \dots , x^{bk}\}$, где k – размерность ансамбля.

Вычислим среднее по ансамблю:

$$\overline{x^b} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x^{bi}. \qquad (20)$$

Матрица ковариаций ошибок первого приближения, рассчитанная по ансамблю, имеет вид:

$$P^b = (X^b)^T, \text{где } X^b = \left(x^{b1} - \overline{x^b}, x^{b2} - \overline{x^b}, \dots, x^{bk} - \overline{x^b}\right).$$

Матрица ковариаций ошибок анализа определяется выражением:

$$P^a = (I - KH)P^b = P^b - P^b H^T (R + HP^b H^T)^{-1} HP^b. \qquad (21)$$

Ансамбль наблюдений $\left\{y^{o(i)}, i = 1, 2, \dots, k\right\}$ представим в виде:

$$y^{o(i)} = y^o + \xi^{(i)}, \qquad (22)$$

где $\xi^{(i)}$ – псевдослучайный гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием и ковариациями, соответствующими матрице R.

Матрица весов K применяется к каждому участнику ансамбля первых приближений и каждому набору наблюдений. Тогда анализ получают следующим образом:

$$x^{a(i)} = x^{b(i)} + K\left(y^{o(i)} - Hx^{b(i)}\right). \quad (23)$$

При стремлении числа k членов ансамбля к бесконечности матрица ковариаций ошибок анализа представляется точно: $P^a = (I - KH)P^b$. Когда размер ансамбля невелик, возмущение наблюдений ухудшает точность анализа.

Мы видим возможность построения частных моделей динамических систем на основе дискретных отображений, которые будут описывать возможную неоднозначность поведения прогнозируемой величины в зависимости от параметров описываемого нелинейного динамического процесса. Для разработки на базе модели ансамблевого вероятностного прогноза может быть использована методика возмущения начальных (исходных) данных.

Список литературы

1. Полунин Ю.А., Тимофеев И.Н. Нелинейные политические процессы / Ю.А. Полунин, И.Н. Тимофеев. – М.: МГИМО-Университет, 2009 – 204 с.

2. Ефимов И.Н., Морозов Е.А., Селиванов К.М. Компьютерное моделирование динамических систем. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014. 134с.

3. Пригожин И. Философия нестабильности // Вопросы философии. – М., 1991. – № 6. – С. 46-52.

4. Лоскутов А.Ю. Анализ временных рядов: курс лекций. URL: http://chaos.phys.msu.ru/loskutov/PDF/Lectures_time_series_analysis.pdf (дата обращения 20.02.2017).

5. Сенкевич Ю. И. К вопросу о выборе методов обработки электрофизиологических сигналов // Врач и информационные технологии. 2007. №6. URL: http://cyberleninka.ru/article/n/k-voprosu-o-vybore-metodov-obrabotki-elektrofiziolo-gicheskih-signalov (дата обращения: 10.04.2017).

6. Иванов А.И. Математическое моделирование процессов самоорганизованного принятия решений в малых группах. URL: http://www.exponenta.ru/educat/referat/XXIkonkurs/1/work.rar (дата обращения 25.03.2017).

7. Бессонов А.А. Методы и средства идентификации динамических объектов / А.А. Бессонов, Ю.В. Загашвили, А.С. Маркелов. – Л.: Энергоатомиздат, 1989. – 328 с.

8. Cohn S. An introduction to estimation theory // Journal of the Meteorological Society of Japan. – 1997. – Vol. 75. – P. 257-288.

9. A local ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation / E. Ott, B. R. Hunt, I. Szunyogh et al. // Tellus. – 2004. – Vol. 56A. – P. 415-498.

10. Evensen G. Data assimilation. The ensemble Kalman filter. Berlin. Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. 279 p.

11. Красюк Т.В. Усвоение данных: конкуренция методов и проблема усвоения спутниковых наблюдений. URL: http://method.meteorf.ru/publ/tr/tr348/krasuk.pdf (дата обращения 01.03.2017).

12. Tsyrulnikov M.D. Stochastic modelling of model errors: a simulation study // Quart. J. R. Meteorol. Soc. – 2005. – Vol. 131, Issue 613 (October 2005. Part C). – P. 3345-3371.

References

1. Polunin YU.A., Timofeyev I.N. Nelineynyye politicheskiye protsessy / YU.A. Polunin, I.N. Timofeyev. – M.: MGIMO-Universitet, 2009 – 204 s.

2. Yefimov I.N., Morozov Ye.A., Selivanov K.M. Komp'yuternoye modelirovaniye dinamicheskikh sistem. – Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2014. 134s.

3. Prigojin I. Filosofiya nestabil’nosti // Voprosy filosofii. – M., 1991. – № 6. – S. 46-52.

4. Loskutov A.YU. Analiz vremennykh ryadov: kurs lektsiy. URL: http://chaos.phys.msu.ru/loskutov/PDF/Lectures_time_series_analysis.pdf (data obrashcheniya 20.02.2017).

5. Senkevich YU. I. K voprosu o vybore metodov obrabotki elektrofiziologicheskikh signalov // Vrach i informatsionnyye tekhnologii. 2007. №6. URL: http://cyberleninka.ru/article/n/k-voprosu-o-vybore-metodov-obrabotki-elektrofiziologiches-kih-signalov (data obrashcheniya 10.04.2017).

6. Ivanov A.I. Matematicheskoe modelirovanie protsessov samoorganizovannogo prinyatiya resheniy v malyh gruppah. URL: http://www.exponenta.ru/educat/referat/XXIkon kurs/1/work.rar (data obrashcheniya 25.03.2017).

7. Bessonov A.A. Metody i sredstva identifikatsii dinamicheskikh ob"yektov / A.A. Bessonov, YU.V. Zagashvili, A.S. Markelov. – L.: Energoatomizdat, 1989. – 328 s.

8. Cohn S. An introduction to estimation theory // Journal of the Meteorological Society of Japan. – 1997. – Vol. 75. – P. 257-288.

9. A local ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation / E. Ott, B. R. Hunt, I. Szunyogh et al. // Tellus. – 2004. – Vol. 56A. – P. 415-498.

10. Evensen G. Data assimilation. The ensemble Kalman filter. Berlin. Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. 279 p.

11. Krasyuk T.V. Usvoyeniye dannykh: konkurentsiya metodov i problema usvoyeniya. URL: http://method.meteorf.ru/publ/tr/tr348/krasuk.pdf (data obrashcheniya 01.03.2017).

12. Tsyrulnikov M.D. Stochastic modelling of model errors: a simulation study // Quart. J. R. Meteorol. Soc. – 2005. – Vol. 131, Issue 613 (October 2005. Part C). – P. 3345–3371.