УДК 519.115.1

01.00.00 Физико-математические науки

О ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА

Лихарева Юлия Андреевна
Магистрант
Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

Сергеев Александр Эдуардович
к. ф.-м. н., доцент
Кубанский государственный аграрный Университет, Краснодар, Россия

Сергеев Эдуард Александрович
к. ф.-м. н., доцент
Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

Функция Эйлера имеет выдающееся значение в теории чисел и в Математике, тем не менее, область её значений в натуральном ряде не списана. Наибольшее значение функция Эйлера принимает на простых числах, кроме того, она мультипликативная. Значение функции Эйлера тесно связано со значениями функции Мёбиуса и значениями функции суммы делителей данного натурального числа. С функцией Эйлера связаны системы шифрования с открытым ключом. Индивидуальные значения функции Эйлера ведут себя нерегулярно, что объясняется нерегулярностью распределения простых чисел в натуральном ряде. Этот тракт иллюстрируется в статье с помощью диаграммы, более предсказуемо ведёт себя сумматорная функция для функции Эйлера и её среднее значение. В работе доказана формула Мертинга и на её основе изучается точность аппроксимации среднего значения функции Эйлера соответствующим квадратичным полиномом. Приводится новая функция, связанная со средним значением функции Эйлера и вычисляются интервалы её значений. Вводится также понятие плотности значений функции Эйлера и вычисляется её величина на отрезке натурального ряда. Можно отметить, что из результатов поведения функции Эйлера следуют результаты поведения функции суммы делителей натуральных чисел и наоборот. Приведены также результаты Вальфиша А.З. и Салтыкова А.Н. по данной теме

Ключевые слова: ПРОСТЫЕ ЧИСЛА, РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, ФУНКЦИЯ ЭЙЛЕРА, СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ, АППРОКСИМАЦИЯ

Doi: 10.21515/1990-4665-127-004

UDC 519.115.1

Physical-Mathematical sciences

ABOUT EULER FUNCTION

Likhareva Yulia Andreevna
master student
Kuban State University, Krasnodar, Russia

Sergeev Alexandr Eduardovich
Cand. Phys.-Math. Sci., associate Professor
Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

Sergeev Eduard Alexandrovich
Cand. Phys.-Math. Sci., associate Professor
Kuban State University, Krasnodar, Russia

The Euler function is very important in number theory and in Mathematics, however, the range of its values in the natural numbers has not been written off. The greatest value of the Euler function reaches on Prime numbers, furthermore, it is multiplicative. The value of the Euler function is closely associated with the values of the Moebius function and the function values of the sum of the divisors of the given natural number. The Euler function is linked with systems of public key encryption. The individual values of the Euler function behave irregularly because of the irregular distribution of primes in the natural numbers. This tract is illustrated in the article with charts; summatory function for the Euler function and its average value are more predictable. We prove the formula of Martinga and, based on it, we study the approximation accuracy of the average value of the Euler function with corresponding quadratic polynomial. There is a new feature associated with the average value of the Euler function and calculate intervals of its values. We also introduce the concept of density values of the Euler function and calculate its value on the interval of the natural numbers. It can be noted that the results of the behavior of the Euler function are followed by the results in the behavior of functions of sums of divisors of natural numbers and vice versa. We have also given the results of A.Z.Valfish and A.N.Saltykov on this subject

Keywords: PRIME NUMBERS, DISTRIBUTION, EULER FUNCTION, APPROXIMATION

О функции Эйлера

Простые числа с давних времен играют основную роль в теории чисел. В частности установление закона распределения простых чисел в натуральном ряде – одна из основных задач аналитической теории чисел. Еще Евклид во 2-ом веке нашей эры сказал, что простых чисел бесконечно много.

Так называемая основная теорема арифметики утверждает, что каждое натуральное число n единственным образом (с точностью до порядка множителей) представляется в виде произведение конечного числа простых чисел, т.е. имеем равенство

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}, \qquad (1)$$

где $\alpha_i > 1,\ i = 1,2,3,\ldots,k$ и $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – различные простые числа.

Формула (1) дает возможность вычислять различные теоретико-числовые функции, например функцию Эйлера $\varphi(n)$ – число натуральных чисел меньших n и взаимно простых с n. Л. Эйлер доказал, что используя формулу (1) значения $\varphi(n)$ можно вычислять по формуле

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right). \qquad (2)$$

Из определения функции Эйлера имеем $\varphi(n) < n$ при $n < 1$. С другой стороны, при $n = p^m$, где p – простое число, получаем $p < \frac{1}{\varepsilon}$, где $0 < \varepsilon < 1$ и $m \geq 1$, тогда справедливы неравенства

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right) > n(1 - \varepsilon),$$

откуда получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{n} = 1.$$

В тоже время справедлива теорема.

Теорема 1. Для каждого $\delta > 0$ справедливо соотношение

$$\frac{\varphi(n)}{n^{1-\delta}} \to \infty, n \to \infty. \qquad (3)$$

Доказательство

Соотношение (3) справедливо, если $\delta > 1$. Пусть $\delta \leq 1$ и обозначим

$$f(n) = \frac{n^{1-\delta}}{\varphi(n)}.$$

Тогда f – мультипликативная функция, ввиду мультипликативности функции Эйлера $\varphi(n)$. Кроме того, так как для простого числа p

$$\frac{1}{f(p^m)} = \frac{\varphi(p^m)}{p^{m(1-\delta)}} = p^{m\delta}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \geq \frac{1}{2}p^{m\delta} \to \infty, \qquad p^m \to \infty.$$

Следовательно, учитывая формулу (1) и предыдущие соотношения, получаем соотношение (3), в виду мультипликативности $f(n)$. ■

Значение функции Эйлера $\varphi(n)$ при $n \to \infty$ очень нерегулярны, что, например, показывает график 1.

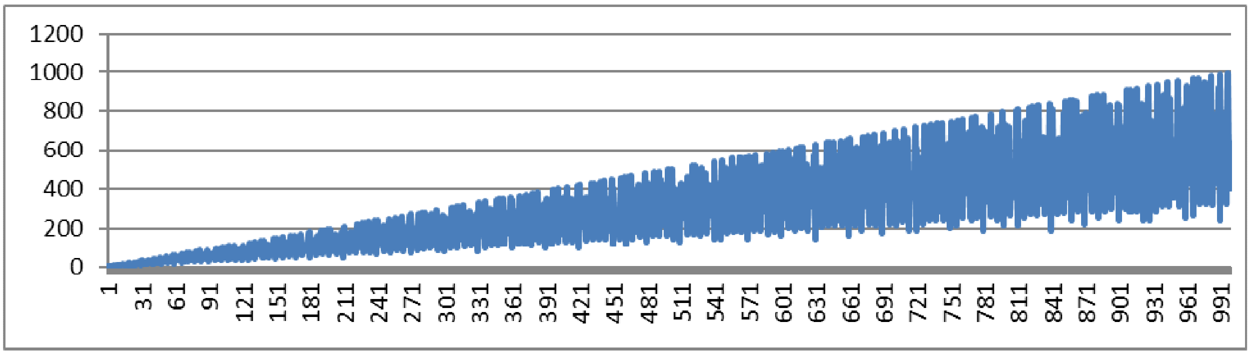


График 1 – распределение функции Эйлера на отрезке [1,1000]

Заметим, что функция Эйлера принимает только четные значения, кроме $\varphi(1), \varphi(2)$. Причем не все четные числа могут быть значениями функции Эйлера, как например, число 14. Представляет некоторый интерес узнать плотность распределения значения функции Эйлера на определенных отрезках. Для этого была создана программа на языке C# для вычисления функции Эйлера, а так же для вычисления плотности. Ниже приведен вид программы (рисунок 1).

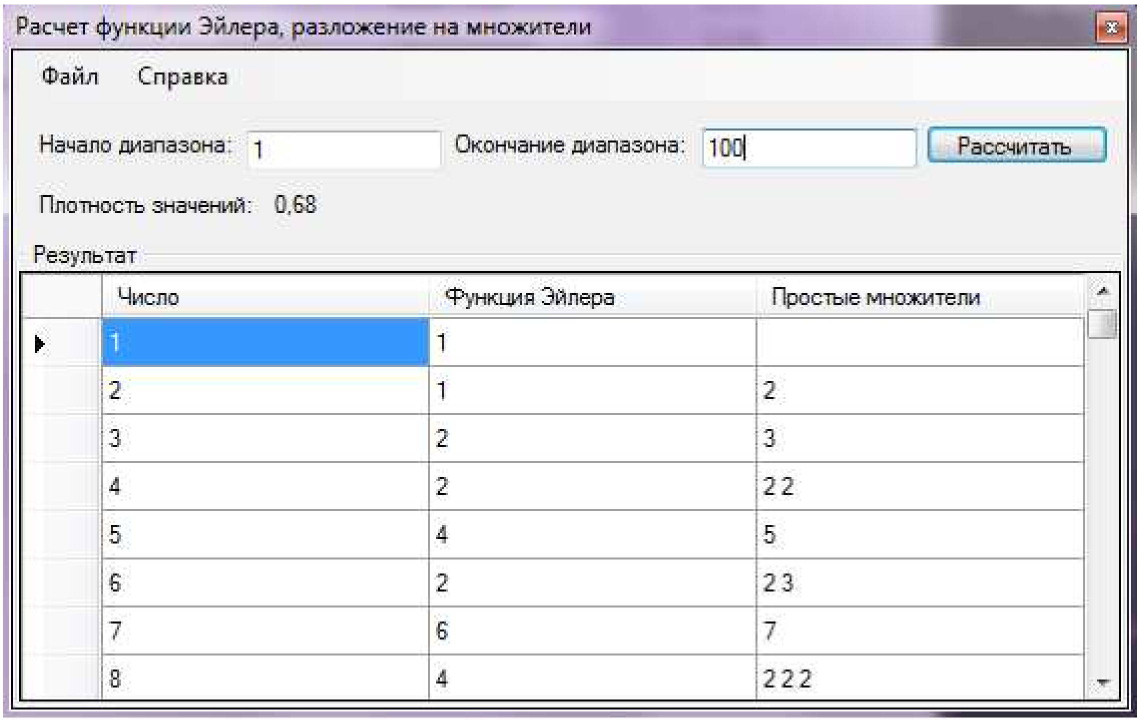


Рисунок 1 – Определение плотности значений функции Эйлера на отрезке $[1;N]$.

Таким образом, на отрезке $[1;10]$ плотность распределения функции Эйлера $\rho = 0{,}8$, на отрезке $[1;100]$ – $\rho = 0{,}68$, на отрезке $[1;\ 10^3] - \rho = 0{,}518$, на отрезке $[1;\ 10^4] - \rho = 0{,}4318$, на отрезке $[1{,}10^5] - \rho = 0{,}36824$, на отрезке $[1;\ 10^6] - \rho - 0{,}327722$, на отрезке $[1;\ 10^7] - \rho - 0{,}2971586$.

Исходя из этих данных, можно сказать, что плотность распределения функции Эйлера с увеличением отрезка уменьшается, и этот результат напрямую зависит от распределения простых чисел. Поэтому именно распределение простых чисел на бесконечности имеет большой интерес.

Представляет интерес определить порядок роста $\varphi(n)$ в среднем. Так же имеет место исследование суммы функции Эйлера . Первый результат в этом направлении принадлежит Мертенсу, доказавшему в 1874 году, что

$$\sum_{n=1}^{N} \varphi(n) = \frac{3N^2}{\pi^2} + O(N \ln N).$$

Докажем это равенство.

Обозначим $\Phi(N)=\sum_1^N \varphi(n)$. Отсюда имеем, что

$$\Phi(N)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n}1, причем (m,n)=1,$$

и, следовательно, эта функция равна числу целых точек с взаимно простыми координатами, которые лежат в прямоугольном треугольнике $0<y\leq x\leq N$.

Рассмотрим квадрат $0<x\leq N, 0<y\leq N$. Прямая $x=y$ делит этот квадрат на два прямоугольных треугольника, каждый из которых содержит одно и то же количество целых точек с взаимно простыми координатами. Один из этих треугольников является данным треугольником. Замети, что на прямой $x=y$ лежит единственная точка $x=y=1$ с взаимно простыми координатами.

Обозначим$\Psi(N)$число целых точек с взаимно простыми координатами в упомянутом выше квадрате. Тогда $\Psi(N)=2\Phi(N)-1$, так как точка $x=y=1$ содержится в обоих треугольниках.

Общее число целых точек в квадрате равно $[N]^2$, так что

$$[N]^2=\sum_{\substack{0<m\leq N\\ 0<n\leq N}}1.$$

Отсюда получаем

$$[N]^2=\sum_{1\leq d\leq N}\sum_{\substack{0<m\leq N\\ 0<n\leq N\\ (m,n)=d}}1. \qquad (*)$$

Далее, $(m,n)-d$ тогда и только тогда, когда $\left(\frac{m}{d},\frac{n}{d}\right)=1$. Следовательно, существует взаимно однозначное соответствие между целыми точками с координатами $m, n,$ где $0 < n \leq N, 0 < m \leq N, (m, n) = d$ и парами целых чисел m', n' такими, что

$$0 < m' \leq \frac{N}{d}, \qquad 0 < n' \leq \frac{N}{d}, \qquad (m', n') = 1.$$

Но по определению Ψ имеется в точности $\Psi\left(\frac{N}{d}\right)$ таких пар n', m'. Таким образом, равенство (*) может быть переписано в виде

$$[N]^2 = \sum_{1 < d \leq N} \Psi\left(\frac{N}{d}\right),$$

и, применяя вторую формулу обращения Мебиуса, получим при $N \geq 1$

$$\Psi(N) = \sum_{1 < d \leq N} \mu(d) \left[\frac{N}{d}\right]^2.$$

Выделим у числа $\frac{N}{d}$ целую и дробную части, а именно $\frac{N}{d} = \left[\frac{N}{d}\right] + \theta,$ где $0 \leq \theta < 1$. Тогда

$$\Psi(N) = \sum_{1 < d \leq N} \mu(d) \left\{\frac{N}{d} + O(1)\right\}^2 =$$

$$= N^2 \sum_{1 < d \leq N} \frac{\mu(d)}{d^2} + 2N \cdot O\left(\sum_{1 < d \leq N} \frac{1}{d}\right) + O\left(\sum_{1 < d \leq N} 1\right),$$

так как $|\mu(n)| \leq 1$. Известно, что

$$2N \cdot O\left(\sum_{1 < d \leq N} \frac{1}{d}\right) = 2N \cdot O\left(\ln t + \gamma + O\left(\frac{1}{N}\right)\right) = O(N \ln N),$$

$$O\left(\sum_{1 < d \leq N} 1\right) = O(N).$$

Следовательно,

$$\Psi(N) = N^2 \sum_{1 \leq d \leq N} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(N \ln N).$$

Чтобы оценить сумму в этой формуле, заметим, что

$$\sum_{1\le d\le N}\frac{\mu(d)}{d^2}=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}-\sum_{d=[N]+1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}$$

и

$$\left|\sum_{d=[N]+1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}\right|<\sum_{d=]+1}^{\infty}\frac{1}{d^2}<\int_{[N]}^{\infty}\frac{du}{u^2}=\frac{1}{[N]}=O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Тогда из этого следует, что

$$\Psi(N)=N^2\sum_{d=1}\frac{\mu(d)}{d^2}+O(N\ln N).$$

Далее можно вычислить ряд $\sum_{d=1}\frac{\mu(d)}{d^2}$ следующим образом. Поскольку оба ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,u\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(m)}{m^2}$$

сходятся абсолютно, то, перемножив их, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(m)}{m^2}=\sum_{v=1}^{\infty}\frac{c_v}{v^2},$$

где $c_v=\sum_{k|v}\mu(v)$. Но $c_1=1, c_n=0$ при $n>1$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{-1}=\frac{6}{\pi^2},$$

и, подставляя это значение в формулу, получаем

$$\Psi(N)=\frac{6N^2}{\pi^2}+O(N\ln N),$$

а, значит,

$$\Phi(N)=\frac{3N^2}{\pi^2}+O(N\ln N).$$

Что и требовалось доказать.

Данные рассуждения дают возможность экспериментально посчитать среднее значение функции Эйлера на больших числах, исходя из формулы

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi(n)}{N} = \frac{3N}{\pi^2} + O(\ln N).$$

Если же сравнить графики функций $y_1(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi(n)}{N}$ и $y_2(N) = \frac{3N}{\pi^2}$, то можно увидеть следующую картину (график 2).

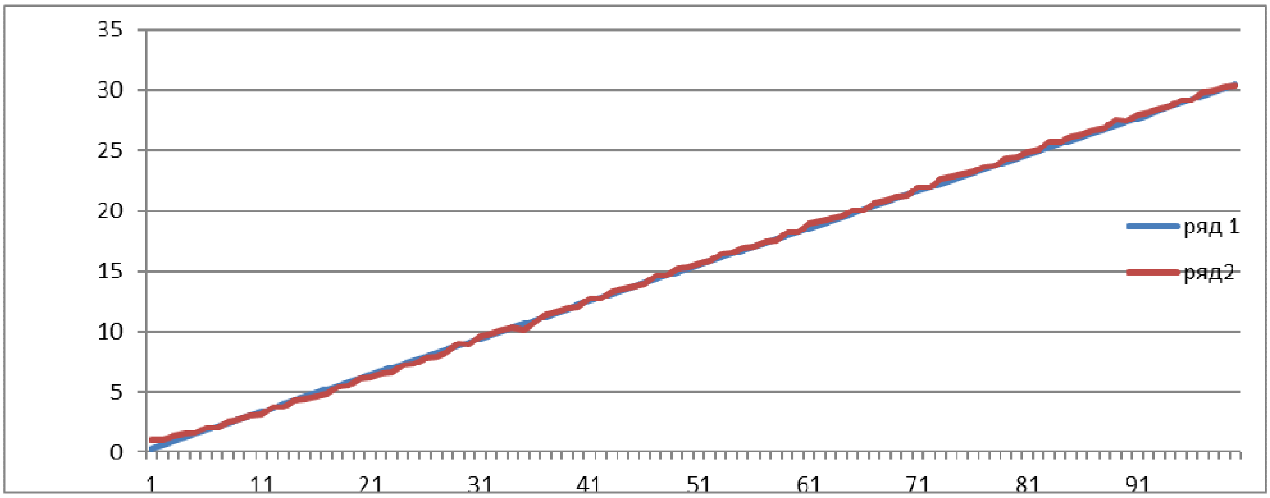
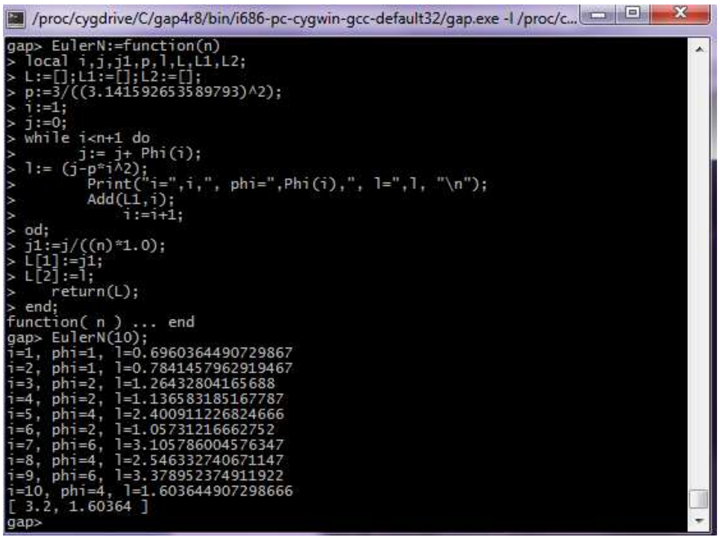


График 2 – анализ графиков $y_1 u y_2$

Из графика видно, что эти две функции отличаются друг от друга на некоторую константу $f(N)$. Для исследования функции

$$f(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi(n)}{N} - \frac{3N}{\pi^2},$$

была написана программа в среде GAP 4.8.6, которая считает изменения $f(N)$, при $N \to \infty$. Ниже приведен код программы и простой результат для первых десяти чисел (рисунок 2).



```
gap> EulerN:=function(n)
> local i,j,j1,p,l,L,L1,L2;
> L:=[];L1:=[];L2:=[];
> p:=3/((3.141592653589793)^2);
> i:=1;
> j:=0;
> while i<n+1 do
>       j:= j+ Phi(i);
> l:= (j-p*i^2);
>        Print("i=",i,", phi=",Phi(i),", l=",l, "\n");
>        Add(L1,i);
>            i:=i+1;
> od;
> j1:=j/((n)*1.0);
> L[1]:=j1;
> L[2]:=l;
>    return(L);
> end;
function( n ) ... end
gap> EulerN(10);
i=1, phi=1, l=0.6960364490729867
i=2, phi=1, l=0.7841457962919467
i=3, phi=2, l=1.26432804165688
i=4, phi=2, l=1.136583185167787
i=5, phi=4, l=2.400911226824666
i=6, phi=2, l=1.05731216662752
i=7, phi=6, l=3.105786004576347
i=8, phi=4, l=2.546332740671147
i=9, phi=6, l=3.378952374911922
i=10, phi=4, l=1.603644907298666
[ 3.2, 1.60364 ]
gap>
```

Рисунок 2

На основании этого кода было получено, что функция $f(N)$ ведет себя как логарифм, а точнее растет не быстрее, чем $\ln N$.

Имеет смысл также рассмотреть функцию

$$g(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi(n)}{N \ln N} - \frac{3N}{\pi^2 \ln N}.$$

Возникает вопрос, что за функция $g(N)$, какой характер она имеет при стремлении чисел к бесконечности и существует ли предел этой функции?

В ходе вычислений, изменяя программу и просчитывая для $N = 10^6, 10^7, \dots, 10^{11}$, видно, что $|g(N)| < 1$, а точнее $g(N) \in (-0{,}2;\ 0{,}8)$. Причем с увеличением чисел можно заметить, что максимум всех значений лежит в промежутке $(0{,}3;\ 0{,}4)$.

Euler019021(10^7);

[0.0035482, 0.0035868, 0.0035943, 0.0035813, 0.003608, 0.003585, 0.0035943, 0.0036198, 0.0035701, 0.0035546, 0.0035637, 0.0035799, 0.0035907, 0.0035991, 0.0035656, 0.003627, 0.0035864, 0.003591, 0.0035721, 0.0035802, 0.928302]

Итого, показано распределение значений по интервалу $(-0{,}1;\ 0{,}6)$ с шагом 0,1, где последнее число – это доля элементов, не попавших в этот интервал. В итоге, максимум пришелся на интервал $(0{,}3;\ 0{,}32)$.Причем, видно, что слева растет быстро, а справа медленно уменьшается.

Над этой темой так же работал Вальфиш А.З., который улучшил тривиальную форму остаточного члена до $O\left(\ln^{\frac{3}{4}} N(\ln\ln N)^{\alpha}\right)$. Вальфиш вывел равенство

$$\sum_{n=1}^{N}\varphi(n)=\frac{3N^2}{\pi^2}-N\sum_{m=1}^{N}\frac{\mu(m)}{m}\omega\left(\frac{N}{m}\right)+O(\ln N),$$

где оценка функции Эйлера сводится с оценке

$$\rho(N)=\sum_{m=1}^{N}\frac{\mu(m)}{m}\omega\left(\frac{N}{m}\right).$$

В его работе используются такие функции как $\omega\left(\frac{N}{m}\right)=\left\{\frac{N}{m}\right\}-\frac{1}{2}$ и $\mu\left(\frac{N}{m}\right)$ функция Мебиуса. Функция Мебиуса – это такая функция, которая может принимать значения

$\mu(N)=1$, если число свободно от квадратов,

$\mu(N)=-1$, если число свободно от квадратов, и разложение на простые множители состоит из нечетного числа множителей.

$\mu(N)=0$, если число несвободно от квадратов.

Позже в 1960 году Вальфиш А.З. совместно с Салтыковым А.Н. в своей работе «О функции Эйлера», опираясь а работы Виноградова И.М. и Коробкова Н.М., получают оценку остаточного члена в виде

$$\rho(N)=O\left(\ln^{\frac{3}{4}} N(\ln\ln N)^{1+\varepsilon}\right),$$

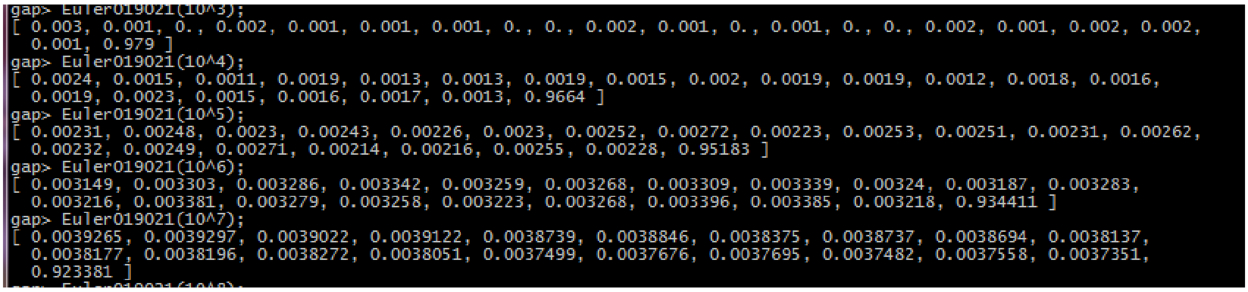
то есть формула принимает вид

$$\sum_{n=1}^{N}\varphi(n)=\frac{3N^2}{\pi^2}+O\left(N\ln^{2/3}N\,(\ln\ln N)^{1+\varepsilon}\right).$$

Улучшая уже готовую программу, исследуем поведение функции

$$g_1(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi(n)}{N \ln^{2/3} N\, (\ln\ln N)^{1+\varepsilon}} - \frac{3N^2}{\pi^2 N \ln^{2/3} N\, (\ln\ln N)^{1+\varepsilon}}.$$

Возьмем $\varepsilon = 0$ и исследуем функцию $g_1(N)$ на максимум.



```
gap> Euler019021(10^3);
[ 0.003, 0.001, 0., 0.002, 0.001, 0.001, 0.001, 0., 0., 0.002, 0.001, 0., 0.001, 0., 0., 0.002, 0.001, 0.002, 0.002,
  0.001, 0.979 ]
gap> Euler019021(10^4);
[ 0.0024, 0.0015, 0.0011, 0.0019, 0.0013, 0.0013, 0.0019, 0.0015, 0.002, 0.0019, 0.0019, 0.0012, 0.0018, 0.0016,
  0.0019, 0.0023, 0.0015, 0.0016, 0.0017, 0.0013, 0.9664 ]
gap> Euler019021(10^5);
[ 0.00231, 0.00248, 0.0023, 0.00243, 0.00226, 0.0023, 0.00252, 0.00272, 0.00223, 0.00253, 0.00251, 0.00231, 0.00262,
  0.00232, 0.00249, 0.00271, 0.00214, 0.00216, 0.00255, 0.00228, 0.95183 ]
gap> Euler019021(10^6);
[ 0.003149, 0.003303, 0.003286, 0.003342, 0.003259, 0.003268, 0.003309, 0.003339, 0.00324, 0.003187, 0.003283,
  0.003216, 0.003381, 0.003279, 0.003258, 0.003223, 0.003268, 0.003396, 0.003385, 0.003218, 0.934411 ]
gap> Euler019021(10^7);
[ 0.0039265, 0.0039297, 0.0039022, 0.0039122, 0.0038739, 0.0038846, 0.0038375, 0.0038737, 0.0038694, 0.0038137,
  0.0038177, 0.0038196, 0.0038272, 0.0038051, 0.0037499, 0.0037676, 0.0037695, 0.0037482, 0.0037558, 0.0037351,
  0.923381 ]
```

Рисунок 3

Из рисунка видно, что в это случае уточненной формулы Вальфиша значения функции $g_1(N)$ распределяются не так регулярно, как в формуле Мерсена, но максимум также приходится на интервал $(0{,}3; 0{,}32)$.

В 2007 году Орлова С.В. опубликовала статью «О функции Эйлера», в которой был получена оценка

$$\sum_{n=1}^{N} \varphi(n) = \frac{1}{2} A^k N^2 + R^k(N),$$

где

$$A^k = \Pi_p \left(1 - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^k} + \frac{1}{p^{k+1}}\right) > 0$$

$$R^k(N) = O\left(N^{1+\frac{1}{k}} \exp\left(-c(k) \frac{(\ln N)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln N)^{\frac{1}{5}}}\right)\right).$$

Литература

1. Бухштаб А.А., Теория чисел, М. 1966

2. Дэвенпорт Г., Мультипликативная теория чисел, М. 1971

3. Виноградов И.М. Основы теории чисел, 5-е издание, М. Гостехиздат, 1952

4. Орлова С.В. Суммирование значений арифметической функции на множестве чисел без к-ых степеней // Чебышевский сборник. -Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого. Том VI. Вып. 1(13). 2005. С. 157162.

5. Салтыков А.И. О функции Эйлера // Вестник Москов. ун-та, сер. матем., мех. 1960. №6. С. 34-50

6. Трост Э. Простые числа, М. 1959.

7. Хассе Г., Лекции по теории чисел, перевод с немецкого Демьянова В.Б., М. Издательство иностранной литературы, 1953

8. Чандрасекхаран К., Введение в аналитическую теорию чисел, М. 1974

9. Hardy, 1975, Theorem 330, p. 268

10. Walfisz Arn., Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie, Deutsch. Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.

References

1. Buhshtab A.A., Teorija chisel, M. 1966

2. Djevenport G., Mul'tiplikativnaja teorija chisel, M. 1971

3. Vinogradov I.M. Osnovy teorii chisel, 5-e izdanie, M. Gostehizdat, 1952

4. Orlova S.V. Summirovanie znachenij arifmeticheskoj funkcii na mnozhestve chisel bez k-yh stepenej // Chebyshevskij sbornik. -Tula: Izd-vo TGPU im. L.N. Tolstogo. Tom VI. Vyp. 1(13). 2005. S. 157162.

5. Saltykov A.I. O funkcii Jejlera // Vestnik Moskov. un-ta, ser. matem., meh. 1960. №6. S. 34-50

6. Trost Je. Prostye chisla, M. 1959.

7. Hasse G., Lekcii po teorii chisel, perevod s nemeckogo Dem'janova V.B., M. Izdatel'stvo inostrannoj literatury, 1953

8. Chandrasekharan K., Vvedenie v analiticheskuju teoriju chisel, M. 1974

9. Hardy, 1975, Theorem 330, p. 268

10. Walfisz Arn., Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie, Deutsch. Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.