

УДК 530.12+524.7

UDC 530.12+524.7

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and Math

**ДИНАМИКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ В
МЕТРИКЕ КОЛЬЦЕОБРАЗНЫХ И
СПИРАЛЬНЫХ ГАЛАКТИК****DYNAMICS OF RELATIVISTIC PARTICLES IN
THE RING AND SPIRAL GALAXY METRIC**

Трунев Александр Петрович

Alexander Trunev

к.ф.-м.н., Ph.D.

Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.

*Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто,
Канада**Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada*

В настоящей работе мы исследуем динамику релятивистских частиц в метрике кольцеобразных и спиральных галактик в общей теории относительности. На основе решения уравнений Эйнштейна получена метрика, обладающая осевой симметрией, содержащая N центров гравитации и логарифмическую особенность. Рассматривается применение полученных метрик для описания движения частиц в спиральных и кольцеобразных галактиках. Используя решения уравнений Эйнштейна для вакуума, дано объяснение вращения материи в спиральных галактиках. Получено выражение гравитационного потенциала во внутренней области спиральных галактик, согласующееся с экспериментальными данными по вращению CO и водорода. Установлено, что в метрике с N центрами гравитации, распределенными на окружности, существуют как локальные движения вблизи одного центра тяготения, так и движение вокруг N центров тяготения. Переход от одного режима движения к другому определяется начальным расстоянием до окружности, на которой распределены центры тяготения. Выведена система нелинейных уравнений параболического типа, описывающая эволюцию метрики в потоках Риччи. Сформулирована задача об установлении потенциалов системы в потоках Риччи. Рассматривается применение теории для описания спиральных и кольцеобразных галактик

In this work, we examine the dynamics of relativistic particles in the ring or spiral galaxy metric in general relativity. On the basis of the solution of Einstein's equations we have derived metric having axial symmetry, comprising N centers of gravity and a logarithmic singularity. The application received metrics to describe the motion of particles in a spiral and ring galaxy. On the basis of Einstein's equations solutions for vacuum we are explained rotation of matter in spiral galaxies. An expression for gravitation potential in the inner region of spiral galaxies in agreement with experimental data on the rotation of the CO and hydrogen is described. It is established that in the metric with N centers of gravity which are distributed on the circumference, exist as a local motion near the center of gravity, and motion around N gravity center as well. The transition from one mode of motion to another is determined by the initial distance to the circle on which the distributed centers of gravity. A system of non-linear parabolic equations describing the evolution of the metric in the Ricci flow proposed. The boundary problem for the gravitational potentials in the Ricci flow was formulated. There are applications of the theory to describe a spiral and ring galaxy

Ключевые слова: КОЛЬЦЕОБРАЗНАЯ
ГАЛАКТИКА, СПИРАЛЬНАЯ ГАЛАКТИКА,
ПРОБЛЕМА МНОГИХ ТЕЛ, ОБЩАЯ ТЕОРИЯ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ, ПОТОКИ РИЧЧИ

Keywords: GENERAL RELATIVITY, MANY-BODY
PROBLEM, RICCI FLOW, RING GALAXY, SPIRAL
GALAXY

Doi: 10.21515/1990-4665-122-070

Введение

Общая теория относительности Эйнштейна широко применяется в космологии и в астрофизике, в том числе, для моделирования движения звезд в галактиках [1-31]. В работах [1-8] была исследована задача многих тел в общей теории относительности в случае аксиально-симметричных метрик. В работах [1-3] на основе аксиально-симметричных решений уравнений Эйнштейна для вакуума исследованы метрики галактик. В [1] получено общее выражение гравитационных полей во внутренней области спиральной галактики, согласующееся с экспериментальными данными по скорости вращения СО и нейтрального водорода в 50 галактиках. В [2] исследовано движение релятивистских частиц в метрике с двумя центрами тяготения, представленных сингулярностями гравитационного поля. В работе [3] рассматривается модификация аксиально-симметричной метрики [1-2], в которой осевая координата является циклической, что соответствует распределению сингулярностей на окружности. Соответственно этой метрике сформулирована ограниченная задача многих тел [4], которая в такой постановке описывает динамику тел при их начальном распределении на окружности. Указано применение теории для описания кольцеобразных галактик, планетарных колец и пояса астероидов.

В работе [5] изучено слияние сингулярностей гравитационного поля в потоках Риччи в аксиально-симметричных метриках. Установлено, что в результате слияния частиц в потоках Риччи образуется устойчивая статическая система, состоящая из гравитационного поля и содержащая особенность, имитирующая частицу.

В численных экспериментах [5-6] было обнаружено, что столкновение частиц в потоках Риччи приводит к образованию гравитационных волн,

похожих по своей структуре на волны, зарегистрированные в экспериментах [9]. Следовательно, можно предположить, что наблюдаемые гравитационные волны обусловлены, главным образом, переходными процессами, связанными с изменением метрики системы [6].

В работах [7-8] исследована задача о рождении материи при столкновении частиц, представленных сингулярностями гравитационного поля. В качестве примера рассматривается метрика [10], обладающая осевой симметрией и содержащая две сингулярности, имитирующие частицы конечной массы. В численных экспериментах установлено, что столкновение частиц в потоках Риччи приводит к образованию материи трех типов - с положительной и с отрицательной плотностью энергии соответственно [8], а также цветной материи [7].

В работе [4] сформулирована ограниченная задача многих тел в потоках Риччи в общей теории относительности. Изучено расширение метрики [10] на случай трех [11] и более сингулярностей [12]. Показано, что в случае ограниченной задачи трех тел метрика [10] с двумя сингулярностями соответствует в теории Ньютона двум центрам тяготения, движущимся вокруг центра масс по круговым орбитам в неинерциальной системе отсчета, вращающейся с периодом обращения тел.

Задача многих тел в общей теории относительности рассматривалась в работах [1-24] и других. В работе [16] было показано, что уравнений поля для пустого пространства достаточно для описания движения материи, представленной в виде точечных сингулярностей. Следовательно, движение материальных частиц, представленных сингулярностями гравитационного поля, является одной из проблем общей теории относительности [16-19]. В таком подходе используются только гравитационные уравнения в пустом пространстве.

Как известно, для описания движения инертной материи в рамках общей теории относительности Эйнштейн и Инфельд сформулировали программу [18]: «Все попытки представить материю тензором энергии-импульса неудовлетворительны, и мы хотим освободить нашу теорию от специального выбора такого тензора. Поэтому мы будем иметь дело здесь только с гравитационными уравнениями в пустом пространстве, а материя будет представлена сингулярностями гравитационного поля».

Отметим, что в существующих подходах к описанию черных дыр широко используется метрика Шварцшильда [20], описывающая сингулярность гравитационного поля, что физически интерпретируется как поле частицы заданной массы.

В альтернативном подходе к описанию движения материальных тел используется тензор энергии-импульса [13-15, 21-25]. Однако в этом случае теория обрастает большим числом гипотез, связанных с неопределенностью понятия материя, особенно в свете последних открытий в астрофизике, указывающих на значительный (95%) вклад темной материи и темной энергии в динамику расширяющейся Вселенной [26].

В настоящей работе рассматривается обобщение аксиально-симметричной метрики [1-8] на случай распределения N сингулярностей на окружности или логарифмической спирали.

Аксиально-симметрические поля

Уравнения Эйнштейна имеют вид [27-30]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = g_{\mu\nu} \Lambda + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1)$$

Здесь $R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса; Λ, G, c - космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно. Ниже

положим $\Lambda = 0$, что обусловлено малостью влияния этого параметра в ограниченной задаче многих тел.

Решения уравнений Эйнштейна, обладающие осевой симметрией, рассматривались в работах [1-8, 10-12, 28-32] и других (обзор публикаций дан, например, в [12, 29-31]). Метрика таких пространств, при некоторых предположениях, может быть приведена к виду

$$ds^2 = e^\mu dt^2 - e^{-\mu} (e^\nu d\rho^2 + e^\nu dz^2) - e^{-\mu} \rho^2 d\phi^2 \quad (2)$$

Здесь $\mu(\rho, z), \nu(\rho, z)$ - функции, удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна.

Вычисляя компоненты тензора Эйнштейна $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$ в метрике (2) и полагая для вакуума

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 0,$$

находим уравнения поля:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} = 0, \\ \omega_2 &= \frac{\partial \nu}{\partial \rho} - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right] = 0, \\ \omega_3 &= \frac{\partial \nu}{\partial z} - \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0, \\ \omega_4 &= \frac{\partial^2 \nu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Можно проверить, что не все уравнения (3) являются независимыми и что выполняются следующие два соотношения [29]

$$\omega_4 \equiv \frac{\partial \omega_2}{\partial \rho} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} + \rho \omega_1 \frac{\partial \mu}{\partial \rho}, \quad \rho \omega_1 \frac{\partial \mu}{\partial z} \equiv \frac{\partial \omega_2}{\partial z} - \frac{\partial \omega_3}{\partial \rho} \quad (4)$$

Следовательно, можно в качестве системы уравнений для определения двух функций $\mu(\rho, z), \nu(\rho, z)$ выбрать, например, первое и четвертое уравнения (3), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \nu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right] &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Разрешая систему уравнений (5) приходим к определению статических полей гравитации в случае осевой симметрии. Рассмотрим решения системы уравнений (3) вида [12, 31]

$$\begin{aligned} \mu &= -\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_j)^2}}, \\ \nu &= -\sum_{j=1}^N \frac{m_j^2 \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_j)^2)^2} + \sum_{j \neq k} \frac{m_j m_k}{2(L_j - L_k)^2} \left[\frac{(\rho^2 + (z - L_j)(z - L_k))}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_j)^2} \sqrt{\rho^2 + (z - L_k)^2}} - 1 \right] \end{aligned} \tag{6}$$

Отметим, что выражения (6) отличаются нормировкой от выражений приведенных, например, в [12] в силу определения метрики (2). В частном случае, полагая в (6) $j = 2$, приходим к выражению потенциалов, впервые полученных в работе [10]

$$\begin{aligned} \mu_s(\rho, z, L_1, L_2) &= -\frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} - \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}}, \\ \nu_s(\rho, z, L_1, L_2) &= -\frac{m_1^2 \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_1)^2)^2} - \frac{m_2^2 \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_2)^2)^2} + \\ &\frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} \frac{(\rho^2 + (z - L_1)(z - L_2))}{(L_1 - L_2)^2} - \frac{m_1 m_2}{(L_1 - L_2)^2} \end{aligned} \tag{7}$$

В частном случае трех тел потенциалы μ, ν были получены в работе [11]. Выражения (6)-(7) представляют интерес в теории движения, столкновения и слияния частиц, представленных сингулярностями поля, с излучением гравитационных волн в потоках Риччи [3-8].

В нерелятивистском случае потенциал μ в (7) сводится к выражению $\mu = 2\varphi/c^2$, где φ - гравитационный потенциал в теории гравитации Ньютона.

Но тогда этот потенциал сводится к потенциалу двух точечных масс, расположенных на оси симметрии системы в точках $z = L_{1,2}$.

Поскольку точечные массы в метрике (2) с потенциалами (7) не испытывают взаимного перемещения, хотя должны притягиваться согласно теории Ньютона, автор [10] делает ошибочный вывод, что не верна теория относительности Эйнштейна. В действительности, однако, в теории Ньютона существует статическое решение для двух тяготеющих масс, движущихся по круговым орбитам в синодической системе координат - неинерциальной системе отсчета вращающейся синхронно с периодом обращения тел [33].

Как известно, синодическая система координат применяется в постановках ограниченной задачи трех тел в классической механике [33-35], что может быть использовано в формулировке аналогичной задачи в общей теории относительности. Различие же этих двух задач заключается в наличии потенциала ν , который не имеет аналогов в теории Ньютона, но играет роль аналогичную эффектам неинерциальной системы отсчета в классической механике [3].

Чтобы расширить указанную аналогию, положим в метрике (2)

$$z = R_0 \phi_1 \quad (8)$$

Здесь R_0 – некоторая константа (большой радиус тора), угол ϕ_1 – есть циклическая координата. При такой замене метрика (2) и уравнения (5) не изменятся, однако решение (6) имеет уже иной физический смысл, так как описывает гравитационные потенциалы источников, распределенных по окружности. Такое распределение может быть использовано для описания кольцеобразных галактик, планетарных колец и пояса астероидов [3].

Дальнейшее обобщение теории заключается в том, что в качестве координаты z можно выбрать некоторую функцию, такую, что уравнение

$z = z(R, \phi_1) = 0$ описывает плоскую кривую, например, логарифмическую спираль

$$R = R_0 \exp(k\phi_1)$$

Задавая распределение сингулярностей на одной или нескольких кривых, можно смоделировать движение частиц в спиральной галактике. Наконец, рассмотрим решение системы уравнений (5) вида [1-2]

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{m}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + a \ln \rho, \\ \nu &= -\frac{m^2 \rho^2}{4(\rho^2 + z^2)^2} - \frac{am}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \frac{a^2}{2} \ln \rho \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим, что выражение потенциала μ в форме (8) согласуется с выражением гравитационного потенциала, полученным в нерелятивистском приближении путем обработки данных по движению СО и водорода в 50 галактиках [1-2] – рис. 1.

Динамика релятивистских частиц

Движение релятивистских частиц в гравитационном поле в общем случае описывается уравнением

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \quad (10)$$

Γ_{kl}^i – символы Кристоффеля второго рода. Символы Кристоффеля вычисляются в метрике (2) согласно

$$\begin{aligned} \Gamma_{10}^0 &= \frac{\mu_\rho}{2}, \Gamma_{20}^0 = \frac{\mu_z}{2}, \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{\mu_\rho}{2} e^{2\mu-\nu}, \Gamma_{11}^1 = \frac{\nu_\rho - \mu_\rho}{2}, \Gamma_{21}^1 = \frac{\nu_z - \mu_z}{2}, \Gamma_{22}^1 = \frac{-\nu_\rho + \mu_\rho}{2}, \Gamma_{33}^1 = \frac{\rho\mu_\rho - 2}{2} re^{-\nu}, \\ \Gamma_{00}^2 &= \frac{\mu_z}{2} e^{2\mu-\nu}, \Gamma_{11}^2 = \frac{-\nu_z + \mu_z}{2}, \Gamma_{21}^2 = \frac{\nu_\rho - \mu_\rho}{2}, \Gamma_{22}^2 = \frac{\nu_z - \mu_z}{2}, \Gamma_{33}^2 = \frac{\rho^2 \mu_z}{2} e^{-\nu}, \\ \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{\rho} - \frac{\mu_\rho}{2}, \Gamma_{32}^3 = -\frac{\mu_z}{2} \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь индексы 0,1,2,3 соответствуют координатам t, ρ, z, ϕ .

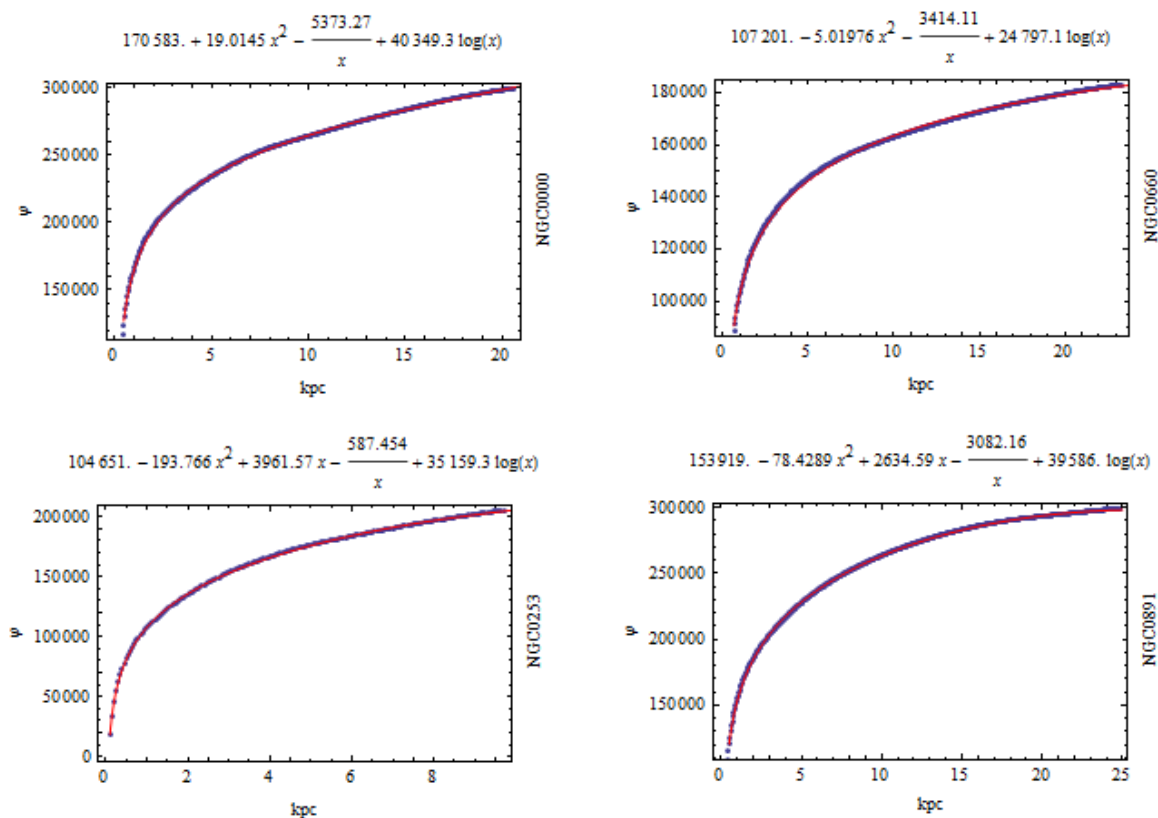


Рис. 1. Зависимость гравитационного потенциала ($\text{км}^2/\text{с}^2$) от радиальной координаты (кпс) в галактиках NGC 0000, NGC 0253, NGC 0660, NGC 0891: поле содержит точечный источник, логарифмическую особенность и квадратичный потенциал, описывающий течение в кластере [1-2].

Рассмотрим уравнения движения (10) с коэффициентами аффинной связности (11), в общем случае имеем:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{dt}{ds} \frac{dz}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0, \\
 & \frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{e^{2\mu-\nu}}{2} t_s^2 \mu_r + \frac{e^{-\nu}}{2} r \phi_s^2 (r \mu_r - 2) + r_s z_s (v_z - \mu_z) + \frac{z_s^2}{2} (\mu_r - v_r) - \frac{r_s^2}{2} (\mu_r - v_r) = 0, \\
 & \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{e^{-\nu}}{2} (e^{2\mu} t_s^2 + r^2 \phi_s^2) \mu_z + r_s z_s (v_r - \mu_r) - \frac{z_s^2}{2} (\mu_z - v_z) + \frac{r_s^2}{2} (\mu_z - v_z) = 0, \\
 & \frac{d^2 \phi}{ds^2} - \frac{\phi_s}{r} (r z_s \mu_z + r_s (r \mu_r - 2)) = 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $r = \rho, t_s = dt / ds, r_s = dr / ds, z_s = dz / dz, \phi_s = d\phi / ds$.

Отметим, что в отличие от классической ограниченной задачи трех тел [32-34], в которой для упрощения задачи необходимо осуществить переход в неинерциальную систему координат, метрика (2) изначально является статической, а используемая система координат не является инерциальной по определению.

Более того, как это следует из выражений (7), у метрики Зильберштейна [10] нет нерелятивистского предела, поскольку потенциалы этой метрики содержат сингулярности. В метрике же (9), содержащей логарифмическое слагаемое, потенциалы имеют один порядок величины $\nu \approx \mu$. Поэтому переход к теории Ньютона является проблематичным в указанных метриках. Тем не менее, такой переход был построен в [3-4] путем формального разложения уравнений по малому параметру $\nu \sim \mu^2 = 4\varphi^2 / c^4$.

При заданных потенциалах (6) система уравнений (12) может быть решена численно – рис 2-8. На рис. 2 приведены типичные траектории движения частиц в метрике (2) с потенциалами (6), вычисленные при начальных данных:

$$\begin{aligned}
 N = 21, m_i = 0.0051, R_0 = 21, L_i = R_0(2\pi / N)j, j = 0, \dots, N - 1; t(0) = 0, t'(0) = 1, \\
 r(0) = 5, r'(0) = 0., z(0) = 0, z'(0) = 0.0002, \phi(0) = 0, \phi'(0) = 0.0002
 \end{aligned} \tag{13}$$

Для отображения траектории движения введены новые координаты

$$x = (R_0 + r \cos \phi) \cos(z/R_0), \quad y = (R_0 + r \sin \phi) \cos(z/R_0), \quad z = r \sin(z/R_0).$$

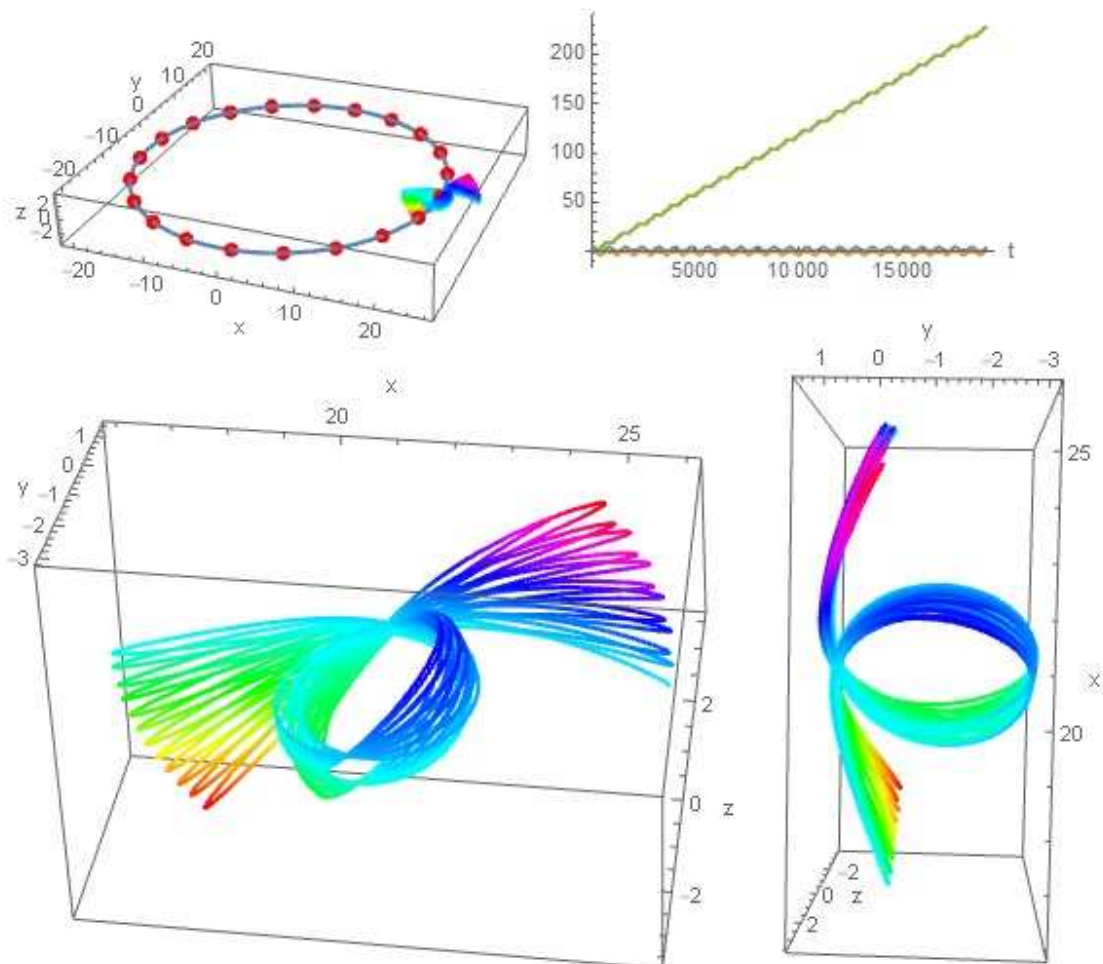


Рис. 2. Траектории частиц в метрике (2) в случае локального движения, полученные путем численного решения системы уравнений (12) с потенциалами (6) и начальными данными (13) при распределении особенностей на окружности (вверху, слева). Вверху справа представлены зависимости координат r, z, ϕ от времени – синяя, желтая и зеленая кривая соответственно.

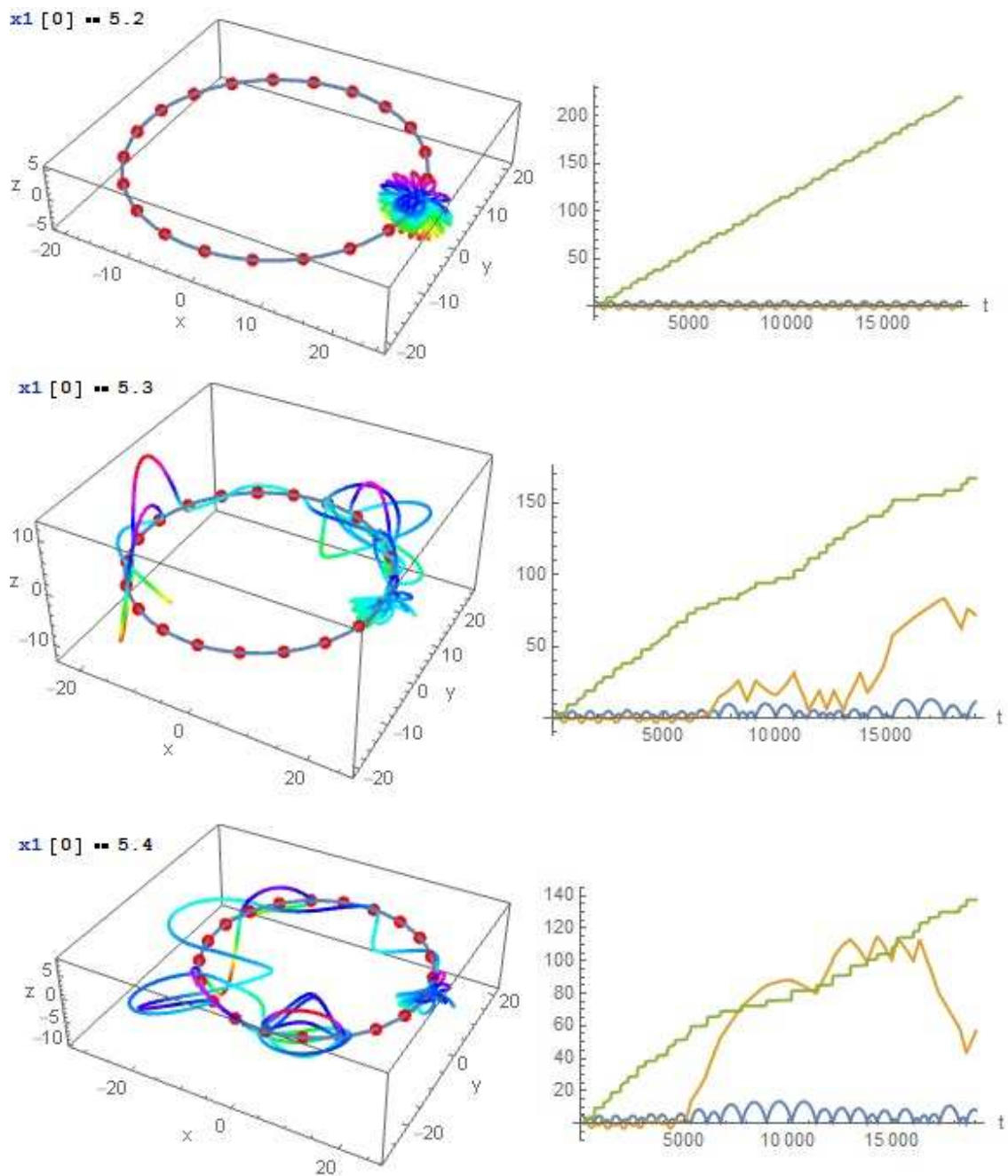


Рис. 3. Переход к движению по окружности при увеличении начального значения радиальной координаты: справа представлены зависимости координат r, z, ϕ от времени – синяя, желтая и зеленая кривая соответственно.

Отметим, что в случае, приведенном на рис. 2, движение частиц локализовано в окрестности одной сингулярности. Увеличивая начальное значение радиальной координаты $r(0) = 5.2, 5.3, 5.4$, при сохранении других параметров (13), находим переход к движению по окружности - рис. 3.

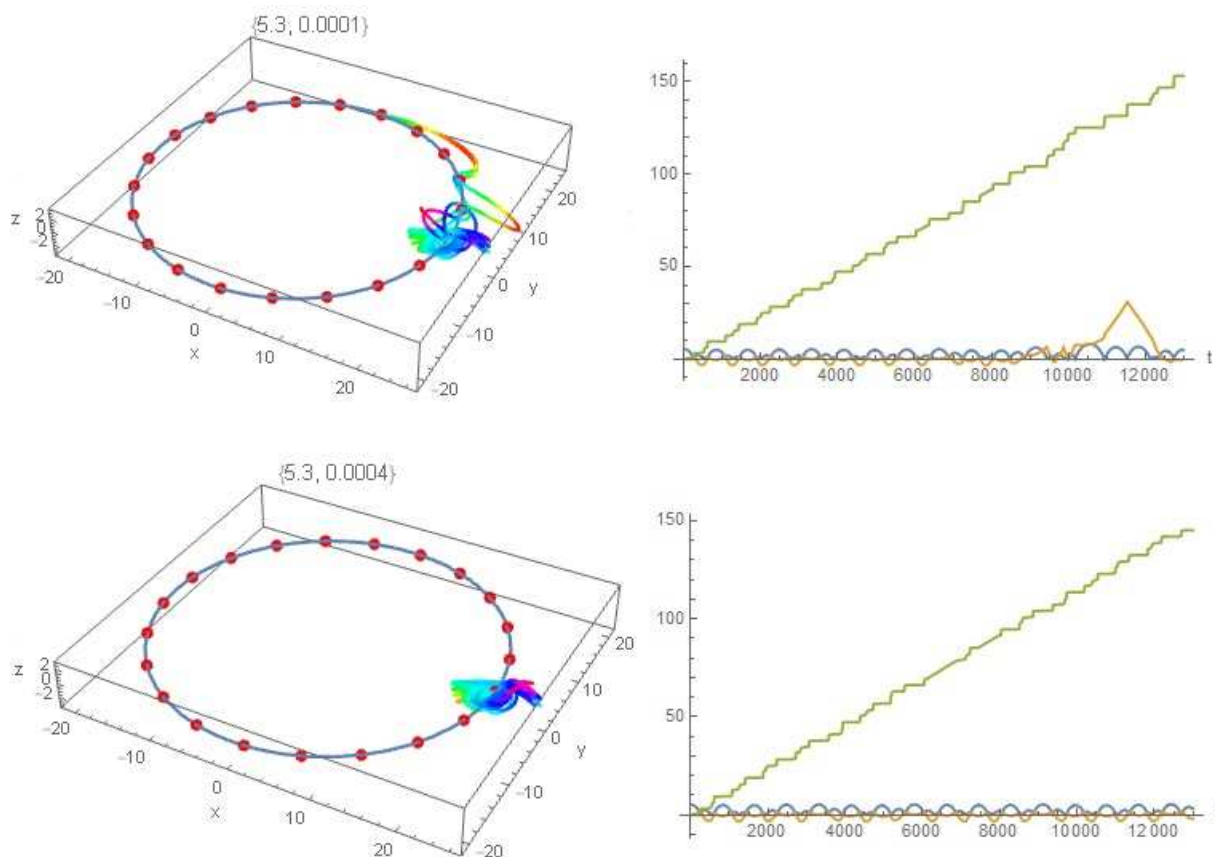


Рис. 4. Влияние начальной скорости вдоль циклической координаты ϕ на переход к движению по окружности: при увеличении начальной скорости в 4 раза с 0.0001 (верхние рисунки) до 0.0004 (нижние рисунки) происходит стабилизация локального движения.

На рис. 4 представлены траектории движения частиц в метрике (2) с потенциалами (6), вычисленные при начальных данных:

$$\begin{aligned}
 N = 21, m_i = 0.0051, R_0 = 21, L_i = R_0(2\pi/N)j, j = 0, \dots, N-1; t(0) = 0, t'(0) = 1, \\
 r(0) = 5.3, r'(0) = 0., z(0) = 0, \phi(0) = 0, \phi'(0) = 0.0002, \\
 z'(0) = 0.0001; 0.0004
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

В этом случае при увеличении скорости в 4 раза вдоль циклической координаты ϕ_1 происходит стабилизация локального движения, хотя кажется, что увеличение скорости должно приводить к движению по окружности.

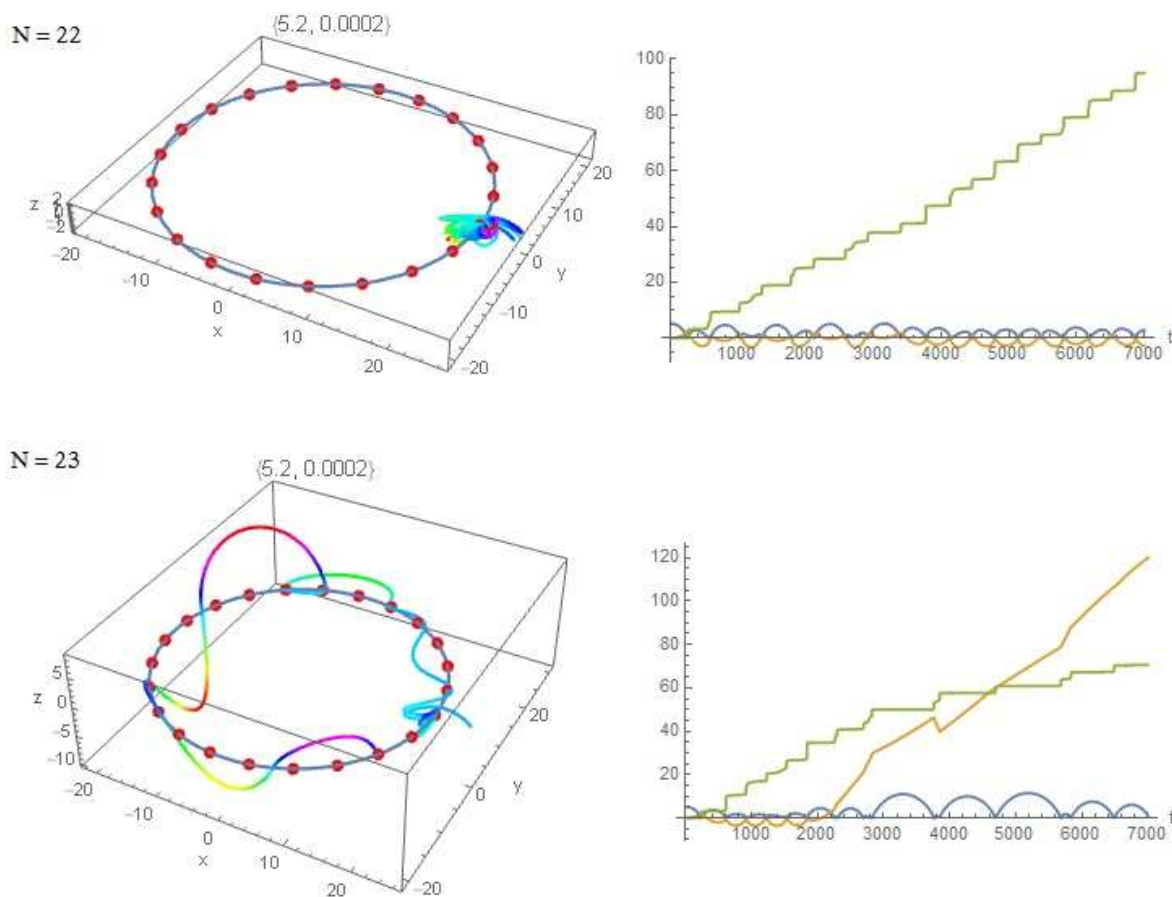


Рис. 5. Влияние числа сингулярностей на переход к движению по окружности: при увеличении числа сингулярностей с 22 (верхние рисунки) до 23 (нижние рисунки) происходит потеря стабильности локального движения.

На рис. 5 представлены траектории движения частиц в метрике (2) с потенциалами (6), вычисленные при начальных данных:

$$\begin{aligned} N &= 22;23, \\ m_i &= 0.0051, R_0 = 21, L_i = R_0(2\pi/N)j, j = 0, \dots, N-1; t(0) = 0, t'(0) = 1, \\ r(0) &= 5.2, r'(0) = 0., z(0) = 0, z'(0) = 0.0002, \phi(0) = 0, \phi'(0) = 0.0002. \end{aligned} \quad (15)$$

Сравнивая данные, приведенные на рис. 3 и 5, видим, что увеличение числа сингулярностей (центров тяготения) на окружности приводит к потере стабильности локального движения и к возбуждению движения по окружности.

Построим формальное разложение уравнений (12) по малому параметру $\nu \sim \mu^2 \ll 1$, в первом приближении имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{dt}{ds} \frac{dz}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial z} &= 0, \\ \frac{d^2 r}{ds^2} - r\phi_s^2 - \frac{dz}{ds} \frac{dr}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{1}{2}(t_s^2 + z_s^2 + r^2\phi_s^2 - r_s^2) \frac{\partial \mu}{\partial r} &= 0, \\ \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \frac{dr}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{1}{2}(t_s^2 - z_s^2 + r^2\phi_s^2 + r_s^2) \frac{\partial \mu}{\partial z} &= 0, \\ \frac{d^2 \phi}{ds^2} - \frac{\phi_s}{r}(rz_s\mu_z + r_s(r\mu_r - 2)) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

В нерелятивистской теории необходимо положить в уравнениях (16) $t_s = 1$, а все тройные произведения положить равными нулю. В результате этих упрощений находим систему уравнений, описывающих динамику частицы во внешнем гравитационном поле в теории Ньютона

$$\begin{aligned} t = s, \quad \frac{d^2 r}{ds^2} - r\phi_s^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial r} &= 0, \\ \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0, \quad \frac{d^2 \phi}{ds^2} + \frac{2\phi_s r_s}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь мы можем восстановить размерность времени, полагая $s = ct$ и учесть, что в нерелятивистском случае потенциал μ в (17) сводится к

выражению $\mu = 2\varphi/c^2$, где φ - потенциал в теории гравитации Ньютона. Учитывая, что последнее уравнение (17) имеет первый интеграл, находим окончательно

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} - r\dot{\phi}_t^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= 0, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0, \quad r^2 \dot{\phi}_t = const. \end{aligned} \quad (18)$$

В классической механике систему уравнений (18) упрощают, оставляя только первое и последнее уравнения

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\dot{\phi}_t^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad r^2 \dot{\phi}_t = const. \quad (19)$$

Таким образом, мы показали, что система уравнений (16), описывающих динамику релятивистских частиц в метрике (2) может быть сведена к стандартной модели классической механики (16), описывающей динамику нерелятивистских частиц в центрально-симметрическом поле. Однако при этом метрика (2) с потенциалами (6), (7) или (9) не сводится к галилеевой метрике, что обусловлено наличием сингулярностей [3-4].

Основное свойство метрики (2) заключается в том, что система N тел представляется как статическая система, что достигается за счет релятивистских эффектов, которые обеспечиваются вторым потенциалом системы (5), не имеющим аналогов в теории Ньютона. Используя это свойство метрики (2), можно сформулировать ограниченную задачу $N+1$ тел как движение одного тела в статической системе N тел, обладающей, например, потенциалами (6). В этом случае постановка ограниченной задачи для $N+1$ тел в теории тяготения Ньютона сводится к решению системы уравнений (18) с потенциалом μ в форме (6).

Рассмотрим противоположный случай, когда $\mu/\nu \sim 1/\sqrt{N} \ll 1$ [5]. Это, в частности, выполняется в случае системы состоящей из большого числа частиц, обладающих логарифмическим потенциалом [4, 35]. В первом приближении положим в системе уравнений (15) $\mu = 0$, тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{ds^2} &= 0, \quad \frac{d^2 r}{ds^2} - e^{-\nu} r \phi_s^2 + r_s z_s \nu_z + \frac{1}{2}(r_s^2 - z_s^2) \nu_r = 0, \\ \frac{d^2 z}{ds^2} + r_s z_s \nu_r - \frac{1}{2}(r_s^2 - z_s^2) \nu_z &= 0, \\ r^2 \phi_s &= M = const. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь M – момент импульса частицы. Первое уравнение (20) может быть проинтегрировано, в результате находим $t = s$. Рассмотрим решение второго уравнения (5), содержащее N особенностей логарифмического типа [4]

$$\nu = -\sum_{i=1}^N b_i \ln \sqrt{(\rho - \rho_i)^2 + (z - L_i)^2} \quad (21)$$

При заданном потенциале (21) система уравнений (20) может быть решена численно [3-4]. Было установлено, что траектория движения в логарифмическом потенциале (21) для больших значений $N \approx 100$ выглядит как тор покрытый игами. В плоскости (r, z) траектория похожа на клубок спутанных ниток, что является основным признаком хаотического поведения [3-4]. В случае же потенциалов (6) траектория при локальном движении выписывает правильную фигуру – рис. 2, 6, а при движении по окружности движение только внешне похоже на хаотическое блуждание – рис. 3, 7, что объясняется равномерным распределением сингулярностей равной массы на окружности [3].

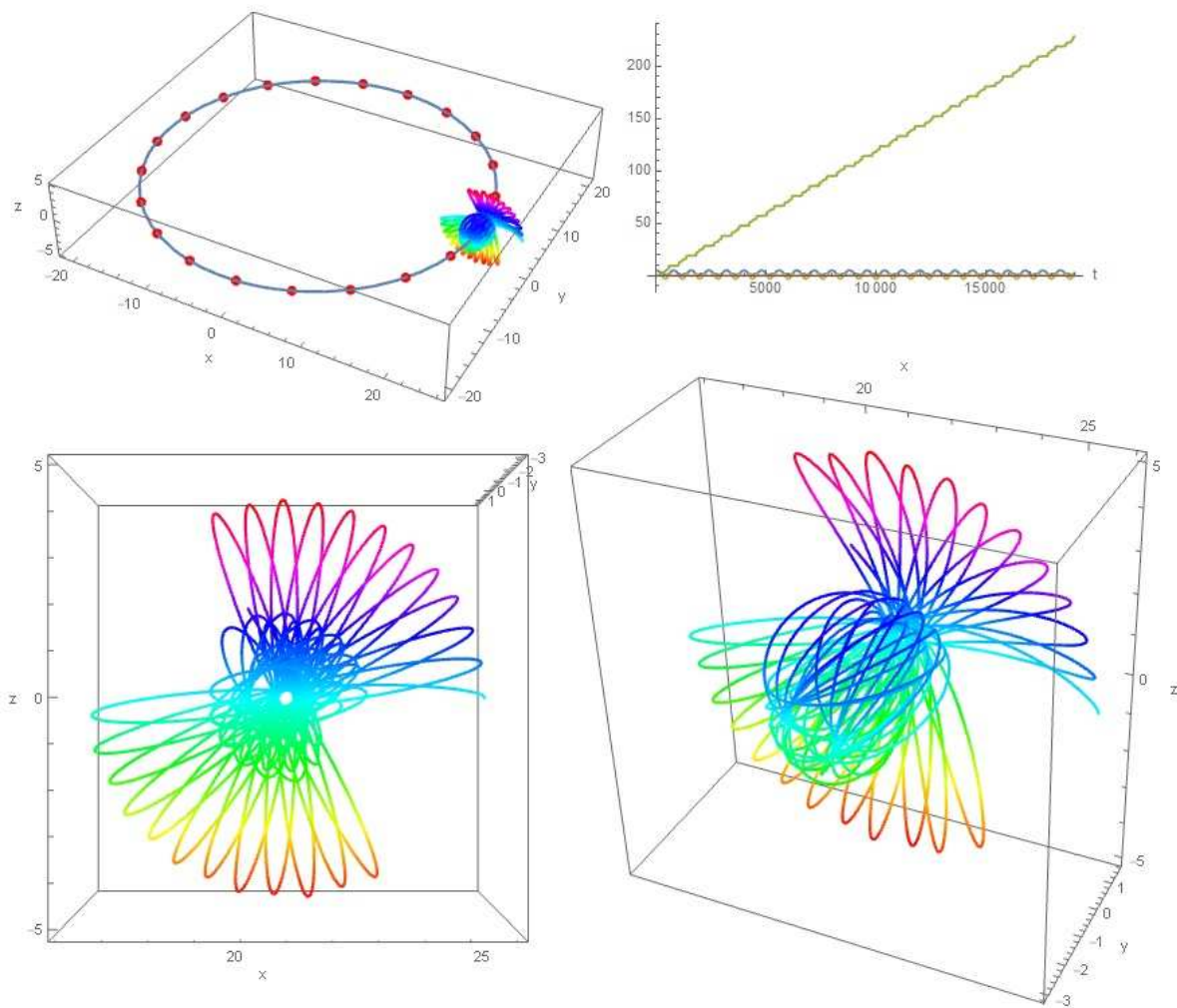


Рис. 6. Траектории частиц в метрике (2) в случае локального движения, полученные путем численного решения системы уравнений (12) с потенциалами (6) при распределении особенностей на окружности с

данными: $N = 21, m_i = 0.0051, R_0 = 21, L_i = R_0(2\pi/N)j, j = 0, \dots, N-1; t(0) = 0, t'(0) = 1,$
 $r(0) = 5, r'(0) = 0., z(0) = 0, z'(0) = 0.0005, \phi(0) = 0, \phi'(0) = 0.0005$

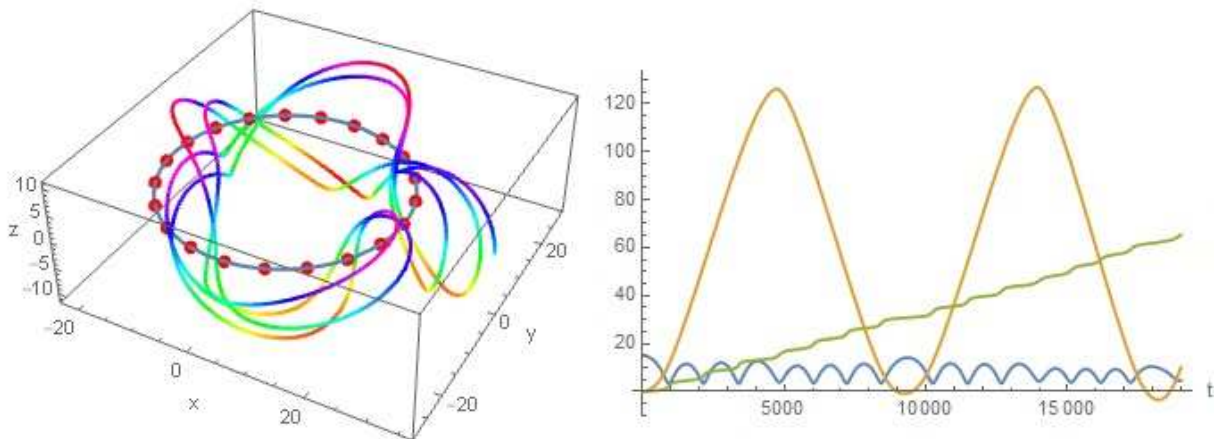


Рис. 7. Траектории частиц в метрике (2) в случае локального движения, полученные путем численного решения системы уравнений (12) с потенциалами (6) при распределении особенностей на окружности с

данными: $N = 21, m_i = 0.0051, R_0 = 21, L_i = R_0(2\pi/N)j, j = 0, \dots, N - 1; t(0) = 0, t'(0) = 1,$
 $r(0) = 15, r'(0) = 0., z(0) = 0, z'(0) = 0.0004, \phi(0) = 0, \phi'(0) = 0.0007$

Движение сингулярностей в потоках Риччи

Модель (5) обладает уникальным свойством расширения в теории потоков Риччи [3-8], что позволяет задавать движение в системе N тел. В этом случае гравитационные потенциалы в системе уравнений (16) зависят от времени по заданному закону [4-8].

Для моделирования изменения метрики при движении сингулярностей используем потоки Риччи, которые описываются уравнением [36-40]

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial t} = D_0 R_{ik} \tag{22}$$

Здесь D_0 – коэффициент диффузии, которые в стандартной теории [36-40] полагают равным $D_0 = -2$, однако в метрике (2) с учетом сигнатуры следует положить $D_0 = 2$, тогда (5) сводится к системе уравнений параболического типа:

$$\begin{aligned}
 e^{v-\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \\
 e^{v-\mu} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right]
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Сравнивая (23) и (5) находим, что для установившихся потоков при условиях $\mu_t = v_t = 0$ система (23) сводится к (5). Обоснованием для такого перехода от статической системы (5) к системе уравнений параболического типа (23) может служить теория, развитая в работах [36-40] и других.

Для многих практически важных задач, таких как слияние черных дыр [9], достаточно будет знать, как изменяется метрика бинарной системы при сближении центров гравитации с заданной скоростью. Модель потоков Риччи (23) позволяет ответить на этот и другие вопросы, связанные с изменением метрики [3-8].

Рассмотрим задачу об установлении потенциалов системы (23) при столкновении N сингулярностей в прямоугольной области $r_0 \leq \rho \leq R, -L/2 \leq z \leq L/2$ при заданном начальном условии

$$\begin{aligned}
 t = 0: \mu(0, \rho, z) &= \mu_0(\rho, z, \{m_i, L_i\}) = -\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_i)^2}}, \\
 v(0, \rho, z) &= v_0(\rho, z, \{m_i, L_i\})
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Здесь функция v_0 задается вторым уравнением (6). Решение будет зависеть от краевых условий, которые мы сформулируем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 t > 0: \mu(t, r_0, z) &= \mu_0(r_0, z, \{m_i, L_i\}), \quad v(t, r_0, z) = v_0(r_0, z, \{m_i, L_i\}), \\
 \mu(t, R, z) &= \mu_0(R, z, \{m_i, L_i\}), \quad v(t, R, z) = v_0(R, z, \{m_i, L_i\}), \\
 \mu(t, \rho, -L/2) &= \mu_0(\rho, -L/2, \{m_i, L_i\}), \quad v(t, \rho, -L/2) = v_0(\rho, -L/2, \{m_i, L_i\}), \\
 \mu(t, \rho, L/2) &= \mu_0(\rho, L/2, \{m_i, L_i\}), \quad v(t, \rho, L/2) = v_0(\rho, L/2, \{m_i, L_i\}).
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Здесь r_0 - граница области, отделяющая область численного интегрирования от оси системы, содержащей сингулярные точки потенциала

(9). Такая постановка задачи позволяет исключить сингулярности в решениях. Наконец, положим $z = R_0 \phi_1$, $L = 2\pi R_0$, тогда, задавая движение сингулярностей в виде $L_i = L_i(t)$ и условие периодичности на краях $z = \pm L/2$, имеем постановку задачи о столкновении частиц, распределенных на окружности. Таким образом, общая теория относительности позволяет описать гравитационное поле и динамику частиц в случае кольцевого распределения материи [3].

Свойства метрики (2) и решений (6) позволяют описать движение частиц в многорукавной галактике по аналогии с движением в случае кольцеобразной галактики путем задания распределения сингулярностей на некоторой плоской кривой, описывающей геометрию рукавов – рис. 8. Данные на рис. 8 получены путем интегрирования системы уравнений (12) с потенциалами (6) при распределении сингулярностей на двух логарифмических спиралях при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} N = 21, m_i = 0.0051, R_0 = 21, L_i = R_0 \exp[(\pi/4N)j], j = 1, \dots, N; t(0) = 0, t'(0) = 1, \\ r(0) = 8, r'(0) = 0., z(0) = 0.0, z'(0) = 0.0002, \phi(0) = 0, \phi'(0) = 0.0002 \end{aligned} \quad (26)$$

Отметим, что данные на рис. 8 соответствуют движению частиц в галактике с двумя рукавами. Полученные результаты могут быть использованы для моделирования динамики частиц в кольцевых и спиральных галактиках – рис. 1-8.

Наконец, заметим, что более половины галактик в наблюдаемой Вселенной обладает спиральными рукавами [41], происхождение которых остается неясным. Наиболее популярной является теория волн плотности [42-43], согласно которой рукава галактик представляют собой ударные волны, возникающие в материи во вращающейся как целое системе.

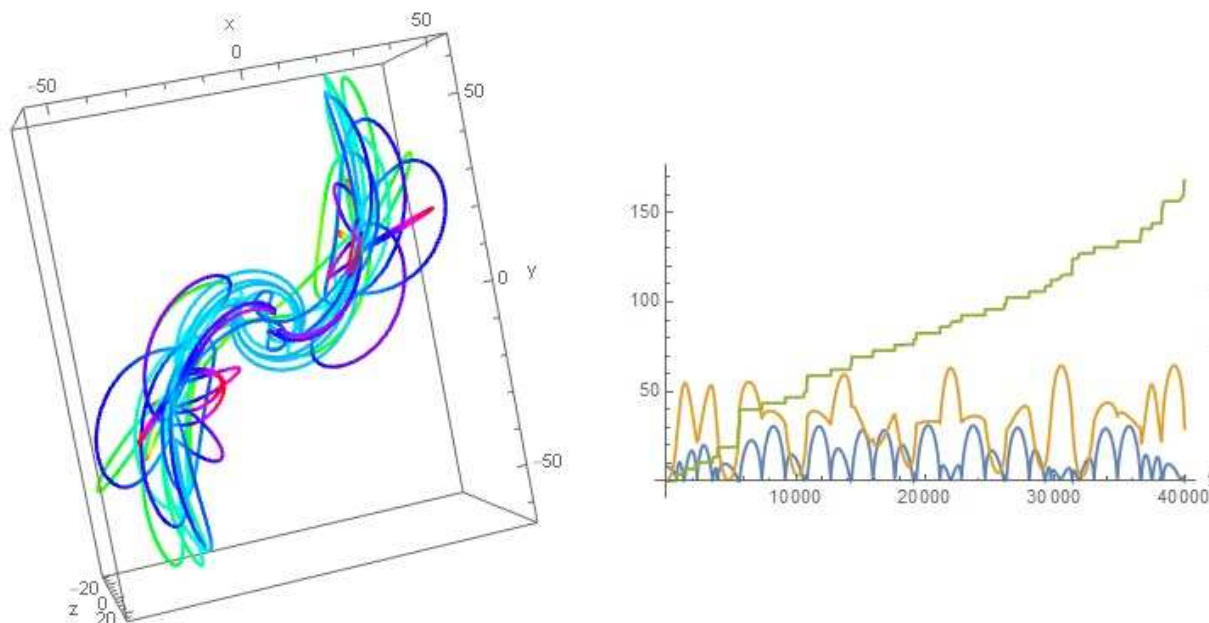


Рис. 8. Траектории частиц в метрике (2), полученные путем численного решения системы уравнений (12) с потенциалами (6) при распределении особенностей на двух логарифмических спиралях с данными (26): справа представлены зависимости координат r, z, ϕ от времени – синяя, желтая и зеленая кривая соответственно.

В настоящей работе мы рассмотрели модель рукавов в виде логарифмических спиралей, на которых распределены сингулярности поля. Представляется интересным рассмотреть динамику сингулярностей в рукавах галактик в модели потоков Риччи. Однако эта проблема выходит за рамки настоящего исследования.

Библиографический список

1. Трунев А.П. Общая теория относительности и метрика галактик / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар:

КубГАУ, 2013. – №10(094). С. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf>.

2. Трунев А.П. Динамика релятивистских частиц в метрике галактик / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №02(116). С. 1619 – 1641. – IDA [article ID]: 1161602101. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/02/pdf/101.pdf>.

3. Трунев А.П. Задача многих тел в метрике с распределением источников на окружности / Трунев А.П. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №09(123). – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/09/pdf/132.pdf>, 1,375 у.п.л. – IDA [article ID]: 1221608132. <http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-123-132>

4. Трунев А.П. Ограниченная задача многих тел в потоках Риччи в общей теории относительности / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №08(122). С. 1008 – 1033. – IDA [article ID]: 1221608070. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/08/pdf/70.pdf>.

5. Трунев А.П. Столкновение частиц в потоках Риччи / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №07(121). С. 1787 – 1808. – IDA [article ID]: 1211607111. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/111.pdf>.

6. Трунев А.П. Гравитационные волны в потоках Риччи при слиянии сингулярностей / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №07(121). С. 1907 – 1928. – IDA [article ID]: 1211607121. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/121.pdf>.

7. Трунев А.П. Рождение цветной материи в потоках Риччи в общей теории относительности / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №08(122). С. 1233 – 1257. – IDA [article ID]: 1221608082. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/08/pdf/82.pdf>.

8. Трунев А.П. Рождение материи при столкновении сингулярностей в потоках Риччи / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №08(122). С. 983 – 1007. – IDA [article ID]: 1221608069. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/08/pdf/69.pdf>.

9. Abbott B.P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger// Phys. Rev. Let., PRL 116, 061102, 12 Feb., 2016.

10. Silberstein L. Two-Centers Solution of the Gravitational Field Equations, and the Need for a Reformed Theory of Matter//Phys. Rev. 49, 268, 1936.

11. Dexter J. Booth. A static three-center solution to Einstein's gravitational field equations//International Journal of Theoretical Physics, December 1975, Volume 14, Issue 6, pp 361-366.

12. Letelier P.S., Oliveira S.R. Superposition of Weyl solutions: the equilibrium forces// Class. Quantum Grav. 15, 421-433, 1998.

<http://ej.kubagro.ru/2016/09/pdf/143.pdf>

13. Levi-Civita. The Relativistic Problem of Several Bodies// *Am. Journal of Math*, 59, no 1, 9-22, 1937.
14. Eddington A. S., Clark G. L. The Problem of N Bodies in General Relativity. Theory// *Proc. Roy. Soc. A* 166, 465, 1938.
15. Фок В.А. О движении конечных масс в общей теории относительности// *ЖЭТФ*, 9, №4, 375, 1939.
16. Einstein A., Infeld L., Hoffmann B. Gravitational Equations and Problems of Motion//*Ann. Math.*, 39, 65-100, 1938.
17. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and Problems of Motion II//*Ann. Math.*, 41, 455-564, 1940.
18. Einstein A., Infeld L. On the Motion of Particles in General Relativity Theory// *Canad. J. Math.*, 1, 209—241, 1949.
19. Infeld L., Plebansky J. *Motion and Relativity*.- Pergamon Press, NY, 1960.
20. Schwarzschild K. Uber das Gravitations-feld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie// *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse*, 189–196 (1916); On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory//arXiv: physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 May 1999.
21. Papapetrou A. Equations of Motion in General Relativity// *Proc. Phys. Soc. A* 64, 57, 1951.
22. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: ГИТЛ, 1956.
23. Levi-Civita T. *The n-Body Problem in General Relativity*. – Springer, 1964.
24. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. – М.: Наука, 1972.
25. Рябушко А.П. Движение тел в общей теории относительности – Мн.: Вышэйшая школа, 1979.
26. Ade P.A.R. et al. [Planck Collaboration]. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters// arXiv:1303.5076.
27. Landau L.D., Lifshitz E.M. *The Classical Theory of Fields*. Vol. 2 (3rd ed.). Pergamon Press. ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.
28. Synge J.L. *Relativity: the General Theory*. - Amsterdam, 1960.
29. Petrov A.Z. *New methods in general relativity*. - Moscow: Nauka, 1966.
30. Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, Eduard Herltet. *Exact Solutions to Einstein's Field Equations*. Second Edition. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46136-7, 2003.
31. Israel W., Khan K.A. Collinear particles and bondi dipoles in general relativity//*Nuovo Cim.*, 33, 2, pp. 331-344, 1964.
32. Szebehely V. *Theory of Orbits: Restricted Problem of Three Bodies*. – Academic Press, NY, 1967.
33. Musielak Z.E., Quarles B. The three-body problem// arXiv:1508.02312v1, 10 Aug 2015.
34. Пуанкаре А. Лекции по небесной механике. – М., Наука, 1965.
35. Трунев А.П. Динамика частиц в метрике с логарифмическим потенциалом / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №06(120). С. 1067 – 1092. – IDA [article ID]: 1201606070. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/06/pdf/70.pdf>
36. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces// *Contemp. Math.* 71, 237-261, 1988.

37. Hamilton R.S. A compactness property for solutions of the Ricci flow// Amer. Jour. Math. 117, 545-572, 1995.
38. Perelman G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications// arXiv:math/0211159, 11 Nov 2002.
39. Perelman G. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds//arXiv:math/0307245, 17 Jul 2003.
40. Perelman G. Ricci flow with surgery on three-manifolds//arXiv:math/0303109, 10 Mar 2003.
41. Nair P.B., Abraham R.G. A Catalog of Detailed Visual Morphological Classifications for 14,034 Galaxies in the Sloan Digital Sky Survey// ApJS, 186, 2, pp. 427-456, 2010.
42. Lindblad P.O. The development of spiral structure in a galaxy approached by numerical computations// Sto. An., 21, 4, 1960.
43. Shu F.H. Six Decades of Spiral Density-Wave Theory// Ann. Rev. of Astronomy and Astrophysics, 54, 2016.

References

1. Trunев А.П. Общhaja теория относительности и метрика галактик / А.П. Trunев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №10(094). С. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf>.
2. Trunев А.П. Динамика релятивистских хаотических в метрике галактик / А.П. Trunев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №02(116). С. 1619 – 1641. – IDA [article ID]: 1161602101. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/02/pdf/101.pdf>.
3. Trunев А.П. Задача многих тел в метрике с распределением источников на окружности / Trunев А.П. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №09(123). – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/09/pdf/132.pdf>, 1,375 у.п.л. – IDA [article ID]: 1221608132. <http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-123-132>
4. Trunев А.П. Ограниченная задача многих тел в потоках Риччи в обшhей теории относительности / А.П. Trunев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №08(122). С. 1008 – 1033. – IDA [article ID]: 1221608070. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/08/pdf/70.pdf>.
5. Trunев А.П. Столкновение хаотических в потоках Риччи / А.П. Trunев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №07(121). С. 1787 – 1808. – IDA [article ID]: 1211607111. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/111.pdf>.
6. Trunев А.П. Гравитационные волны в потоках Риччи при слиянии сингулярностей / А.П. Trunев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: <http://ej.kubagro.ru/2016/09/pdf/143.pdf>

KubGAU, 2016. – №07(121). S. 1907 – 1928. – IDA [article ID]: 1211607121. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/121.pdf>.

7. Trunев A.P. Rozhdenie cvetnoj materii v potokah Richchi v obshhej teorii otnositel'nosti / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №08(122). S. 1233 – 1257. – IDA [article ID]: 1221608082. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/08/pdf/82.pdf>.

8. Trunев A.P. Rozhdenie materii pri stolknovenii singuljarnostej v potokah Richchi / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №08(122). S. 983 – 1007. – IDA [article ID]: 1221608069. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/08/pdf/69.pdf>.

9. Abbott B.P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger// Phys. Rev. Let., PRL 116, 061102, 12 Feb., 2016.

10. Silberstein L. Two-Centers Solution of the Gravitational Field Equations, and the Need for a Reformed Theory of Matter//Phys. Rev. 49, 268, 1936.

11. Dexter J. Booth. A static three-center solution to Einstein's gravitational field equations//International Journal of Theoretical Physics, December 1975, Volume 14, Issue 6, pp 361-366.

12. Letelier P.S., Oliveira S.R. Superposition of Weyl solutions: the equilibrium forces// Class. Quantum Grav. 15, 421-433, 1998.

13. Levi-Civita. The Relativistic Problem of Several Bodies// Am. Journal of Math, 59, no 1, 9-22, 1937.

14. Eddington A. S., Clark G. L. The Problem of N Bodies in General Relativity. Theory// Proc. Roy. Soc. A 166, 465, 1938.

15. Fok V.A. O dvizhenii konechnyh mass v obshhej teorii otnositel'nosti// ZhJeTF, 9, №4, 375, 1939.

16. Einstein A., Infeld L., Hoffmann B. Gravitational Equations and Problems of Motion//Ann. Math., 39, 65-100, 1938.

17. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and Problems of Motion II//Ann. Math., 41, 455-564, 1940.

18. Einstein A., Infeld L. On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1, 209—241, 1949.

19. Infeld L., Plebansky J. Motion and Relativity.- Pergamon Press, NY, 1960.

20. Schwarzschild K. Uber das Gravitations-feld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie// Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse, 189–196 (1916); On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory//arXiv: physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 May 1999.

21. Papapetrou A. Equations of Motion in General Relativity// Proc. Phys. Soc. A 64, 57, 1951.

22. Fok V.A. Teorija prostranstva, vremeni i t'jagotenija. – M.: GITL, 1956.

23. Levi-Civita T. The n–Body Problem in General Relativity. – Springer, 1964.

24. Brumberg V.A. Reljativistskaja nebesnaja mehanika. – M.: Nauka, 1972.

25. Rjabushko A.P. Dvizhenie tel v obshhej teorii otnositel'nosti – Mn.: Vyshhejschaja shkola, 1979.

26. Ade P.A.R. et al. [Planck Collaboration]. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters// arXiv:1303.5076.
27. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). Pergamon Press. ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.
28. Synge J.L. Relativity: the General Theory. - Amsterdam, 1960.
29. Petrov A.Z. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.
30. Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, Eduard Herltet. Exact Solutions to Einstein's Field Equations. Second Edition. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46136-7, 2003.
31. Israel W., Khan K.A. Collinear particles and bondi dipoles in general relativity//Nuovo Cim., 33, 2, pp. 331-344, 1964.
32. Szebehely V. Theory of Orbits: Restricted Problem of Three Bodies. – Academic Press, NY, 1967.
33. Musielak Z.E., Quarles B. The three-body problem// arXiv:1508.02312v1, 10 Aug 2015.
34. Пуанкаре А. Лекции по небесной механике. – М., Наука, 1965.
35. Trunев А.П. Динамика хаотич в метрике с логарифмическим потенциалом / А.П. Trunев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №06(120). С. 1067 – 1092. – IDA [article ID]: 1201606070. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/06/pdf/70.pdf>
36. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces// Contemp. Math. 71, 237-261, 1988.
37. Hamilton R.S. A compactness property for solutions of the Ricci flow// Amer. Jour. Math. 117, 545-572, 1995.
38. Perelman G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications// arXiv:math/0211159, 11 Nov 2002.
39. Perelman G. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds//arXiv:math/0307245, 17 Jul 2003.
40. Perelman G. Ricci flow with surgery on three-manifolds//arXiv:math/0303109, 10 Mar 2003.
41. Nair P.B., Abraham R.G. A Catalog of Detailed Visual Morphological Classifications for 14,034 Galaxies in the Sloan Digital Sky Survey// ApJS, 186, 2, pp. 427-456, 2010.
42. Lindblad P.O. The development of spiral structure in a galaxy approached by numerical computations// Sto. An., 21, 4, 1960.
43. Shu F.H. Six Decades of Spiral Density-Wave Theory// Ann. Rev. of Astronomy and Astrophysics, 54, 2016.