УДК 530.12+524.7

01.00.00 Физико-математические науки

ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА МНОГИХ ТЕЛ В ПОТОКАХ РИЧЧИ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D.
Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада

В настоящей работе исследована ограниченная задача трех и более тел в потоках Риччи в общей теории относительности. Выведена система нелинейных уравнений параболического типа, описывающая эволюцию аксиально-симметричных метрик в потоках Риччи. Развита модель, описывающая движение частиц в потоках Риччи. Показано, что теория, описывающая потоки Риччи в задаче многих тел согласуется с теорией Эйнштейна-Инфельда, описывающей динамику материальных частиц представленных сингулярностями гравитационного поля. В качестве примера рассматривается метрика, обладающая осевой симметрией и содержащая две сингулярности, имитирующие частицы конечной массы. Показано, что статическая метрика с двумя сингулярностями соответствует в теории Ньютона двум центрам тяготения, движущимся вокруг центра масс по круговым орбитам в неинерциальной системе отсчета, вращающейся с периодом обращения тел. Рассмотрена постановка задачи многих тел распределенных в начальный момент времени на оси симметрии системы. В численных расчетах изучены свойства гравитационных потенциалов в задаче об установлении статического состояния, при котором несколько сингулярностей сохраняют начальное положение на оси системы. Это достигается за счет релятивистских эффектов, не имеющих аналогов в теории тяготения Ньютона. Используя свойства релятивистских потенциалов, обоснован переход от релятивистской модели движения частиц к динамическим уравнениям в классической теории

Ключевые слова: ПРОБЛЕМА МНОГИХ ТЕЛ, ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ, ПОТОКИ РИЧЧИ

Doi: 10.21515/1990-4665-122-070

UDC 530.12+524.7

Physics and Math

RESTRICTED MANY-BODY PROBLEM IN THE RICCI FLOWS IN GENERAL RELATIVITY

Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.
Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada

In this article, the restricted problem of three and more bodies in the Ricci flow in the general theory of relativity considered. A system of non-linear parabolic equations describing the evolution of the axially symmetric metrics in the Ricci flow proposed. A model describing the motion of particles in the Ricci flow derived. It is shown that the theory describing the Ricci flow in the many-body problem is consistent with the Einstein-Infeld theory, which describes the dynamics of the material particles provided by the singularities of the gravitational field. As an example, consider the metric having axial symmetry and contains two singularities simulating particles of finite mass. It is shown that the static metric with two singularities corresponds to Newton's theory of the two centers of gravity, moving around the center of mass in circular orbits in a non-inertial frame of reference, rotating with a period of bodies. We consider the statement of the problem of many bodies distributed at the initial time on the axis of symmetry of the system. In numerical calculations, we studied the properties of the gravitational potential in the problem of establishing a static condition in which multiple singularities retain the initial position on the axis of the system. This is achieved due to relativistic effects, which have no analogues in Newton's theory of gravitation. Using the properties of relativistic potentials we have justified transition from the relativistic motion of the particles to the dynamic equations in the classic theory

Keywords: MANY-BODY PROBLEM, GENERAL RELATIVITY, RICCI FLOW.

Введение

Задача многих тел в общей теории относительности рассматривалась в работах [1-14] и других. В работе [2] была показано, что уравнений поля для пустого пространства достаточно для описания движения материи представленной в виде точечных сингулярностей. Следовательно, движение материальных частиц, представленных сингулярностями гравитационного поля, является одной из проблем общей теории относительности [2, 5-7]. В таком подходе используются только гравитационные уравнения в пустом пространстве. В другом подходе к описанию движения материальных тел используется тензор энергии-импульса [1, 4, 8-12]. Однако в этом случае теория обрастает большим числом гипотез, связанных с неопределенностью понятия материя, особенно в свете последних открытий в астрофизике, указывающих на значительный (95%) вклад темной материи и темной энергии в динамику расширяющейся Вселенной [14].

Как известно, для описания движения инертной материи в рамках общей теории относительности Эйнштейн и Инфельд сформулировали программу [6]: «Все попытки представить материю тензором энергии-импульса неудовлетворительны, и мы хотим освободить нашу теорию от специального выбора такого тензора. Поэтому мы будем иметь дело здесь только с гравитационными уравнениями в пустом пространстве, а материя будет представлена сингулярностями гравитационного поля».

В существующих подходах к описанию черных дыр широко используется метрика Шварцшильда [15], описывающая сингулярность гравитационного поля, что физически интерпретируется как поле частицы заданной массы.

В работе [16] исследовано движение релятивистских частиц в метрике с двумя центрами тяготения, представленных сингулярностями гравитационного поля. В работе [17] изучено слияние сингулярностей гравитационного поля в потоках Риччи в аксиально-симметричных метриках. Установлено, что в результате слияния частиц в потоках Риччи образуется устойчивая статическая система, состоящая из гравитационного поля и содержащая особенность, имитирующая частицу.

В численных экспериментах [17-18] было обнаружено, что столкновение частиц в потоках Риччи приводит к образованию гравитационных волн, похожих по своей структуре на волны, зарегистрированные в экспериментах [19-21]. Следовательно, можно предположить, что наблюдаемые гравитационные волны обусловлены, главным образом, переходными процессами, связанными с изменением метрики системы [17-21].

В работе [22] исследована задача о рождении материи при столкновении частиц, представленных сингулярностями гравитационного поля. В качестве примера рассматривается метрика [23], обладающая осевой симметрией и содержащая две сингулярности, имитирующие частицы конечной массы. В численных экспериментах установлено, что столкновение частиц в потоках Риччи приводит к образованию материи двух типов - с положительной и с отрицательной плотностью энергии соответственно.

В настоящей работе сформулирована ограниченная задача многих тел в потоках Риччи в общей теории относительности. Изучено расширение метрики [23] на случай трех [24] и более сингулярностей. Показано, что в случае ограниченной задачи трех тел метрика [23] с двумя сингулярностями соответствует в теории Ньютона двум центрам тяготения, движущимся вокруг центра масс по круговым орбитам в неинерциальной системе отсчета, вращающейся с периодом обращения тел.

Аксиально-симметрические поля

Уравнения Эйнштейна имеют вид [25-28]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = g_{\mu\nu}\Lambda + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1)$$

Здесь $R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса; Λ, G, c - космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно. Ниже положим $\Lambda = 0$, что обусловлено малостью влияния этого параметра в ограниченной задаче многих тел.

Решения уравнений Эйнштейна, обладающие осевой симметрией, рассматривались в работах [16-18, 22-27, 29-30] и других (обзор публикаций дан, например, в [26-27]). Метрика таких пространств, при некоторых предположениях, может быть приведена к виду

$$ds^2 = e^{\mu} dt^2 - e^{-\mu}(e^{\nu} d\rho^2 + e^{\nu} dz^2) - e^{-\mu}\rho^2 d\phi^2 \quad (2)$$

Здесь $\mu(\rho, z), \nu(\rho, z)$ - функции, удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна. Вычисляя компоненты тензора Эйнштейна $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$ в метрике (2) и полагая для вакуума

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 0,$$

находим уравнения поля:

$$
\begin{aligned}
&\omega_1 = \frac{\partial^2\mu}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\mu}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\mu}{\partial z^2} = 0,\\
&\omega_2 = \frac{\partial\nu}{\partial\rho} - \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right] = 0,\\
&\omega_3 = \frac{\partial\nu}{\partial z} - \rho\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\frac{\partial\mu}{\partial z} = 0,\\
&\omega_4 = \frac{\partial^2\nu}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2\nu}{\partial z^2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right] = 0.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Можно проверить, что не все уравнения (3) являются независимыми и что выполняются следующие два соотношения [26]

$$
\omega_4 \equiv \frac{\partial\omega_2}{\partial\rho} + \frac{\partial\omega_3}{\partial z} + \rho\omega_1\frac{\partial\mu}{\partial\rho}, \quad \rho\omega_1\frac{\partial\mu}{\partial z} \equiv \frac{\partial\omega_2}{\partial z} - \frac{\partial\omega_3}{\partial\rho} \tag{4}
$$

Следовательно, можно в качестве системы уравнений для определения двух функций $\mu(\rho,z),\nu(\rho,z)$ выбрать, например, первое и четвертое уравнения (3), имеем

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\mu}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\mu}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\mu}{\partial z^2} = 0,\\
&\frac{\partial^2\nu}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2\nu}{\partial z^2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right] = 0.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Разрешая систему уравнений (5) приходим к определению статических полей гравитации в случае осевой симметрии. Отметим, что в нерелятивистском пределе потенциал $\mu = 2\varphi / c^2$, где φ - гравитационный потенциал в теории гравитации Ньютона. Из второго уравнения (5) находим оценку $\nu \sim \mu^2 = 4\varphi^2 / c^4$.

Рассмотрим решения системы уравнений (3) вида

$$\mu = -\frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} - \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} + a \ln \rho,$$
$$\nu = -\frac{m_1^{\ 2} \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_1)^2)^2} - \frac{a m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} - \frac{m_2^{\ 2} \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_2)^2)^2} - \frac{a m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} \quad (6)$$
$$+ \frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} \frac{(\rho^2 + (z - L_1)(z - L_2))}{(L_1 - L_2)^2} + \frac{a^2}{2} \ln \rho$$

В частном случае, полагая в (6) $a = 0$, приходим к выражению потенциалов, впервые полученных в работе [23]

$$\mu_S(\rho, z, L_1, L_2) = -\frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} - \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}},$$
$$\nu_S(\rho, z, L_1, L_2) = -\frac{m_1^{\ 2} \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_1)^2)^2} - \frac{m_2^{\ 2} \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_2)^2)^2} + \quad (7)$$
$$\frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} \frac{(\rho^2 + (z - L_1)(z - L_2))}{(L_1 - L_2)^2} - \frac{m_1 m_2}{(L_1 - L_2)^2}$$

Поскольку выражения (7) используются в численных расчетах, мы добавили ко второму потенциалу константу, с целью исключить особенность, возникающую при условии $L_1 = L_2$.

Отметим, что выражения (7) подверглись критике со стороны Эйнштейна и Розена [30], как лишенные физического смысла. Действительно, в нерелятивистском случае потенциал μ в (7) сводится к выражению $\mu = 2\varphi / c^2$, где φ - гравитационный потенциал в теории гравитации Ньютона. Но тогда этот потенциал сводится к потенциалу двух точечных масс $m_{1,2}$, расположенных на оси симметрии системы в точках $z = L_{1,2}$.

Поскольку точечные массы $m_{1,2}$ в метрике (2) не испытываю взаимного перемещения, хотя должны притягиваться согласно теории Ньютона, автор [23] делает ошибочный вывод, что не верна теория относительности Эйнштейна. В действительности, однако, в теории Ньютона существует статическое решение для двух тяготеющих масс, движущихся по круговым орбитам в синодической системе координат - неинерциальной системе отсчета вращающейся синхронно с периодом обращения тел [31-32].

Как известно, синодическая система координат применяется в постановках ограниченной задачи трех тел в классической механике [31-32], что может быть использовано в формулировке аналогичной задачи в общей теории относительности. Различие же этих двух задач заключается в наличии потенциала ν, который не имеет аналогов в теории Ньютона, но играет роль аналогичную эффектам неинерциальной системы отсчета в классической механике.

Полагая в (12) $m_1 = m, L_1 = 0, m_2 = 0$, получим

$$\mu = -\frac{m}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + a\ln\rho,$$
$$\nu = -\frac{m^2\rho^2}{4(\rho^2 + z^2)^2} - \frac{am}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \frac{a^2}{2}\ln\rho \tag{8}$$

Отметим, что выражение потенциала μ в форме (8) согласуется с выражением гравитационного потенциала, полученным в нерелятивистском приближении путем обработки данных для 50 галактик [29]. Поэтому выражения (6)-(8) представляют интерес в теории движения, столкновения и слияния частиц, представленных сингулярностями поля в потоках Риччи, с излучением гравитационных волн [16-18].

Рассмотрим решение первого уравнения, содержащее N сингулярностей на оси, имеем

$$\mu = -\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_i)^2}} \tag{9}$$

Определение второго потенциала системы (5) для заданной функции (9) не представляет труда, но соответствующие выражения получаются довольно громоздкими, поэтому здесь не приводятся. Отметим, что в частном случае трех тел потенциал ν был получен в работе [24].

Динамика релятивистских частиц

Движение релятивистских частиц в гравитационном поле в общем случае описывается уравнением

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}=0 \tag{10}$$

Γ^i_{kl} – символы Кристоффеля второго рода. Символы Кристоффеля вычисляются в метрике (2) согласно

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{10}=\frac{\mu_\rho}{2},\Gamma^0_{20}=\frac{\mu_z}{2},\\
&\Gamma^1_{00}=\frac{\mu_\rho}{2}e^{2\mu-\nu},\Gamma^1_{11}=\frac{\nu_\rho-\mu_\rho}{2},\Gamma^1_{21}=\frac{\nu_z-\mu_z}{2},\Gamma^1_{22}=\frac{-\nu_\rho+\mu_\rho}{2},\Gamma^1_{33}=\frac{\rho\mu_\rho-2}{2}re^{-\nu},\\
&\Gamma^2_{00}=\frac{\mu_z}{2}e^{2\mu-\nu},\Gamma^2_{11}=\frac{-\nu_z+\mu_z}{2},\Gamma^2_{21}=\frac{\nu_\rho-\mu_\rho}{2},\ \Gamma^2_{22}=\frac{\nu_z-\mu_z}{2},\Gamma^2_{33}=\frac{\rho^2\mu_z}{2}e^{-\nu},\\
&\Gamma^3_{31}=\frac{1}{\rho}-\frac{\mu_\rho}{2},\Gamma^3_{32}=-\frac{\mu_z}{2}
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь индексы 0,1,2,3 соответствуют координатам t,ρ,z,ϕ.

Определим ковариантные компоненты скорости $\mathbf{v}$ как трехмерного вектора согласно [28]

$$\mathrm{v}_\alpha=\gamma_{\alpha\beta}\mathrm{v}^\beta,\quad \gamma_{\alpha\beta}=-g_{\alpha\beta}+\frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \tag{12}$$

Здесь индексы $\alpha,\beta=1,2,3.$

Как известно, при движении частицы в постоянном поле сохраняется полная энергия

$$E_0=\frac{m_0c^2\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}} \tag{13}$$

Система уравнений (10) с учетом выражений (11) и (6) решалась численно в работе [16]. Для нахождения устойчивых орбит начальные данные задавались исходя из решения аналогичной задачи в метрике Шварцшильда. Как известно, радиус ближайшей к центру устойчивой круговой орбит в метрике Шварцшильда и ее момент определяются величиной гравитационного радиуса, $r_g = 2Gm/c^2$, а энергия частицы на такой орбите не зависит от геометрических параметров, имеем [28]:

$$r = 3r_g, \quad M = \sqrt{3}m_0 c r_g, \quad E_0 = \frac{m_0 c^2 \sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}} = \sqrt{\frac{8}{9}} m_0 c^2 \approx 0.942809 m_0 c^2 \tag{14}$$

Здесь m_0- масса частицы. На рис. 1 приведены типичные траектории движения релятивистских частиц в метрике (2) с потенциалами (12), вычисленные для начальных данных:

$$\begin{aligned} &a = 0, m_1 = m_2 = 2, L_1 = -L_2 = 1, \\ &t(0) = 0, t'(0) = 1.89011, \rho(0) = 6, \rho'(0) = 0, \\ &z(0) = 1, z'(0) = 0, \phi(0) = 0, \phi'(0) = 0.0593t'(0) \end{aligned} \tag{15}$$

Отметим, что задание производной собственного времени позволяет синхронизовать время с параметром s, вдоль которого определяется решение системы уравнений (16).

Траектории частицы представляют собой навитые на центральное ядро кривые сильно вытянутые в плоскости ортогональной оси симметрии системы. Задавая начальные данные (15) в виде $\rho(0) = 3(L_1 - L_2)$, находим, что радиальная координата изменяется в широких пределах $6 \le \rho \le 140$ - рис. 1. Однако при отклонении от начальных данных $\rho(0) = 3(L_1 - L_2)$ более чем на 1% частица в своем движении удаляется от центра на значительно расстояние. Энергия частицы сохраняется в численных расчетах с точностью 10^{-6}, а по величине превосходит энергию на устойчивых круговых орбитах в метрике

Шварцшильда вычисленной согласно (13). Скорость частицы достигает величины $v/c \approx 0.7$ [16].

Заметим, что данные на рис. 1 соответствуют решению ограниченной задачи трех тел. Действительно потенциал (6) при условии $a = 0$ описывает поле двух центров тяготения. В отличие от классической ограниченной задачи трех тел [31-32], в которой для упрощения задачи необходимо осуществить переход в неинерциальную систему координат, метрика (2) изначально является статической, а используемая система координат не является инерциальной по определению.

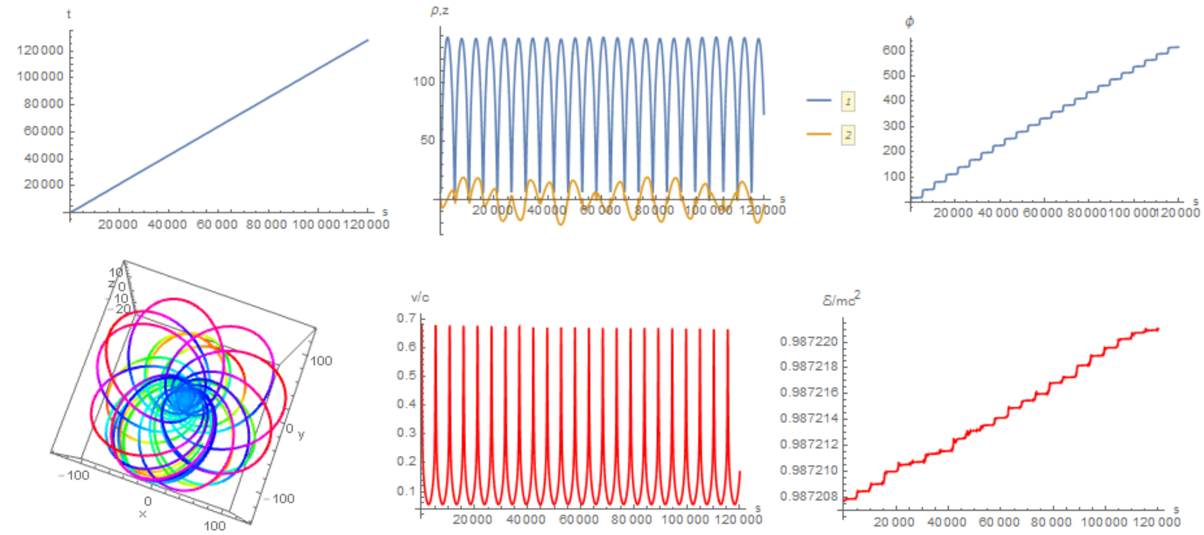

Рис. 1. Траектории частиц в метрике (2), полученные путем численного решения системы уравнений (10) с потенциалами (6) и с начальными данными (15).

Более того, как это следует из выражений (7), у метрики Зильберштейна, например, нет нерелятивистского предела, поскольку потенциалы этой метрики содержат сингулярности. В метрике же (6), содержащей логарифмическое слагаемое, потенциалы имеют один порядок величины $\nu \approx \mu$. Поэтому переход к теории Ньютона является проблематичным в указанных метриках. Тем не менее, такой переход был построен в [29, 33] путем формального разложения уравнений по малому параметру $\nu \sim \mu^2 = 4\varphi^2 / c^4$.

Рассмотрим уравнения движения (10) с коэффициентами аффинной связности (11), в общем случае имеем:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds}\frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{dt}{ds}\frac{dz}{ds}\frac{\partial \mu}{\partial z} = 0,\\
&\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{e^{2\mu-\nu}}{2} t_s^2 \mu_r + \frac{e^{-\nu}}{2} r\phi_s^2 (r\mu_r - 2) + r_s z_s (\nu_z - \mu_z) + \frac{z_s^2}{2}(\mu_r - \nu_r) - \frac{r_s^2}{2}(\mu_r - \nu_r) = 0,\\
&\frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{e^{-\nu}}{2}(e^{2\mu} t_s^2 + r^2 \phi_s^2)\mu_z + r_s z_s (\nu_r - \mu_r) - \frac{z_s^2}{2}(\mu_z - \nu_z) + \frac{r_s^2}{2}(\mu_z - \nu_z) = 0,\\
&\frac{d^2 \phi}{ds^2} - \frac{\phi_s}{r}(r z_s \mu_z + r_s (r\mu_r - 2)) = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $r = \rho, t_s = dt/ds, r_s = dr/ds, z_s = dz/dz, \phi_s = d\phi/ds$. Построим формальное разложение уравнений (16) по малому параметру $\nu \sim \mu^2 << 1$, в первом приближении имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds}\frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{dt}{ds}\frac{dz}{ds}\frac{\partial \mu}{\partial z} = 0,\\
&\frac{d^2 r}{ds^2} - r\phi_s^2 - \frac{dz}{ds}\frac{dr}{ds}\frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{1}{2}(t_s^2 + z_s^2 + r^2\phi_s^2 - r_s^2)\frac{\partial \mu}{\partial r} = 0,\\
&\frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{dr}{ds}\frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{1}{2}(t_s^2 - z_s^2 + r^2\phi_s^2 + r_s^2)\frac{\partial \mu}{\partial z} = 0,\\
&\frac{d^2 \phi}{ds^2} - \frac{\phi_s}{r}(r z_s \mu_z + r_s (r\mu_r - 2)) = 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Система уравнений (17) решалась численно с потенциалом (9) и с начальными данными

$$\begin{aligned}
&m_i = 10^{-3},\ L_i = 6 + 4\cos(i\pi/35), \quad i = 1,...,70 \\
&t(0) = 0,\ t'(0) = 1,\ \rho(0) = 2.3,\ \rho'(0) = 0.01, \\
&z(0) = 3,\ z'(0) = 0,\ \phi(0) = 0,\ \phi'(0) = 0.001
\end{aligned} \tag{18}$$

Результаты расчетов приведены на рис. 2. Из анализа данных и из общих соображений следует, что в нерелятивистской теории необходимо положить в уравнениях (17) $t_s = 1$, а все тройные произведения положить равными нулю.

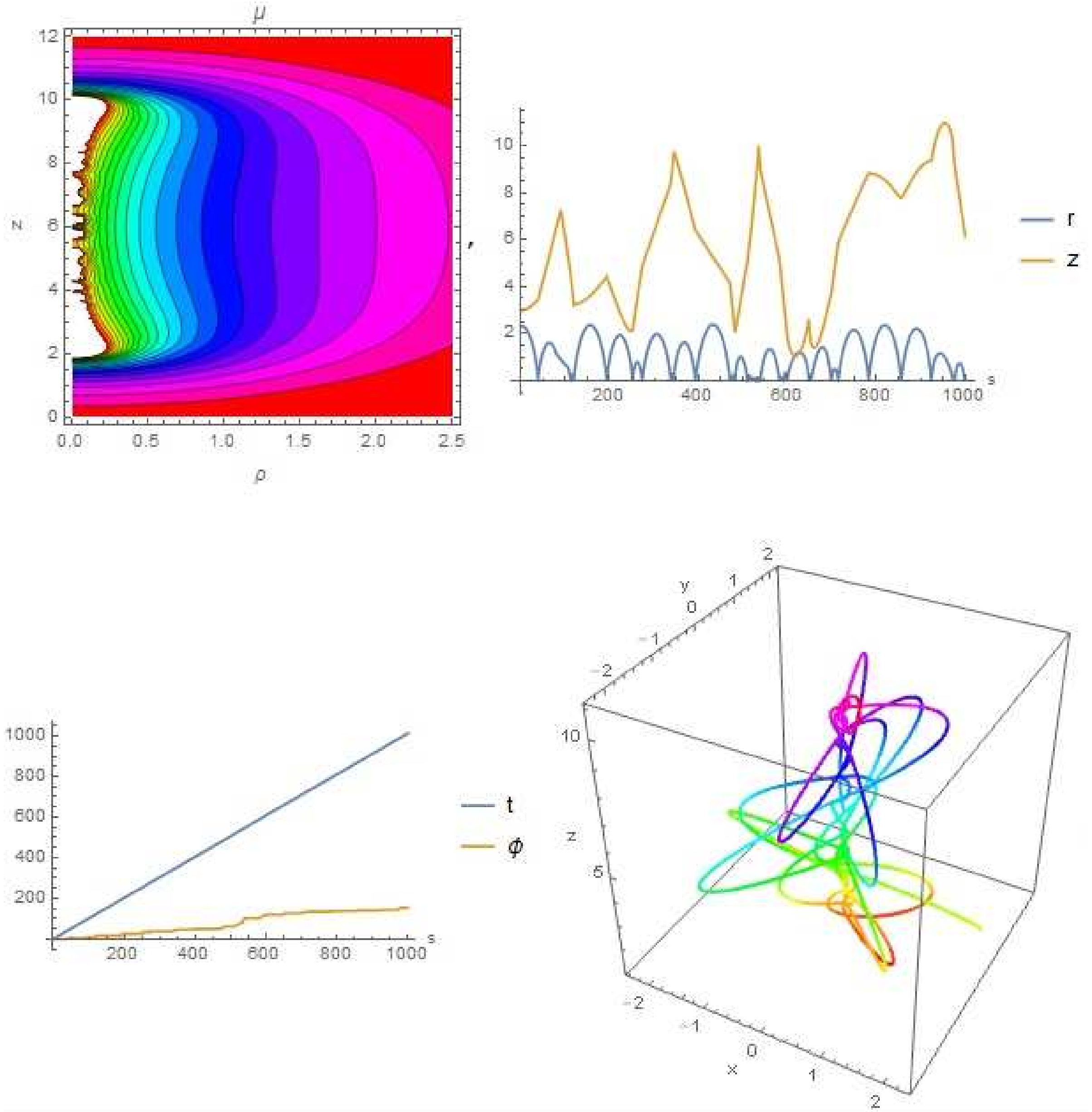

Рис. 2. Линии уровня функции $\mu(r,z)$ и траектории частиц в метрике (2), полученные путем численного интегрирования системы уравнений (17) с потенциалом (9) и с начальными данными (18).

В результате этих упрощений находим систему уравнений, описывающих динамику частицы во внешнем гравитационном поле в теории Ньютона

$$t=s,\quad \frac{d^2r}{ds^2}-r\phi_s^2+\frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial r}=0,$$
$$\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial z}=0,\quad \frac{d^2\phi}{ds^2}+\frac{2\phi_s r_s}{r}=0. \tag{19}$$

Здесь мы можем восстановить размерность времени, полагая $s=ct$ и учесть, что в нерелятивистском случае потенциал μ в (19) сводится к выражению $\mu=2\varphi/c^2$, где φ - гравитационный потенциал в теории гравитации Ньютона. Учитывая, что последнее уравнение (19) имеет первый интеграл, находим окончательно

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\phi_t^2+\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,\quad r^2\phi_t=const. \tag{20}$$

В классической механике систему уравнений (20) упрощают, оставляя только первое и последнее уравнения

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\phi_t^2+\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0,\quad r^2\phi_t=const. \tag{21}$$

Таким образом, мы показали, что система уравнений (16), описывающих динамику релятивистских частиц в метрике (2) может быть сведена к стандартной модели классической механики (21), описывающей динамику нерелятивистских частиц в центрально-симметрическом поле. Однако при этом метрика (2) с потенциалами (6), (7), (8) или (9) не сводится к галилеевой метрике, что обусловлено наличием сингулярностей [16-18].

Основное свойство метрики (2) заключается в том, что система N тел представляется как статическая система, что достигается за счет релятивистских эффектов, которые обеспечиваются вторым потенциалом системы (5), не имеющим аналогов в теории Ньютона. Используя это свойство метрики (2), можно сформулировать ограниченную задачу $N+1$ тел как движение одного тела в статической системе N тел, обладающей, например, потенциалом (9). В этом случае постановка ограниченной задачи для $N+1$ тел в теории тяготения Ньютона сводится к решению системы уравнений (20) с потенциалом (9).

В частном случае, в первом приближении по малому параметру $\nu \sim \mu^2 << 1$, можно использовать систему уравнений (17) и соответствующую постановку задачи (18) – рис.2. В общем случае следует использовать систему уравнений (16) и постановку задачи типа (15) – рис. 1.

Модель (5) обладает уникальным свойством расширения в теории потоков Риччи [17-18, 22], что позволяет задавать движение в системе N тел. В этом случае гравитационные потенциалы в системах уравнений (16), (17) и (20) зависят от времени по заданному закону. Рассмотрим эти вопросы более подробно.

Движение сингулярностей в потоках Риччи

Для моделирования изменения метрики при движении сингулярностей используем потоки Риччи [34-41], которые описываются уравнением

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial t} = D_0 R_{ik} \tag{22}$$

Здесь D_0 – коэффициент диффузии, которые в стандартной теории [34-41] полагают равным $D_0 = -2$, однако в метрике (2) следует положить $D_0 = 2$, тогда (5) сводится к системе уравнений параболического типа:

$$\begin{aligned} e^{\nu-\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \\ e^{\nu-\mu}\frac{\partial \nu}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \nu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{23}$$

Сравнивая (23) и (5) находим, что для установившихся потоков при условиях $\mu_t = \nu_t = 0$ система (23) сводится к (5). Обоснованием для такого перехода от статической системы (5) к системе уравнений параболического типа (23) может служить теория, развитая в работах [34-41] и других, а также теория геометрической турбулентности [42-43].

Физический смысл расширения статической модели (5) до модели (23), описывающей потоки Риччи, заключается в том, что по начальным и граничным условиям можно определить к каким решениям сходится решение системы уравнений (5), содержащее особенности, например, решение (9).

С точки зрения теории Эйнштейна и Инфельда [5-6], движение частиц в потоках Риччи равносильно нулевому приближению, при котором частицы движутся свободно, создавая гравитационное поле. В следующем приближении между частицами возникает сила взаимодействия, которая изменяет параметры движения и т.д. Однако для многих практически важных задач, таких как слияние черных дыр [17-22], достаточно будет знать, как изменяется метрика бинарной системы при сближении центров гравитации с заданной скоростью. Модель потоков Риччи (23) позволяет ответить на этот и другие вопросы, связанные с изменением метрики.

Рассмотрим задачу об установлении потенциалов системы (23) в прямоугольной области $\rho \le R, -L/2 \le z \le L/2$ при заданном начальном условии

$$t = 0 : \mu(0, \rho, z) = \mu_0(\rho, z, \{m_i, L_i\}) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_i)^2}}, \quad \nu = 0 \tag{24}$$

Тем самым можно получить оценку величины второго потенциала для системы тел. Решение будет зависеть от краевых условий, которые мы сформулируем следующим образом:

$$\begin{aligned}
&t>0: \mu(t,r_0,z)=\mu_0(r_0,z,\{m_i,L_i\}), \quad \nu(t,r_0,z)=0,\\
&\mu(t,R,z)=\mu_0(R,z,\{m_i,L_i\}), \quad \nu(t,R,z)=0,\\
&\mu(t,\rho,-L/2)=\mu_0(\rho,-L/2,\{m_i,L_i\}), \quad \nu(t,\rho,-L/2)=0,\\
&\mu(t,\rho,L/2)=\mu_0(\rho,L/2,\{m_i,L_i\}), \quad \nu(t,\rho,L/2)=0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Здесь r_0- граница области, отделяющая область численного интегрирования от оси системы, содержащей сингулярные точки потенциала (9). Такая постановка задачи позволяет исключить сингулярности в решениях для второго потенциала системы, что, в свою очередь, дает возможность оценить малый параметр $\nu \sim \mu^2 << 1$.

На рис. 3-5 представлены результаты моделирования установления потенциалов в потоках Риччи, выполненные по (23), (24) и (25) при следующих значениях параметров:

$$\sum_{i=1}^{7} m_i = 0.000145596, \; r_0 = 10^{-2}, R = 2, \quad L = 4. \tag{26}$$

В этом примере 7 сингулярностей распределены случайным образом на оси системы. На рис. 3-4 показан процесс установления потенциалов в различных точках, указанных над рисунками. На рис. 5 представлены линии уровня функции $|\nu/\mu|$- модуля отношения потенциалов, в различные моменты времени, указанные над рисунками. Из приведенных данных следует, что потенциалы системы стремятся в каждой точке к некоторым значениям, а модуль отношения потенциалов нигде не превышает 0.0008, т.е. условие $\nu \sim \mu^2 << 1$ действительно выполняется. Отметим, что данные (26) являются типичными для звездных систем с параметрами Солнечной системы.

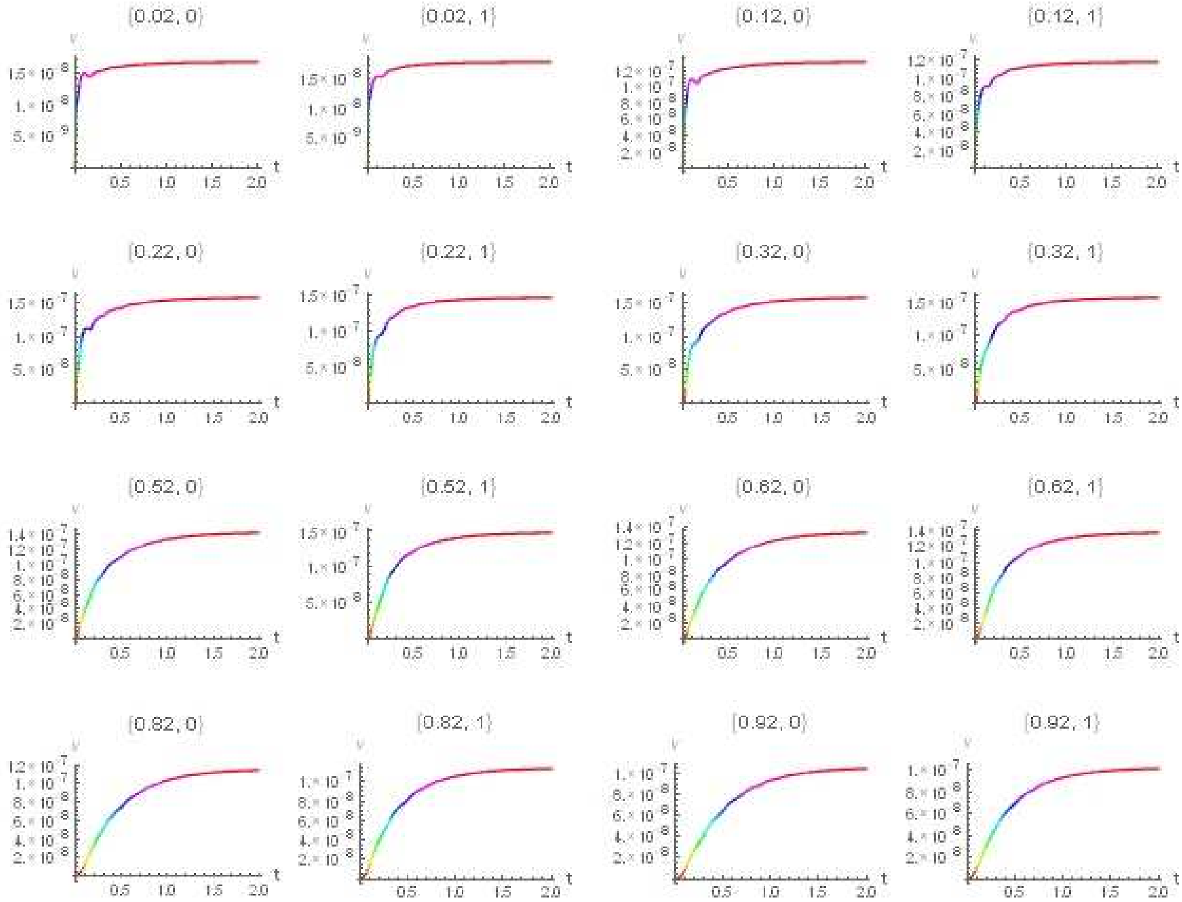

Рис. 3. Зависимости функции ν от времени в различных точках $\{\rho, z\}$(координаты точек указаны над рисунками) в системе, состоящей из семи сингулярностей с суммарной массой $\sum_{i=1}^{7} m_i = 0.000145596.$

На рис. 6. представлены результаты расчетов модуля отношения потенциалов в различные моменты времени, указанные над рисунками выполненные по (23), (24) и (25) при следующих значениях параметров:

$$\sum_{i=1}^{7} m_i = 0.00164191, \quad r_0 = 10^{-2}, \; R = 2, \quad L = 4. \qquad (27)$$

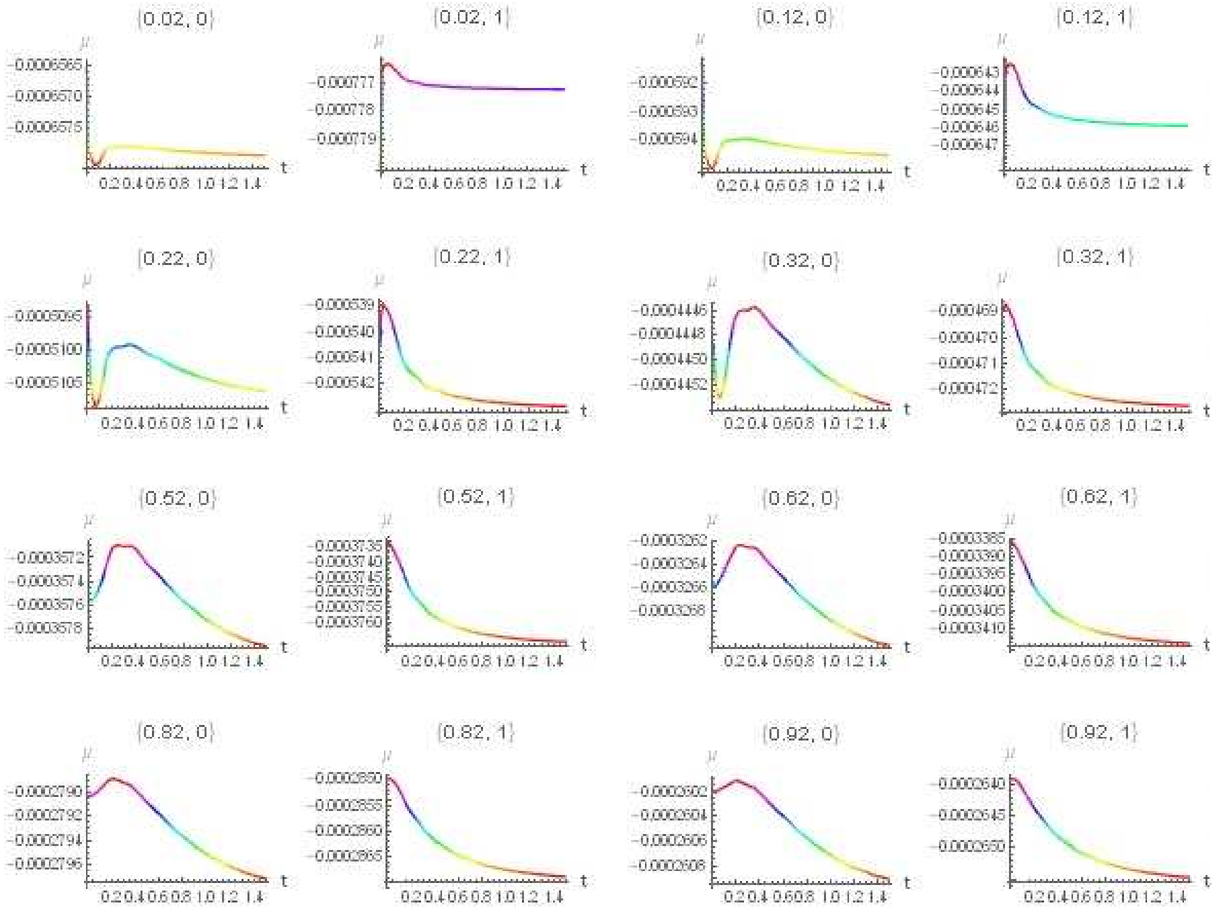

Рис. 4. Зависимости функции μ от времени в различных точках $\{\rho, z\}$(координаты точек указаны над рисунками) в системе, состоящей из семи сингулярностей с суммарной массой $\sum_{i=1}^{7} m_i = 0.000145596.$

Из сравнения данных на рис. 5 и 6 следует, что при увеличении суммарной массы системы на порядок модуль отношения потенциалов $|\nu / \mu|$ также возрастает на порядок. Из приведенных на рис. 6 данных следует, что модуль отношения потенциалов нигде не превышает 0.01, т.е. условие $\nu \sim \mu^2 << 1$ выполняется и в этом случае.

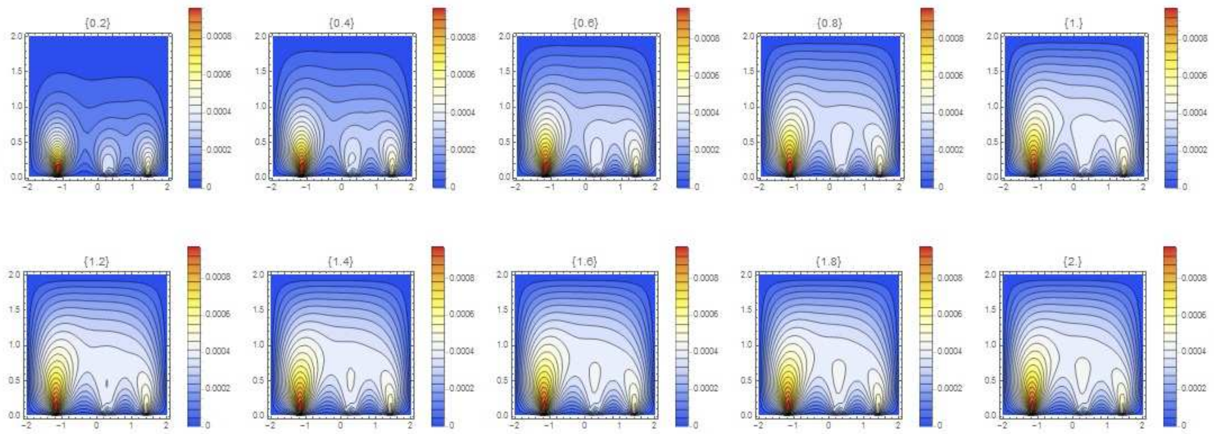

Рис. 5. Линии уровня функции $|\nu / \mu|$ - модуля отношения потенциалов, в различные моменты времени в задаче с данными (26): значения параметра времени t указаны над рисунками.

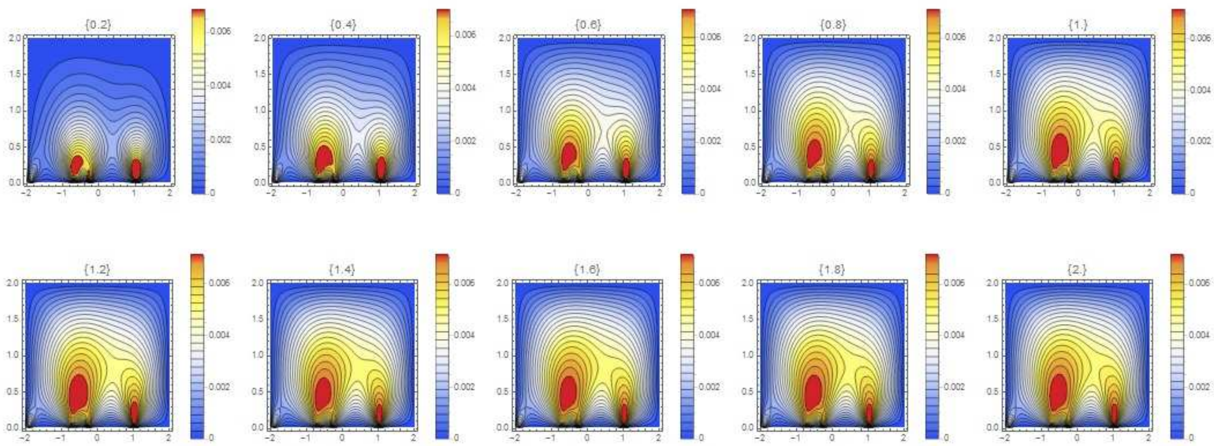

Рис. 6. Линии уровня функции $|\nu / \mu|$ - модуля отношения потенциалов, в различные моменты времени в задаче с данными (27): значения параметра времени t указаны над рисунками.

Следовательно, система уравнений (23), описывающая потоки Риччи, позволяет смоделировать гравитационные потенциалы системы многих тел при заданном их положении. В частности, например, можно задать движение сингулярностей и определить возникающие при этом движении гравитационные волны [17-18]. Другое применение теории потоков Риччи было указано в работе [22], где была определена плотность материи, возникающей при столкновении сингулярностей.

Представляет интерес также определение потенциалов при орбитальном движении тел. Для этого достаточно будет предположить, что все тела движутся в одной плоскости из некоторого начального положения на оси симметрии с составляющей скорости перпендикулярной оси. Тогда систему уравнений (23) можно использовать для оценки релятивистских эффектов, обусловленных движением сингулярностей. Однако решение этой задачи выходит за рамки настоящей работы.

Библиографический список

1. Levi-Civita. The Relativistic Problem of Several Bodies// Am. Journal of Math, 59, no 1, 9-22, 1937.
2. Einstein A., Infeld L., Hoffmann B. Gravitational Equations and Problems of Motion//Ann. Math., 39, 65-100, 1938.
3. Eddington A. S., Clark G. L. The Problem of N Bodies in General Relativity. Theory// Proc. Roy. Soc. A 166, 465, 1938.
4. Фок В.А. О движении конечных масс в общей теории относительности// ЖЭТФ, 9, №4, 375, 1939.
5. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and Problems of Motion II//Ann. Math., 41, 455-564, 1940.
6. Einstein A., Infeld L. On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1, 209—241, 1949.
7. Infeld L., Plebansky J. Motion and Relativity.- Pergamon Press, NY, 1960.
8. Papapetrou A. Equations of Motion in General Relativity// Proc. Phys. Soc. A 64, 57, 1951.
9. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: ГИТЛ, 1956.
10. Levi-Civita T. The n–Body Problem in General Relativity. – Springer, 1964.
11. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. – М.: Наука, 1972.
12. Рябушко А.П. Движение тел в общей теории относительности – Мн.: Вышэйшая школа, 1979.

13. Musielak Z.E., Quarles B. The three-body problem// arXiv:1508.02312v1, 10 Aug 2015.

14. P.A.R. Ade et al. [Plank Collaboration]. Plank 2013 results. XVI. Cosmological parameters// arXiv:1303.5076; Linde A. Inflationary cosmology after Planck 2013//arXiv:1402.0526, 2014.

15. Schwarzschild K. Uber das Gravitations-feld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie// Sitzungsberichte der K¨oniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse, 189–196 (1916); On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory//arXiv: physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 May 1999.

16. Трунев А.П. Динамика релятивистских частиц в метрике галактик / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №02(116). С. 1619 – 1641. – IDA [article ID]: 1161602101. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/02/pdf/101.pdf.

17. Трунев А.П. Столкновение частиц в потоках Риччи / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №07(121). С. 1787 – 1808. – IDA [article ID]: 1211607111. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/111.pdf.

18. Трунев А.П. Гравитационные волны в потоках Риччи при слиянии сингулярностей / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №07(121). С. 1907 – 1928. – IDA [article ID]: 1211607121. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/121.pdf.

19. Abbott B.P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger// Phys. Rev. Let., PRL 116, 061102, 12 Feb., 2016.

20. Abbott B.P. et al. Properties of the binary black hole merger GW150914/The LIGO Scientific Collaboration and The Virgo Collaboration, 11 Feb 2016; arXiv:1602.03840.

21. Abbott B.P. et al. The basic physics of the binary black hole merger GW150914/The LIGO Scientific Collaboration and The Virgo Collaboration, Aug 5 2016; arXiv:1608.01940.

22. Трунев А.П. Рождение материи при столкновении сингулярностей в потоках Риччи/ А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №08(122).

23. Silberstein L. Two-Centers Solution of the Gravitational Field Equations, and the Need for a Reformed Theory of Matter//Phys. Rev. 49, 268, 1936.

24. Dexter J. Booth. A static three-center solution to Einstein's gravitational field equations//International Journal of Theoretical Physics, December 1975, Volume 14, Issue 6, pp 361-366.

25. Synge J.L. Relativity: the General Theory. - Amsterdam, 1960.

26. Petrov A.Z. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.

27. Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, Eduard Herltet. Exact Solutions to Einstein's Field Equations. Second Edition. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46136-7, 2003.

28. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). Pergamon Press. ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.

29. Трунев А.П. Общая теория относительности и метрика галактик / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №10(094). С. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf

30. Einstein A., Rosen N. Two-Body Problem in General Relativity Theory//Phys. Rev. 49, 404 – Published 1 March 1936.

31. Пуанкаре А. Лекции по небесной механике. – М., Наука, 1965.

32. Szebehely V. Theory of Orbits: Restricted Problem of Three Bodies. – Academic Press, NY, 1967.

33. Трунев А.П. Динамика частиц в метрике с логарифмическим потенциалом / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №06(120). С. 1067 – 1092. – IDA [article ID]: 1201606070. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/06/pdf/70.pdf

34. Hamilton R.S. Three manifolds with positive Ricci curvature// Jour. Diff. Geom. 17, 255-306, 1982.

35. Hamilton R.S. Four manifolds with positive curvature operator. Jour. Diff. Geom. 24, 153-179, 1986.

36. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces// Contemp. Math. 71, 237-261, 1988.

37. Hamilton R.S. The Harnack estimate for the Ricci flow// Jour. Diff. Geom. 37, 225-243, 1993.

38. Hamilton R.S. A compactness property for solutions of the Ricci flow// Amer. Jour. Math. 117, 545-572, 1995.

39. Perelman G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications// arXiv:math/0211159, 11 Nov 2002.

40. Perelman G. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds//arXiv:math/0307245, 17 Jul 2003.

41. Perelman G. Ricci flow with surgery on three-manifolds//arXiv:math/0303109, 10 Mar 2003.

42. Трунев А.П. Геометрическая турбулентность / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №05(099). С. 1003 – 1023. – IDA [article ID]: 0991405069. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/05/pdf/69.pdf

43. Трунев А.П. Геометрическая турбулентность и квантовая теория. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 с.

References

1. Levi-Civita. The Relativistic Problem of Several Bodies// Am. Journal of Math, 59, no 1, 9-22, 1937.

2. Einstein A., Infeld L., Hoffmann B. Gravitational Equations and Problems of Motion//Ann. Math., 39, 65-100, 1938.

3. Eddington A. S., Clark G. L. The Problem of N Bodies in General Relativity. Theory// Proc. Roy. Soc. A 166, 465, 1938.

4. Fok V.A. O dvizhenii konechnyh mass v obshhej teorii otnositel'nosti// ZhJeTF, 9, №4, 375, 1939.
5. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and Problems of Motion II//Ann. Math., 41, 455-564, 1940.
6. Einstein A., Infeld L. On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1, 209—241, 1949.
7. Infeld L., Plebansky J. Motion and Relativity.- Pergamon Press, NY, 1960.
8. Papapetrou A. Equations of Motion in General Relativity// Proc. Phys. Soc. A 64, 57, 1951.
9. Fok V.A. Teorija prostranstva, vremeni i tjagotenija. – M.: GITL, 1956.
10. Levi-Civita T. The n–Body Problem in General Relativity. – Springer, 1964.
11. Brumberg V.A. Reljativistskaja nebesnaja mehanika. – M.: Nauka, 1972.
12. Rjabushko A.P. Dvizhenie tel v obshhej teorii otnositel'nosti – Mn.: Vyshjejshaja shkola, 1979.
13. Musielak Z.E., Quarles B. The three-body problem// arXiv:1508.02312v1, 10 Aug 2015.
14. P.A.R. Ade et al. [Plank Collaboration]. Plank 2013 results. XVI. Cosmological parameters// arXiv:1303.5076; Linde A. Inflationary cosmology after Planck 2013//arXiv:1402.0526, 2014.
15. Schwarzschild K. Uber das Gravitations-feld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie// Sitzungsberichte der K¨oniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse, 189–196 (1916); On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory//arXiv: physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 May 1999.
16. Trunev A.P. Dinamika reljativistskih chastic v metrike galaktik / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №02(116). S. 1619 – 1641. – IDA [article ID]: 1161602101. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/02/pdf/101.pdf.
17. Trunev A.P. Stolknovenie chastic v potokah Richchi / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №07(121). S. 1787 – 1808. – IDA [article ID]: 1211607111. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/111.pdf.
18. Trunev A.P. Gravitacionnye volny v potokah Richchi pri slijanii singuljarnostej / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №07(121). S. 1907 – 1928. – IDA [article ID]: 1211607121. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/121.pdf.
19. Abbott B.P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger// Phys. Rev. Let., PRL 116, 061102, 12 Feb., 2016.
20. Abbott B.P. et al. Properties of the binary black hole merger GW150914/The LIGO Scientific Collaboration and The Virgo Collaboration, 11 Feb 2016; arXiv:1602.03840.
21. Abbott B.P. et al. The basic physics of the binary black hole merger GW150914/The LIGO Scientific Collaboration and The Virgo Collaboration, Aug 5 2016; arXiv:1608.01940.
22. Trunev A.P. Rozhdenie materii pri stolknovenii singuljarnostej v potokah Richchi/ A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo

gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №08(122).

23. Silberstein L. Two-Centers Solution of the Gravitational Field Equations, and the Need for a Reformed Theory of Matter//Phys. Rev. 49, 268, 1936.

24. Dexter J. Booth. A static three-center solution to Einstein's gravitational field equations//International Journal of Theoretical Physics, December 1975, Volume 14, Issue 6, pp 361-366.

25. Synge J.L. Relativity: the General Theory. - Amsterdam, 1960.

26. Petrov A.Z. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.

27. Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, Eduard Herltet. Exact Solutions to Einstein's Field Equations. Second Edition. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46136-7, 2003.

28. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). Pergamon Press. ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.

29. Trunev A.P. Obshhaja teorija otnositel'nosti i metrika galaktik / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №10(094). S. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf

30. Einstein A., Rosen N. Two-Body Problem in General Relativity Theory//Phys. Rev. 49, 404 – Published 1 March 1936.

31. Puankare A. Lekcii po nebesnoj mehanike. – M., Nauka, 1965.

32. Szebehely V. Theory of Orbits: Restricted Problem of Three Bodies. – Academic Press, NY, 1967.

33. Trunev A.P. Dinamika chastic v metrike s logarifmicheskim potencialom / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №06(120). S. 1067 – 1092. – IDA [article ID]: 1201606070. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/06/pdf/70.pdf

34. Hamilton R.S. Three manifolds with positive Ricci curvature// Jour. Diff. Geom. 17, 255-306, 1982.

35. Hamilton R.S. Four manifolds with positive curvature operator. Jour. Diff. Geom. 24, 153-179, 1986.

36. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces// Contemp. Math. 71, 237-261, 1988.

37. Hamilton R.S. The Harnack estimate for the Ricci flow// Jour. Diff. Geom. 37, 225-243, 1993.

38. Hamilton R.S. A compactness property for solutions of the Ricci flow// Amer. Jour. Math. 117, 545-572, 1995.

39. Perelman G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications// arXiv:math/0211159, 11 Nov 2002.

40. Perelman G. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds//arXiv:math/0307245, 17 Jul 2003.

41. Perelman G. Ricci flow with surgery on three-manifolds//arXiv:math/0303109, 10 Mar 2003.

42. Trunev A.P. Geometricheskaja turbulentnost' / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №05(099). S. 1003 –

1023. – IDA [article ID]: 0991405069. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2014/05/pdf/69.pdf

43. Trunev A.P. Geometricheskaja turbulentnost' i kvantovaja teorija. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 s.