

УДК 539.3

UDC 539.3

01.00.00 Физико-математические науки

Physical and mathematical sciences

**К МЕТОДАМ ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗЛОМОВ  
В УСЛОВИЯХ ВИБРАЦИОННЫХ  
ВОЗДЕЙСТВИЙ****TO THE RESEARCH METHODS OF FAULTS  
UNDER THE VIBRATION IMPACTS**

Колесников Максим Николаевич  
канд. физ.-мат. наук,  
РИНЦ SPIN-code: 4685-8832  
Старший специалист по интеграции с внешними  
системами  
*ЦК Hyperion, Кавказский филиал ПАО  
«МегаФон», г. Краснодар, Россия*  
[kolesnikov@kubsu.ru](mailto:kolesnikov@kubsu.ru)

Kolesnikov Maksim Nikolaevich  
Cand.Phys.-Math.Sci.  
RSCI SPIN-code: 4685-8832  
Senior specialist of integration with external systems  
*Hyperion CC of Caucasian branch of PJSC  
MegaFon, Krasnodar, Russia*  
[kolesnikov@kubsu.ru](mailto:kolesnikov@kubsu.ru)

Телятников Илья Сергеевич  
канд. физ.-мат. наук,  
РИНЦ SPIN-code: 5501-1491  
Scopus Author ID: 56440235900  
Младший научный сотрудник лаборатории  
прикладной математики и механики  
*ФГБУ Н Южный научный центр Российской  
академии наук, г. Ростов-на Дону, Россия*  
[ilux\\_t@list.ru](mailto:ilux_t@list.ru)

Telyatnikov Ilya Sergeevich  
Cand.Phys.-Math.Sci.  
RSCI SPIN-code: 5501-1491  
Scopus Author ID: 56440235900  
Junior researcher, Laboratory of Applied  
Mathematics and Mechanics  
*Southern Scientific Centre of the Russian Academy of  
Sciences, Rostov-on-Don, Russia*  
[ilux\\_t@list.ru](mailto:ilux_t@list.ru)

Предложен подход к моделированию напряженно-деформированного состояния литосферных структур вблизи разломов посредством моделирования их пластинами Кирхгофа на трехмерном упругом основании. Описан эффективный метод решения задач для пластин с прямолинейными разломами, основанный на преобразовании дифференциального оператора, позволяющий провести анализ полученных решений для различных условий контакта в области разлома. Метод представлен на примере задачи о вибрации двух протяженных пластин на поверхности упругого слоя под действием сосредоточенной поверхностной нагрузки. Результаты численной реализации разработанного алгоритма дают возможность выявить влияние свойств подложки, характеристик пластин и характера их взаимодействия на границе на картину волнового процесса в исследуемой структуре. При этом получаемые конфигурации прохождения гармонического сигнала через разлом могут служить индикатором его типа. Предложенный подход целесообразно использовать для диагностики наличия и определения типа разлома на основе данных измерений сигналов от виброисточников в тех случаях, когда геофизическая среда может быть смоделирована описанной структурой. Проблемы изучения рассмотренных в работе объектов возникают в различных областях техники, для их решения также применим предложенный метод

We propose an approach to the modeling of stress-strain state of lithospheric structures near faults by modeling them as Kirchhoff plates on three-dimensional elastic foundation. We describe an efficient method of solving problems for plates with rectilinear fractures, based on the transformation of the differential operator, which allows us to analyze the solutions obtained for different contact conditions in the area of the fracture. The method is presented on the example of the vibration problem of two elongated plates on the surface of the elastic layer under the effect of concentrated surface load. The results of numerical implementation of the developed algorithm make it possible to identify the influence of the substrate properties, characteristics of the plates and the nature of their border interactions on the picture of wave process in the test structure. At the same time obtained configurations of the harmonic signal passage through the fracture can serve as an indicator of its type. The proposed approach should be used to determine the presence and type of fractures based on measurements of signals from vibration sources in cases when geophysical environment can be modeled by the previously described structure. The problems of studying objects we reviewed in this paper also occur in various areas of technology, and, therefore we can apply the proposed method for their solution

Ключевые слова: РАЗЛОМ, СОСТАВНОЕ

Keywords: FAULT, COMPOSITE COATING,

ПОКРЫТИЕ, УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ,  
ВИБРАЦИЯ, ФАКТОРИЗАЦИОННЫЕ  
МЕТОДЫ

ELASTIC FOUNDATION, VIBRATION,  
FACTORIZATION METHODS

**Doi: 10.21515/1990-4665-121-033**

Создание теоретической базы и способов обработки данных мониторинга, обеспечивающих прогноз техногенных и сейсмических катастроф, является фундаментальной проблемой современной геофизики и сейсмологии. В ходе многочисленных исследований были предложены различные модели сейсмичности, созданы экспериментальные и теоретические методы, направленные на решение проблемы предсказания землетрясений. Однако и в настоящее время данная проблема остается нерешенной. И этот факт не только указывает на чрезвычайную сложность исследований сейсмических процессов, но свидетельствует о необходимости использования комплексных подходов, опирающихся на методы геофизики, геохимии, механики деформируемого твердого тела.

В Южном научном центре РАН и Кубанском госуниверситете для оценки напряженно-деформированного состояния литосферных структур активно развивается использование моделей механики деформируемого твердого тела [1–3]. Литосферные плиты с позиций механики деформируемого твердого тела можно моделировать протяженными трехмерными блочно-слоистыми структурами, подверженными воздействиям различной природы.

Основу механической концепции сейсмической оценки территории составляет определение областей концентрации напряжений в литосферных структурах. Последние указывают на местоположение возможных землетрясений. В качестве примера рассмотрим граничную задачу для разноразмерной блочной структуры – пластины на поверхности деформируемой трехмерной подошки. Предположим, что пластина состоит из отдельных фрагментов, контактирующих между собой и возможно содержащих дефекты типа трещин. Подобная структура, включающая горизонтально ориентированные блоки – пластины Кирхгофа с разломами

произвольной геометрии на упругом основании, может служить моделью литосферной плиты.

Рассмотрим составную пластину как двумерное многообразие с краем, обозначив занятую пластиной область через  $\Omega$ . Зададим разбиение пластины на однородные с постоянными свойствами блоки так, что пересекающие их разломы, если таковые есть, также служат

блокообразующими границами. Получим систему областей  $\Omega = \bigcup_{j=1}^B \Omega_j$ , где

$B$  – число блоков разбиения. При этом для разных участков  $\partial\Omega_j$  границ

$\partial\Omega_j = \bigcup_{(k)} \partial\Omega_{jk}$ ,  $j = \overline{1, B}$ , могут быть заданы различные стыковочные

условия: жесткое сцепление соседних блоков, свободное смещение, контакт с трением и т.п. Далее использованы обозначения, принятые в теории пластин [4, 5]. Обозначим через  $u_1$ ,  $u_2$  – перемещения точек срединной поверхности пластин в касательной плоскости,  $u_3$  – по нормали к ней,  $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ .

В скалярном случае вертикальных колебаний для установившегося с частотой  $\omega$  режима дифференциальные уравнения движения плоского покрытия имеют вид [4]

$$R_j(\partial x_1, \partial x_2)u_{3j}(x_1, x_2) - \varepsilon_{5j}g_{3j}(x_1, x_2) = -\varepsilon_{5j}t_{3j}(x_1, x_2), \quad j = \overline{1, B}. \quad (1)$$

Здесь  $R_j = \varepsilon_{3j} \left( \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) - \varepsilon_{4j}$ ;  $g_{3j}(x_1, x_2)$  – вертикальная

компонента амплитуды контактного напряжения, действующего на нижнюю

границу пластины в области  $\Omega_j$ ;  $\varepsilon_{3j} = \frac{h_j^2}{12}$ ,  $\varepsilon_{4j} = \frac{\omega^2 \rho_j (1 - \nu_j^2)}{E_j}$ ,  $\varepsilon_{5j} = \frac{1 - \nu_j^2}{E_j h_j}$ ;  $h_j$

– толщина,  $\rho_j$  – плотность,  $\nu_j$  – коэффициент Пуассона,  $E_j$  – модуль

Юнга  $j$ -й пластины.

В качестве деформируемой подложки может рассматриваться однородный слой или пакет слоев, однородное или слоистое полупространство и т.д. Для указанных вариантов основания можно построить интегральные соотношения между амплитудами перемещений  $u_3$  и напряжений  $g_3$  на поверхности подложки вида

$$u_3(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} K_{33}(\alpha_1, \alpha_2) G_3(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (2)$$

где  $K_{33}(\alpha_1, \alpha_2) \equiv K_{33}(\alpha_1, \alpha_2, 0)$  – функция комплексных переменных, примеры которой для различных типов среды представлены в [6,7];  $K_{33}(\alpha_1, \alpha_2) = O(\alpha^{-1})$  при  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$ ;  $G_3 = V_2 g_3$ ;  $V_2$  – двумерный оператор преобразования Фурье. Положение контуров  $\sigma_1, \sigma_2$  определяется принципом предельного поглощения [6].

После применения к (1) интегрального преобразования Фурье по переменным  $x_1, x_2$  уравнение для каждой части пластины принимает вид

$$R(-i\alpha_1^j, -i\alpha_2^j) U_{3j} \equiv (\varepsilon_{3j} (\alpha^j)^2 - \varepsilon_{4j}) U_{3j} = \int_{\partial\Omega_j} \omega_j + \varepsilon_{5j} V_2 (g_{3j} + t_{3j}).$$

Здесь  $j = \overline{1, B}$ ,  $U_{3j}(\alpha_1, \alpha_2) = V_2(\alpha_1, \alpha_2) u_{3j}(x_1, x_2)$ ,  $\omega_j$  – внешняя форма следующего вида [7, 8]:

$$\begin{aligned} \omega_j = \varepsilon_{3j} \exp(i(\alpha_1^j x_1^j + \alpha_2^j x_2^j)) & \left[ \left( \frac{\partial^3 u_{3j}}{\partial (x_2^j)^3} - i\alpha_2^j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial (x_2^j)^2} - (\alpha_2^j)^2 \frac{\partial u_{3j}}{\partial x_2^j} + \right. \right. \\ & \left. \left. + i(\alpha_2^j)^3 u_{3j} + 2 \frac{\partial^3 u_{3j}}{\partial (x_1^j)^2 \partial x_2^j} - 2i\alpha_2^j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial (x_1^j)^2} \right) dx_1^j + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial^3 u_{3j}}{\partial (x_1^j)^3} - i\alpha_1^j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial (x_1^j)^2} - (\alpha_1^j)^2 \frac{\partial u_{3j}}{\partial x_1^j} + i(\alpha_1^j)^3 u_{3j} \right) dx_2^j \right]. \end{aligned}$$

Для прямолинейной части границы блока  $\partial\Omega_{jk}$  внешняя форма примет вид в локальной системе координат

$$\omega_{jk} = -\varepsilon_{3j} \exp(i(\alpha_1^{jk} x_1^{jk} + \alpha_2^{jk} x_2^{jk})) \left[ (i\alpha_2^{jk} M_{jk} - Q_{jk}) D_j^{-1} - \left( (\alpha_2^{jk})^2 + \nu_j (\alpha_1^{jk})^2 \right) \frac{\partial u_{3jk}}{\partial x_2^{jk}} + i\alpha_2^{jk} \left( (\alpha_2^{jk})^2 + (2 - \nu_j) (\alpha_1^{jk})^2 \right) u_{3jk} \right] dx_1^{jk},$$

где  $Q_{jk} = -D_j \left( \frac{\partial^3 u_{3jk}}{\partial (x_2^{jk})^3} + (2 - \nu_j) \frac{\partial^3 u_{3jk}}{\partial (x_1^{jk})^2 \partial x_2^{jk}} \right)$  – поперечная сила,

$M_{jk} = -D_j \left( \frac{\partial^2 u_{3jk}}{\partial (x_1^{jk})^2} + \nu_j \frac{\partial^2 u_{3jk}}{\partial (x_2^{jk})^2} \right)$  – изгибающий момент,  $D_j = \frac{\varepsilon_{3j} h_j}{\varepsilon_{5j}}$  –

жесткость занимающей область  $\Omega_j$  пластины. Криволинейные участки межблочных границ могут быть аппроксимированы ломаными.

Рассмотрим случай, когда покрытие представляет собой систему двух протяженных пластин, граничащих вдоль прямой. Пусть система координат выбрана так, что ось  $Ox_3$  представляет нормаль к поверхности покрытия, а ось  $Ox_2$  направлена вдоль линии раздела пластин. Обозначим правую полуплоскость плоскости  $x_3 = 0$  через  $\Omega_1 = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_2 < +\infty, x_1 > 0\}$ , а левую –  $\Omega_2 = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_2 < +\infty, x_1 < 0\}$ . Пусть система находится под воздействием сосредоточенной гармонической поверхностной нагрузки  $A\delta(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0)\exp(-i\omega t)$ ,  $A = \text{const}$ ,  $x_1^0, x_2^0 > 0$ . Общий вид граничных условий на стыке пластин может быть записан в следующей формулировке [10]:

$$\mathbf{L}_1(\partial x_1, \partial x_2)u_3(x_1, x_2)|_{x_1=0+0} + \mathbf{L}_2(\partial x_1, \partial x_2)u_3(x_1, x_2)|_{x_1=0-0} = \mathbf{f}(x_2), \quad (3)$$

$$-\infty < x_2 < \infty,$$

при этом характер взаимодействия пластин определяет вектор-функцию  $\mathbf{f}(x_2)$  и вид дифференциальных операторов  $\mathbf{L}_j(\partial x_1, \partial x_2)$ ,  $j=1,2$ .

Из системы уравнений, описывающих колебания пластин (1), соотношений для упругого основания (2) и условия идеального контакта пластин с подложкой вытекает следующая система интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{R_j(\partial x_1, \partial x_2)}{4\pi^2} \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} K_{33}(\alpha_1, \alpha_2) G_3(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2 - \varepsilon_{5j} g_{3j}(x_1, x_2) = b_j(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_j, j=1,2, \quad (4)$$

где  $b_j(x_1, x_2) = -\varepsilon_{5j} t_{3j}(x_1, x_2)$ .

Нормализация операторов системы (4) производится путем выноса из нее дифференциального оператора вида  $N(\partial x_1, \partial x_2) = (\Delta - l_1^2)(\Delta - l_2^2)$ , где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ , постоянные  $l_2 > l_1 > 0$ . Для этого применим к соотношениям (4) и оператору  $N(\partial x_1, \partial x_2)$  преобразование Фурье  $V_{1,2}$  по переменной  $x_2$ , в результате придем к системе

$$\frac{R_j(\partial x_1, -i\alpha_2)}{2\pi} \int_{\sigma_1} K_{33}(\alpha_1, \alpha_2) G_3(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-i\alpha_1 x_1) d\alpha_1 - \varepsilon_{5j} \bar{g}_{3j}(x_1, \alpha_2) = \bar{b}_j(x_1, \alpha_2); \quad x_1 > 0 \text{ для } j=1, \quad x_1 < 0 \text{ для } j=2, \quad (5)$$

где  $R_j(\partial x_1, -i\alpha_2) \equiv V_{1,2} R_j(\partial x_1, \partial x_2) = \varepsilon_{3j} \left( \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - 2\alpha_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \alpha_2^4 \right) - \varepsilon_{4j}$ ;

$$\bar{g}_{3j}(x_1, \alpha_2) = V_{1,2}(x_1, \alpha_2) g_{3j}(x_1, x_2); \quad \bar{b}_j(x_1, \alpha_2) = V_{1,2}(x_1, \alpha_2) b_j(x_1, x_2).$$

При этом  $N(\partial x_1, -i\alpha_2) = V_{1,2} N(\partial x_1, \partial x_2) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \alpha_2^2 - l_1^2 \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \alpha_2^2 - l_2^2 \right)$ .

Применим оператор  $N^{-1}(\partial x_1, -i\alpha_2)$  к соотношениям (5), отбрасывая составляющие, неограниченно возрастающие при  $x_1 \rightarrow +\infty$  (для  $j=1$ ) и  $x_1 \rightarrow -\infty$  (для  $j=2$ ), получим

$$N^{-1}(\partial x_1, -i\alpha_2) \frac{R_j(\partial x_1, -i\alpha_2)}{2\pi} \int_{\sigma_1} K_{33}(\alpha_1, \alpha_2) G_3(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-i\alpha_1 x_1) d\alpha_1 - \varepsilon_{5j} N^{-1}(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{g}_{3j}(x_1, \alpha_2) = b_0(x_1, \alpha_2) + \sum_{k=1}^2 C_{jk}(\alpha_2) b_{jk}(x_1, \alpha_2), \quad (6)$$

$$x_1 > 0 \text{ для } j=1, \quad x_1 < 0 \text{ для } j=2.$$

В системе (6) правые части в соответствующих полуплоскостях убывают на бесконечности и представляют собой общие решения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$N^{-1}(\partial x_1, -i\alpha_2)\bar{b}_j(x_1, \alpha_2) = b_{j0}(x_1, \alpha_2) + \sum_{k=1}^2 C_{jk}(\alpha_2)b_{jk}(x_1, \alpha_2),$$

$$b_{j1}(x_1, \alpha_2) = \exp(\mp x_1 \sqrt{l_1^2 + \alpha_2^2}), \quad b_{j2}(x_1, \alpha_2) = \exp(\mp x_1 \sqrt{l_2^2 + \alpha_2^2}).$$

Здесь и далее значению  $j=1$  соответствует верхний знак в этажных символах « $\pm$ »,  $j=2$  – нижний.

Для нахождения интегральных характеристик напряжений на границе покрытия и подложки правые части (6) следует продолжить на всю плоскость неизвестными функциями  $s_j(x_1, \alpha_2)$ , после чего применить к ним преобразование Фурье по переменной  $x_1$ . В итоге придем к системе функциональных уравнений следующего вида:

$$M_j(\alpha_1, \alpha_2)G_3(\alpha_1, \alpha_2) = B_{j0}(\alpha_1, \alpha_2) + \sum_{k=1}^2 C_{jk}(\alpha_2)B_{jk}(\alpha_1, \alpha_2) + S(\alpha_1, \alpha_2), \quad (7)$$

$$M_j(\alpha_1, \alpha_2) = N^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2)[R_j(-i\alpha_1, -i\alpha_2)K_{33}(\alpha_1, \alpha_2) - \varepsilon_{5j}];$$

$$N(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \equiv V_{1,1}N(\partial x_1, -i\alpha_2) = (\alpha^2 + l_1^2)(\alpha^2 + l_2^2);$$

$$R_j(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \equiv V_{1,1}R_j(\partial x_1, -i\alpha_2) = -\varepsilon_{3j}\alpha^4 + \varepsilon_{4j},$$

$$B_{jk}(\alpha_1, \alpha_2) \equiv V_{1,1}b_{jk}(x_1, \alpha_2) = \pm \int_0^{\pm\infty} b_{jk}(x_1, \alpha_2) \exp(i\alpha_1 x_1) dx_1, \quad j=1,2, \quad k = \overline{0,2};$$

$$S_j(\alpha_1, \alpha_2) \equiv V_{1,1}s_j(x_1, \alpha_2) = \mp \int_0^{\mp\infty} s_j(x_1, \alpha_2) \exp(i\alpha_1 x_1) dx_1.$$

Из (7) следуют соотношения для Фурье-образов напряжений

$$G_3 = M_j^{-1} \left( B_{j0}(x_1, \alpha_2) + \sum_{k=1}^2 C_{jk}(\alpha_2)B_{jk}(x_1, \alpha_2) + S_j \right), \quad j=1,2. \quad (8)$$

При этом  $B_{jk}(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $k = \overline{0,2}$  – функции, регулярные в верхней комплексной полуплоскости  $\alpha_1$  для  $j=1$  как Фурье-образы функций с носителем на положительной полуоси и в нижней комплексной полуплоскости  $\alpha_1$  для  $j=2$  как Фурье-образы функций с носителем на отрицательной полуоси. А функция  $S_j(\alpha_1, \alpha_2)$  – наоборот, регулярна в нижней (для  $j=1$ ) и верхней (для  $j=2$ ) полуплоскости.

Исключив из (8) преобразования Фурье неизвестных напряжений  $G_3(\alpha_1, \alpha_2)$ , получим систему функциональных уравнений относительно функций  $S_j(\alpha_1, \alpha_2)$ , решаемую методом Винера–Хопфа [11],

$$B_{10} + \sum_{k=1}^2 C_{1k}(\alpha_2)B_{1k} + S_1 = M \left( B_{20} + \sum_{k=1}^2 C_{2k}(\alpha_2)B_{2k} + S_2 \right), \quad (9)$$

$$M = M_1(\alpha_1, \alpha_2)M_2^{-1}(\alpha_1, \alpha_2), \quad M(\alpha_1, \alpha_2) \sim \frac{\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{32}} + O(\alpha_1^{-3}), \quad |\alpha_1| \rightarrow \infty.$$

Внеся найденные выражение  $S_j(\alpha_1, \alpha_2)$  в соотношения (8), получим выражения для Фурье-образов напряжений на поверхности упругого основания.

Интегральные соотношений (2), связывающие перемещения и напряжения на поверхности подложки, в образах Фурье примут вид

$$U_3(\alpha_1, \alpha_2) = K_{33}(\alpha_1, \alpha_2)G_3(\alpha_1, \alpha_2), \quad (10)$$

где  $U_3(\alpha_1, \alpha_2) = V_2(\alpha_1, \alpha_2)u_3(x_1, x_2)$ .

Соотношения (10) и (8) позволяют получить выражение интегральных характеристик перемещений на поверхности упругого основания, в результате в представления

$$U_3(\alpha_1, \alpha_2) = U_0(\alpha_1, \alpha_2) + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 C_{jk}(\alpha_2)U_{jk}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (11)$$

где  $U_0$  и  $U_{jk}$  ( $j, k=1,2$ ) зависят от данных задачи и параметров  $\alpha_1, \alpha_2$  линейно входят четыре неизвестные функции  $C_{jk}(\alpha_2)$ , которые



необходимо определить из условий в области контакта пластин. Для этого применим к выражению (11) для интегральных характеристик перемещений обратное преобразование Фурье по  $\alpha_1$ , а к граничным условиям (3) – прямое преобразование Фурье по переменной  $x_2$ . Подставив

$$\bar{u}_3(x_1, \alpha_2) = \bar{u}_0(x_1, \alpha_2) + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 C_{jk}(\alpha_2) \bar{u}_{jk}(x_1, \alpha_2),$$

где  $\bar{u}_3(x_1, \alpha_2) = V_{1,1}^{-1}(x_1, \alpha_2) U_3(\alpha_1, \alpha_2)$ ;  $\bar{u}_0(x_1, \alpha_2) = V_{1,1}^{-1}(x_1, \alpha_2) U_0(\alpha_1, \alpha_2)$ ;

$$\bar{u}_{jk}(x_1, \alpha_2) = V_{1,1}^{-1}(x_1, \alpha_2) U_{jk}(\alpha_1, \alpha_2), j, k=1, 2,$$

в преобразованные условия (3)

$$\mathbf{L}_1(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{u}_3(x_1, \alpha_2) \Big|_{x_1=0+0} + \mathbf{L}_2(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{u}_3(x_1, \alpha_2) \Big|_{x_1=0-0} = \mathbf{F}(\alpha_2),$$

где  $\mathbf{L}_j(\partial x_1, -i\alpha_2) = V_{1,2} \mathbf{L}_j(\partial x_1, \partial x_2)$ ;  $j=1, 2$ ;  $\mathbf{F}(\alpha_2) = V(\alpha_2) \mathbf{f}(x_2)$ . Получим следующую линейную алгебраическую систему относительно неизвестных  $C_{jk}(\alpha_2), j, k=1, 2$ :

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 C_{jk}(\alpha_2) \left[ \mathbf{L}_1(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{u}_{jk}(x_1, \alpha_2) \Big|_{x_1=0+0} + \mathbf{L}_2(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{u}_{jk}(x_1, \alpha_2) \Big|_{x_1=0+0} \right] =$$

$$= \mathbf{F}(\alpha_2) - \mathbf{L}_1(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{u}_0(x_1, \alpha_2) \Big|_{x_1=0+0} - \mathbf{L}_2(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{u}_0(x_1, \alpha_2) \Big|_{x_1=0-0}.$$

В результате ее решения подставим  $C_{jk}(\alpha_2)$  в выражение для  $\bar{u}_3(x_1, \alpha_2)$ .

Оригиналы амплитуд перемещений поверхности системы находятся с помощью применения к полученному выражению  $\bar{u}_3(x_1, \alpha_2)$  обратного преобразования Фурье по параметру  $\alpha_2$

$$u_3(x_1, x_2) = V_{1,2}^{-1} \bar{u}_3(x_1, \alpha_2), x_1 \neq 0, -\infty < x_2 < \infty.$$

Предложенный подход позволяет изучить влияние свойств пластин и основания, а также типа граничных условий в области контакта элементов покрытия на деформационные свойства системы и характер прохождения сигнала. На рисунках 1,2 приведены графики комплексных амплитуд перемещений поверхности пластин на упругом основании в случае, когда

свойства системы в направлении оси  $Ox_2$  неизменны, для безразмерной частоты  $\bar{\omega} = 2$ . Задаваемая безразмерная частота определялась по формуле  $\bar{\omega}^2 = \rho_1 \omega^2 a^2 \mu_1^{-1}$ , где  $\mu_1$  – модуль сдвига, а  $\rho_1$  – плотность упругой пластины,  $a$  – характерный линейный размер. Сосредоточенная вертикальная нагрузка задана в точке  $x_1^0 = 5$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,125$ ,  $\nu = 0,25$ ,  $\mu = 1,58$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = \rho = 1$ . На графиках по оси ординат отложена величина амплитуды вертикального смещения  $u_3$  (вещественной части комплексных амплитуд соответствует сплошная линия, мнимой – пунктирная), по оси абсцисс – координата  $x_1$ .

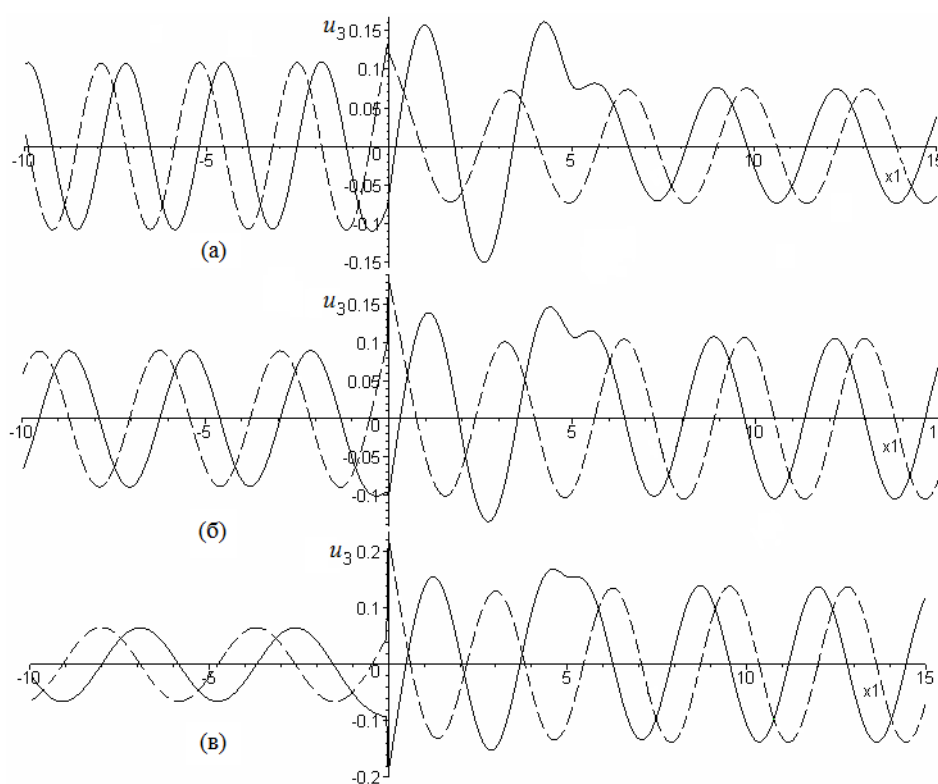


Рисунок 1 – Комплексные амплитуды колебаний при равенстве нулю изгибающих моментов и условии «вязкого контакта» на стыке пластин

На рисунке 1 приведены графики амплитуд смещений поверхности слоя с составным покрытием при условии, называемом «вязким контактом»

$$D_1 \frac{\partial^3 u_{31}}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=0} = i \kappa \omega (u_{32}(x_1) - u_{31}(x_1)) \Big|_{x_1=0},$$

$$D_2 \frac{\partial^3 u_{32}}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=0} = i\kappa\omega(u_{31}(x_1) - u_{32}(x_1)) \Big|_{x_1=0}, \quad \kappa = 0,5,$$

(действующая на край пластины поперечная сила пропорциональна разности скоростей краев), и равенстве нулю изгибающих моментов

$$D_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0 \quad (j=1,2) \text{ на стыке пластин покрытия. Расчеты проведены для}$$

трех соотношений жесткостей пластин:  $\mu_1/\mu_2 = 0,2$  (а),  $\mu_1/\mu_2 = 1$  (б),  $\mu_1/\mu_2 = 5$  (в).

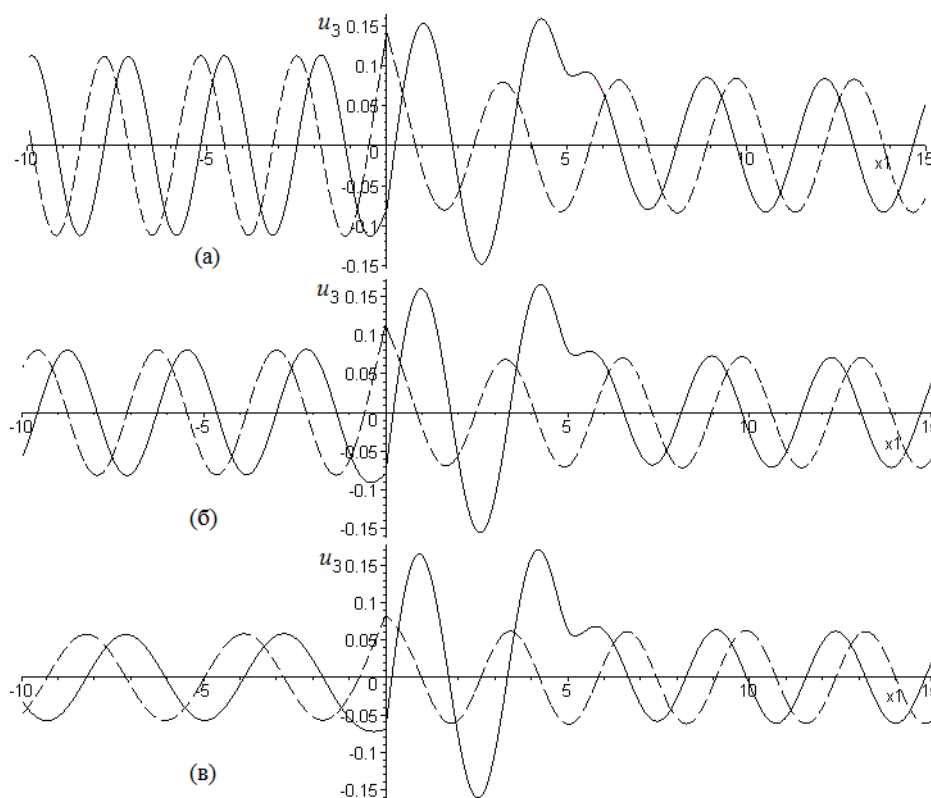


Рисунок 2 – Комплексные амплитуды колебаний при условиях равенства нулю изгибающих моментов, непрерывности смещений и поперечных сил в области контакта пластин

Рисунок 2 иллюстрирует прохождение сигнала через разлом при условиях равенства нулю изгибающих моментов  $D_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0,$

непрерывности смещений  $u_{31}|_{x_1=0} = u_{32}|_{x_1=0}$  и поперечных сил

$$D_1 \frac{\partial^3 u_{31}}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=0} = D_2 \frac{\partial^3 u_{32}}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=0} \quad \text{на стыке пластин.}$$

Результаты позволяют выявить характер распространения гармонического сигнала в моделируемой структуре для однотипных и разнотипных пластин покрытия для разных условий контакта и свойств упругой подложки и определить конфигурации его прохождения непосредственно на разломе. Последние могут использоваться как своего рода индикатор типа разлома.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 16-31-00067 мол\_а).

### Литература

1. Бабешко, В.А. К теории блочного элемента / В.А. Бабешко, О.М. Бабешко, О.В. Евдокимова // ДАН. – 2009. – Т. 427, № 2. – С. 183–187.
2. Бабешко, В.А. Об автоморфизме и псевдодифференциальных уравнениях в методе блочного элемента / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко // ДАН. – 2011. – Т. 438, № 5. – С. 623–625.
3. Бабешко, В.А. Блочные элементы в теории плит сложной формы / В.А. Бабешко, О.М. Бабешко, О.В. Евдокимова // Изв. РАН. МТТ. – 2012. – №5. – С. 92–97.
4. Бабешко, В.А. К проблеме исследования материалов с покрытиями / В.А. Бабешко, О.М. Бабешко, О.В. Евдокимова // ДАН. – 2006. – Т. 410, №1. – С. 49–52.
5. Вольмир, А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
6. Ворович, И.И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей / И.И. Ворович, В.А. Бабешко – М.: Наука, 1979. – 320 с.
7. Ворович, И.И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И.И. Ворович, В.М. Александров, В.А. Бабешко. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
8. О поведении и резонансах некоторых блочных структур сейсмологии и материаловедения / В.А. Бабешко [и др.] // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2013. – № 1. – С. 6–12.
9. Block element method for body, localizations and resonances / V.A. Babeshko [and etc.] // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2014. – № 2. – С. 13–19.
10. Гольденвейзер, А.Л. Теория упругих тонких оболочек / А.Л. Гольденвейзер. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
11. Нобл, Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных / Б. Нобл. – М.: ИИЛ – 1962. – 280 с.

### References

1. Babeshko, V.A. K teorii blochnogo jelementa [To block element theory] / V.A. Babeshko, O.M. Babeshko, O.V. Evdokimova // Reports of Academy of Sciences. – 2009.– V. 427, № 2. – pp. 183–187. (In Russian)
2. Babeshko, V.A. Ob avtomorfizme i psevdodifferencial'nyh uravnenijah v metode blochnogo jelementa [About the automorphisms and pseudo-differential equations in the method of a block element] / V.A. Babeshko, O.V. Evdokimova, O.M. Babeshko // Reports of Academy of Sciences. – 2011.– V. 438, № 5. – pp. 623–625. (In Russian)
3. Babeshko, V.A. Blochnye element v teorii plit slozhnoi formy [Block elements in the theory of plates of complicated shape] / V.A. Babeshko, O.M. Babeshko, O.V. Evdokimova // Mechanics of Solids. – 2012. – № 5. – С. 92–97. (In Russian)
4. Babeshko, V.A. K probleme issledovanija materialov s pokrytijami [On the problem of the study of materials with coverings] / V.A. Babeshko, O.M. Babeshko, O.V. Evdokimova // Reports of Academy of Sciences. – 2006. – V. 410, №1. – pp. 49–52. (In Russian)
5. Volmir, A.S. Nelineinaya dinamika platinok i obolochek [Nonlinear dynamics of plates and shells] / A.S. Volmir. – M.: Science, 1972. – 432 p. (In Russian)
6. Vorovich, I.I. Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti [Non-classical mixed problem of elasticity theory] / I.I. Vorovich, V.M. Aleksandrov, V.A. Babeshko. – M.: Science, 1974. – 455 p. (In Russian)
7. Vorovich, I.I. Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya kh oblastei [Dynamic mixed problem of elasticity theory for nonclassical domains] / I.I. Vorovich, V.A. Babeshko. – M.: Science, 1979. – 319 p. (In Russian)
8. O povedenii i rezonansah nekotoryh blochnyh struktur sejsmologii i materialovedenija [Behavior and resonances of some block structures of seismology and material sciences] / V.A. Babeshko [and etc.] // Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation. – 2013. – № 1. – pp. 6–12. (In Russian)
9. Block element method for body, localizations and resonances / V.A. Babeshko [and etc.] // Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation. – 2014. – № 2. – pp. 13–19.
10. Goldenveizer, A.L. Teoriya uprugikh tonkikh obolochek [Theory of elastic thin shells] / A.L. Goldenveizer. – M.: Science, 1976. – 512 p. (In Russian)
11. Nobl, B. Primenenie metoda Vinera-Hopfа dlja reshenija differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh [Methods based on the Viener – Hopf technicue for the solution of partial differentiation eqetions ] / B. Nobl. – M.: FLP – 1962. – 280 p. (In Russian)