

УДК 530.12+524.7

UDC 530.12+524.7

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and Math

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ПОТОКАХ РИЧЧИ ПРИ СЛИЯНИИ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ**GRAVITATIONAL WAVES IN THE RICCI FLOW FROM SINGULARITIES MERGER**Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D.*Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада*

Alexander Trunev

Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.

Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada

В настоящей работе исследована задача об излучении гравитационных волн, образующихся при столкновении частиц, представленных сингулярностями гравитационного поля. Выведена система нелинейных уравнений параболического типа, описывающая эволюцию аксиально-симметричных метрик в потоках Риччи. Развита модель, описывающая излучение гравитационных волн при столкновении и слиянии частиц в потоках Риччи. Показано, что теория, описывающая потоки Риччи в задаче о слиянии черных дыр, согласуется с теорией Эйнштейна-Инфельда, описывающей динамику материальных частиц представленных сингулярностями гравитационного поля. В качестве примера рассматривается метрика, обладающая осевой симметрией и содержащая два сингулярности, имитирующие частицы конечной массы. Численно исследовано изменение метрики при столкновении и слиянии частиц. В начальных и граничных условиях используются точные решения статической задачи, поэтому при соударении сохраняются особенности метрики, обусловленные наличием частиц. В численных экспериментах установлено, что столкновение частиц в потоках Риччи приводит к образованию гравитационных волн, похожих по своей структуре на волны, зарегистрированные в экспериментах LIGO. Следовательно, можно предположить, что наблюдаемые гравитационные волны обусловлены, главным образом, переходными процессами, связанными с изменением метрики системы. Исследовано влияние параметров задачи – скорости и массы частиц, на амплитуду и интенсивность излучения гравитационных волн. Обнаружено хаотическое поведение гравитационных потенциалов при слиянии сингулярностей в потоках Риччи

In this study, we investigate the problem of the emission of gravitational waves produced in collisions of particles submitted to the singularities of the gravitational field. A system of non-linear parabolic equations describing the evolution of the axially symmetric metrics in the Ricci flow derived. A model describing the emission of gravitational waves in the collision and merger of the particles in the Ricci flow proposed. It is shown that the theory of the Ricci flow describes the problem of black holes merge, consistent with Einstein-Infeld theory, which describes the dynamics of the material particles provided by the singularities of the gravitational field. As an example, we consider the metric having axial symmetry and comprising two singularities simulating particles of finite mass. We have numerically investigated the change of the metric in the collision and merger of the particles. The initial and boundary conditions using the exact solution of the static problem, so the collision persist particularly metrics caused by the presence of particles. In numerical experiments determined that the collision of the particles in the Ricci flow leads to the formation of gravitational waves, similar in structure to the waves, registered in the LIGO experiment. Consequently, we can assume that the observed gravity waves caused mainly by transients associated with the change in the metric of a system. The influence of the parameters of the problem - the speed and mass of the particles, on the amplitude and intensity of the emission of gravitational waves was numerically simulated. We have found chaotic behavior of gravitational potentials at the merger of the singularities in the Ricci flow

Ключевые слова: ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ, ПОТОКИ РИЧЧИ, ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ

Keywords: RICCI FLOW, GENERAL RELATIVITY, GRAVITATIONAL WAVES

Doi: 10.21515/1990-4665-121-121

Введение

Проблема излучения гравитационных волн возникающих при слиянии черных дыр и нейтронных звезд является одной из актуальных задач астрофизики, в том числе, в связи с экспериментами LIGO [1-3]. В настоящее время моделирование задач о слиянии черных дыр и нейтронных звезд осуществляется на основе теории Эйнштейна с использованием ряда приближений [4-6]. В существующих подходах к описанию черных дыр широко используется метрика Шварцшильда [7], описывающая сингулярность гравитационного поля, что физически интерпретируется как поле частицы заданной массы.

Движение материальных частиц, представленных сингулярностями гравитационного поля, является одной из проблем общей теории относительности [8-9]. В работе [8] было показано, что уравнений поля для пустого пространства достаточно для описания движения материи представленной в виде точечных сингулярностей. Для описания материи в рамках общей теории относительности Эйнштейн и Инфельд сформулировали программу [9]: «Все попытки представить материю тензором энергии-импульса неудовлетворительны, и мы хотим освободить нашу теорию от специального выбора такого тензора. Поэтому мы будем иметь дело здесь только с гравитационными уравнениями в пустом пространстве, а материя будет представлена сингулярностями гравитационного поля».

В работе [10] исследовано движение частиц, представленных сингулярностями гравитационного поля, в потоках Риччи [11-18] в аксиально-симметричных метриках. Была исследована метрика [19-20], обладающая осевой симметрией и содержащая два центра гравитации,

имитирующих частицы конечной массы. Установлено, что в результате слияния частиц в потоках Риччи образуется устойчивая статическая система, состоящая из гравитационного поля и содержащая особенность, имитирующая частицу.

В численных экспериментах [10] было обнаружено, что столкновение частиц в потоках Риччи приводит к образованию гравитационных волн, похожих по своей структуре на волны, зарегистрированные в экспериментах [1]. Следовательно, можно предположить, что наблюдаемые гравитационные волны обусловлены, главным образом, переходными процессами, связанными с изменением метрики системы [10].

В настоящей работе исследована задача об излучении гравитационных волн, образующихся при столкновении частиц, представленных сингулярностями гравитационного поля. Выведена система нелинейных уравнений параболического типа, описывающая эволюцию аксиально-симметричных метрик в потоках Риччи. Развита модель, описывающая излучение гравитационных волн при столкновении и слиянии частиц в потоках Риччи. Показано, что теория Гамильтона-Перельмана [11-18], описывающая потоки Риччи в задаче о слиянии черных дыр, согласуется с теорией Эйнштейна-Инфельда [7-9], описывающей динамику материальных частиц представленных сингулярностями гравитационного поля.

В качестве примера рассматривается метрика, обладающая осевой симметрией и содержащая два сингулярности, имитирующие частицы конечной массы. Численно исследовано изменение метрики при столкновении и слиянии частиц. В начальных и граничных условиях используются точные решения статической задачи, поэтому при соударении сохраняются особенности метрики, обусловленные наличием частиц.

Аксиально-симметрические поля

Уравнения Эйнштейна имеют вид [21-24]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = g_{\mu\nu} \Lambda + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1)$$

Здесь $R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса; Λ, G, c - космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно.

Решения уравнений Эйнштейна, обладающие осевой симметрией, рассматривались в работах [10, 19-23] и некоторых других (обзор публикаций дан, например, в [21, 23]). Метрика таких пространств, при некоторых предположениях может быть приведена к виду

$$ds^2 = e^\mu dt^2 - e^{-\mu} (e^\nu d\rho^2 + e^\nu dz^2) - e^{-\mu} \rho^2 d\phi^2 \quad (2)$$

Здесь $\rho = \sqrt{x^1{}^2 + x^2{}^2}$; $z = x^3$; $\mu = \mu(\rho, x^3), \nu = \nu(\rho, x^3)$ - функции, удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна. Вычисляя компоненты тензора Эйнштейна $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$ в метрике (2) и полагая для вакуума

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 0,$$

находим уравнения поля:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^3{}^2} = 0, \\ \omega_2 &= \frac{\partial \nu}{\partial \rho} - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mu}{\partial x^3} \right)^2 \right] = 0, \\ \omega_3 &= \frac{\partial \nu}{\partial x^3} - \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \frac{\partial \mu}{\partial x^3} = 0, \\ \omega_4 &= \frac{\partial^2 \nu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^3{}^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial x^3} \right)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Можно проверить, что не все уравнения (3) являются независимыми и что выполняются следующие два соотношения [23]

$$\omega_4 \equiv \frac{\partial \omega_2}{\partial \rho} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} + \rho \omega_1 \frac{\partial \mu}{\partial \rho}, \quad \rho \omega_1 \frac{\partial \mu}{\partial x^3} \equiv \frac{\partial \omega_2}{\partial x^3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial \rho} \quad (4)$$

Следовательно, можно в качестве системы уравнений для определения двух функций $\mu = \mu(\rho, x^3), \nu = \nu(\rho, x^3)$ выбрать, например, первое и четвертое уравнения (3), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^{3^2}} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \nu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^{3^2}} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial x^3} \right)^2 \right] &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Разрешая систему уравнений (5) приходим к определению статических полей гравитации в случае осевой симметрии. Отметим, что в нерелятивистском пределе потенциал $\mu = 2\varphi/c^2$, где φ - гравитационный потенциал в теории гравитации Ньютона. Из второго уравнения (5) находим оценку $\nu \sim \mu^2 = 4\varphi^2/c^4$.

Рассмотрим решения системы уравнений (3) вида

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} - \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} + a \ln \rho, \\ \nu &= -\frac{m_1^2 \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_1)^2)^2} - \frac{am_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} - \frac{m_2^2 \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_2)^2)^2} - \frac{am_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} \\ &+ \frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} \frac{(\rho^2 + (z - L_1)(z - L_2))}{(L_1 - L_2)^2} + \frac{a^2}{2} \ln \rho \end{aligned} \quad (6)$$

В частном случае, полагая в (6) $a = 0$, приходим к выражению потенциалов, полученных в работе [19]

$$\begin{aligned} \mu_s(\rho, z, L_1, L_2) &= -\frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} - \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}}, \\ \nu_s(\rho, z, L_1, L_2) &= -\frac{m_1^2 \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_1)^2)^2} - \frac{m_2^2 \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_2)^2)^2} + \\ &\frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} \frac{(\rho^2 + (z - L_1)(z - L_2))}{(L_1 - L_2)^2} - \frac{m_1 m_2}{(L_1 - L_2)^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку выражения (7) используются в численных расчетах, мы добавили ко второму потенциалу константу, с целью исключить особенность, возникающую при условии $L_1 = L_2$.

Отметим, что выражения (7) подверглись критике со стороны Эйнштейна и Розена [25], как лишенные физического смысла. Действительно, в нерелятивистском случае потенциал μ в (7) сводится к выражению $\mu = 2\varphi/c^2$, где φ - гравитационный потенциал в теории гравитации Ньютона. Но тогда этот потенциал сводится к потенциалу двух точечных масс $m_{1,2}$, расположенных на оси симметрии системы в точках $z = L_{1,2}$.

Поскольку точечные массы $m_{1,2}$ в метрике (2) не испытывают взаимного перемещения, хотя должны притягиваться согласно теории Ньютона, автор [19] делает ошибочный вывод, что не верна теория относительности Эйнштейна. На самом же деле, как это легко видеть, у выражений (7) нет нерелятивистского предела, поскольку массы предполагаются точечными. Следовательно, всегда найдется такая малая область, что геометрия пространства-времени вокруг точечной массы, погруженной в эту область, сколь угодно сильно будет отличаться от евклидовой геометрии. Но в таком случае точечные массы не должны следовать законам Ньютона, так как эти законы не выполняются в окрестности самих масс [19].

Наконец, полагая в (12) $m_1 = m, L_1 = 0, m_2 = 0$, получим

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{m}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + a \ln \rho, \\ \nu &= -\frac{m^2 \rho^2}{4(\rho^2 + z^2)^2} - \frac{am}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \frac{a^2}{2} \ln \rho \end{aligned} \tag{8}$$

Отметим, что выражение потенциала μ в форме (8) согласуется с выражением гравитационного потенциала, полученным в нерелятивистском приближении путем обработки данных для 50 галактик [26]. Потенциал V не

имеет аналогов в теории Ньютона. Поэтому выражения (6)-(7) и (9) представляют интерес в теории столкновения и слияния частиц, представленных сингулярностями поля в потоках Риччи с излучением гравитационных волн [10].

Столкновение частиц в потоках Риччи

Для моделирования изменения метрики при столкновении частиц используем потоки Риччи [11-18], которые описываются уравнением

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial t} = D_0 R_{ik} \quad (9)$$

Здесь D_0 – коэффициент диффузии, которые в стандартной теории [11-18] полагают равным $D_0 = -2$, однако в метрике (2) следует положить $D_0 = 2$, тогда (9) сводится к системе уравнений параболического типа:

$$\begin{aligned} e^{v-\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \\ e^{v-\mu} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Сравнивая (10) и (5) находим, что для установившихся потоков при условиях $\mu_t = v_t = 0$ система (10) сводится к (5). Обоснованием для такого перехода от статической системы (5) к системе уравнений параболического типа (10) может служить теория, развитая в работах [11-18] и других, а также теория геометрической турбулентности [27-28].

Физический смысл расширения статической модели (5) до модели (10), описывающей потоки Риччи, заключается в том, что по начальным и граничным условиям можно определить к каким решениям сходится решение системы уравнений (5), содержащее особенности, например, решение Зильберштейна (7).

С точки зрения теории Эйнштейна и Инфельда [7-9], движение частиц в потоках Риччи равносильно нулевому приближению, при котором частицы движутся свободно, создавая гравитационное поле. В следующем приближении между частицами возникает сила взаимодействия, которая изменяет параметры движения и т.д. Однако для многих практически важных задач, таких как слияние черных дыр [1-3], достаточно будет знать, как изменяется метрика бинарной системы при сближении центров гравитации с заданной скоростью. Модель потоков Риччи (10) позволяет ответить на этот и другие вопросы, связанные с изменением метрики.

Гравитационные волны в потоках Риччи

Заметим, что наряду с системой уравнений (10) должны также выполняться второе и третье уравнения системы (3). Очевидно, однако, что указанные уравнения не могут выполняться на произвольных решениях системы уравнений (11). Можно предположить, что возникающая при этом невязка должна компенсироваться в силу уравнения Эйнштейна (1) некоторым тензором энергии-импульса τ_{ik} , что интерпретируется, как энергия гравитационных волн, свободно распространяющихся за пределы системы.

Для описания процесса распространения волн используем стандартную теорию поля [24], имеем

$$\nabla^2 \psi_i^k - (\psi_i^k)_{,tt} = \frac{16\pi G}{c^4} \tau_i^k \quad (11)$$

Здесь ψ_i^k описывают возмущение галилеевой метрики при прохождении гравитационной волны. Из уравнения (1) имеем для тензора в правой части (11) следующее соотношение

$$G_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} \tau_{ik} \quad (12)$$

Производя вычисления с учетом уравнений (10), находим компоненты тензора Эйнштейна в метрике (2) в потоках Риччи

$$G_{11} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} e^{2\mu-\nu}, G_{22} = \frac{\omega_2}{2\rho}, G_{23} = G_{32} = \frac{\omega_3}{2\rho}, G_{44} = -\frac{\rho^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} e^{-\nu} \quad (13)$$

Используя (13) преобразуем уравнение (11) к виду удобному для численного интегрирования:

$$\nabla^2 \psi_i^k - (\psi_i^k)_{,tt} = 2g^{jk} G_{ij} \quad (14)$$

Учитывая выражения (13), распишем систему (14) покомпонентно, имеем

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_1 - (\psi_1)_{,tt} &= e^{-\mu} \frac{\partial}{\partial t} e^{2\mu-\nu}, \nabla^2 \psi_2 - (\psi_2)_{,tt} = -\frac{\omega_2}{\rho} e^{-\nu}, \\ \nabla^2 \psi_3 - (\psi_3)_{,tt} &= -\frac{\omega_3}{\rho} e^{-\nu}, \nabla^2 \psi_4 - (\psi_4)_{,tt} = e^\mu \frac{\partial}{\partial t} e^{-\nu} \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь обозначено $\psi_1 = \psi_1^1, \psi_2 = \psi_2^2, \psi_3 = \psi_3^2, \psi_4 = \psi_4^4$. Система уравнений (19) позволяет определить распределение полей в дальней зоне, где метрика (2) стремится к галилеевой метрике [24]. Однако мы будем использовать эти уравнения и непосредственно в области соударения частиц.

Система уравнений (10), (15) решалась численно в прямоугольной области $\rho \leq R, -L/2 \leq z \leq L/2$. В качестве начальных и граничных данных для системы уравнений (10) использовалось решение Зильберштейна в форме (7). Будем предполагать, что частицы движутся навстречу друг другу с постоянной скоростью вплоть до соударения. Таким образом, для уравнения (10) поставим следующую задачу о столкновении частиц, представленных сингулярностями поля:

$$\begin{aligned} t = 0: \mu(0, \rho, z) &= \mu_s(\rho, z, L_1, L_2), \quad v(0, \rho, z) = v_s(\rho, z, L_1, L_2); \\ t > 0: \mu(t, r_0, z) &= \mu_s(r_0, z, L_1 + u_1 t, L_2 + u_2 t), \quad v(t, r_0, z) = v_s(r_0, z, L_1 + u_1 t, L_2 + u_2 t), \\ \mu(t, R, z) &= \mu_s(R, z, L_1 + u_1 t, L_2 + u_2 t), \quad v(t, \rho, z) = v_s(R, z, L_1 + u_1 t, L_2 + u_2 t), \\ \mu(t, \rho, -L/2) &= \mu_s(\rho, -L/2, L_1 + u_1 t, L_2 + u_2 t), \quad v(t, \rho, -L/2) = v_s(\rho, -L/2, L_1 + u_1 t, L_2 + u_2 t), \\ \mu(t, \rho, L/2) &= \mu_s(\rho, L/2, L_1 + u_1 t, L_2 + u_2 t), \quad v(t, \rho, L/2) = v_s(\rho, L/2, L_1 + u_1 t, L_2 + u_2 t), \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $u_{1,2}$ – скорость частиц до соударения, r_0 – граница области, отделяющая область численного интегрирования от оси системы, содержащей сингулярные точки решений Зильберштейна (7).

Система уравнений (15) распадается на четыре независимых уравнения, поэтому сформулируем начальные и граничные условия для первого из них, остальные имеют аналогичный вид,

$$\begin{aligned} t = 0 : \psi_1(0, \rho, z) = 0, \quad \partial_t \psi_1(0, \rho, z) = 0; \\ 0 < t \leq t_0 : \partial_\rho \psi_1(t, r_0, z) = 0; \psi_1(t, R, z) = \psi_1(t, \rho, -L/2) = \psi_1(t, \rho, L/2) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Отметим, что условия (17) на границах области могут быть выполнены лишь приближенно при условии, что гравитационная волна, сформировавшаяся в области столкновения частиц, не выходит на границу области за время интегрирования t_0 .

На рис. 1-2 представлены результаты моделирования распространения гравитационных волн, образующихся при слиянии частиц в потоках Риччи, выполненные по (10), (15)-(17) при следующих значениях параметров:

$$m_1 = m_2 = 0.01, \quad L_1 = -L_2 = 1, \quad r_0 = 10^{-2}, \quad R = 6, \quad L = 6, \quad u_1 = -u_2 = -1. \quad (18)$$

Предполагается, что частицы после столкновения в момент времени $t_1 = 1$ образуют новую частицу. В последующие моменты времени из системы излучается гравитационная волна, распространяющаяся со скоростью света. Вычислительный процесс останавливается в момент времени $t = t_0 = 4$, когда фронт основной волны еще не достиг границы области. К этому моменту формируется волновой импульс, имеющий вид резкого всплеска с последующими затухающими колебаниями – рис. 2.

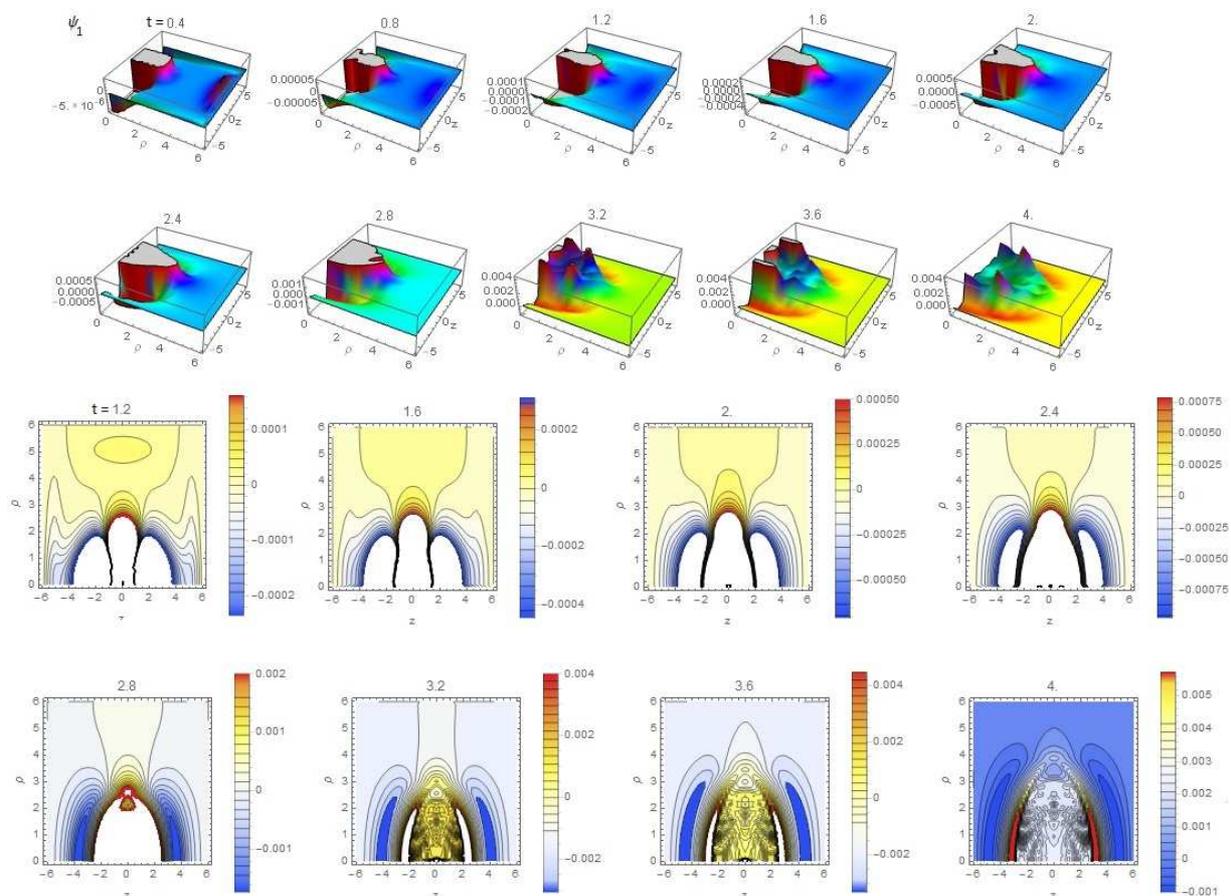


Рис. 1. Распределение ψ_1 в различные моменты времени при образовании гравитационных волн в процессе столкновения и слиянии частиц равной массы в потоках Риччи в аксиально-симметричной метрике: параметр времени указан над рисунками.

Положим $\rho = r \cos \vartheta, z = r \sin \vartheta$. На рис. 2 приведены зависимости функции ψ_1 от времени в фиксированных точках (r, ϑ) . Из этих данных следует, что при увеличении расстояния до точки слияния частиц (совпадает с началом координат) в два раза, амплитуда уменьшается в два раза в направлении $\vartheta = \pi/4$.

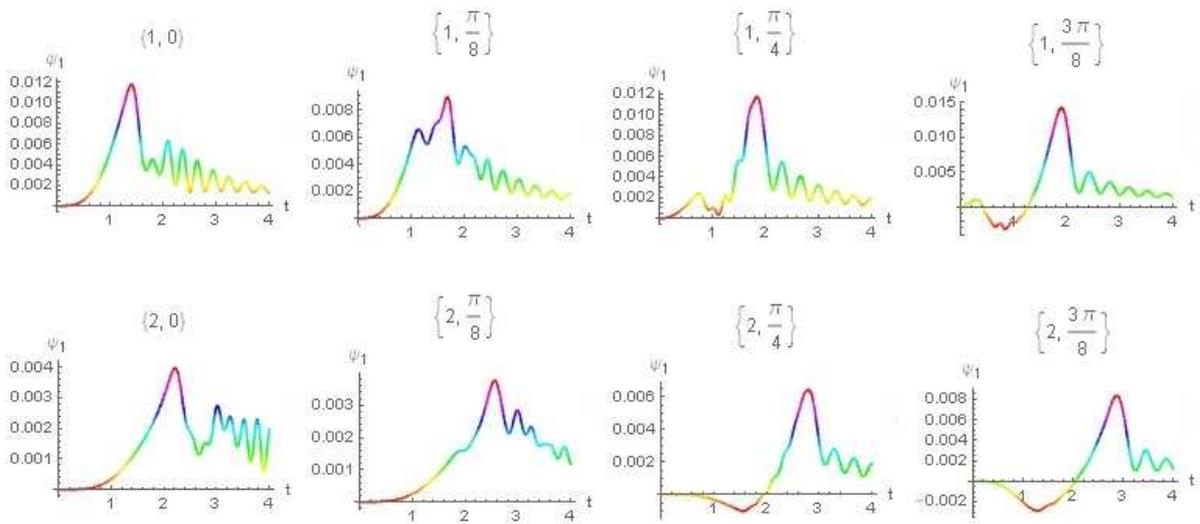


Рис. 2. Зависимости функции ψ_1 от времени в различных точках $\{r, \vartheta\}$ (координаты точек указаны над рисунками) в примере с данными (18).

На рис. 3-4 представлены результаты моделирования распространения гравитационных волн, образующихся при столкновении и слиянии частиц в потоках Риччи, выполненные по (10), (15)-(17) при следующих значениях параметров:

$$m_1 = 10^{-2}, m_2 = 10^{-2}, L_1 = -L_2 = 1, r_0 = 10^{-2}, R = 10, L = 10, u_1 = -u_2 = -0.5. \quad (19)$$

Данные на рис. 3-4 получены в предположении, что частицы после столкновения в момент времени $t_1 = 1$ образуют новую частицу. Вычислительный процесс останавливается в момент времени $t = t_0 = 8$. Отметим, что волны возникают в силу нелинейности уравнений (10), тогда как в линейном случае при монотонных граничных условиях (16) потенциалы также должны изменяться монотонно. Природа этих волн такая же, как у волн, возникающих при слиянии черных дыр [1-3] и нейтронных звезд [6] – возмущение метрики, обусловленные слиянием двух сингулярностей поля в

одну. Развитая выше теория позволяет детально исследовать влияние параметров задачи на частоту и амплитуду гравитационных волн.

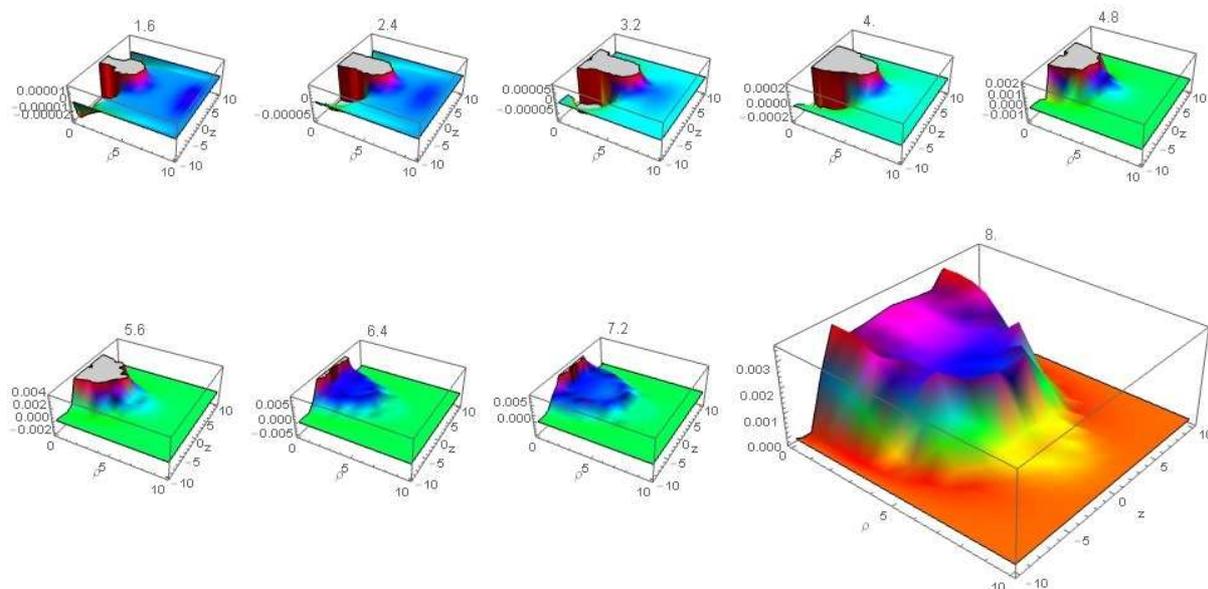


Рис. 3. Распределение функции ψ_1 в различные моменты времени при образовании гравитационных волн в процессе столкновения и слиянии частиц равной массы в потоках Риччи в аксиально-симметричной метрике: скорость частиц в два раза меньше, чем для данных на рис. 1.

Так, при уменьшении скорости столкновения частиц в два раза характерный период колебаний увеличился в 2 раза [10] – рис. 2, 4. Влияние скорости соударения на амплитуду является различным в ближней и дальней зоне, что обусловлено длительностью формирования цуга гравитационных волн. В ближней зоне при $r=1$ это влияние практически отсутствует. С другой стороны, в работе [10] было установлено, что при увеличении массы частиц амплитуда колебаний потенциала V увеличивается пропорционально произведению масс $m_1 m_2$.

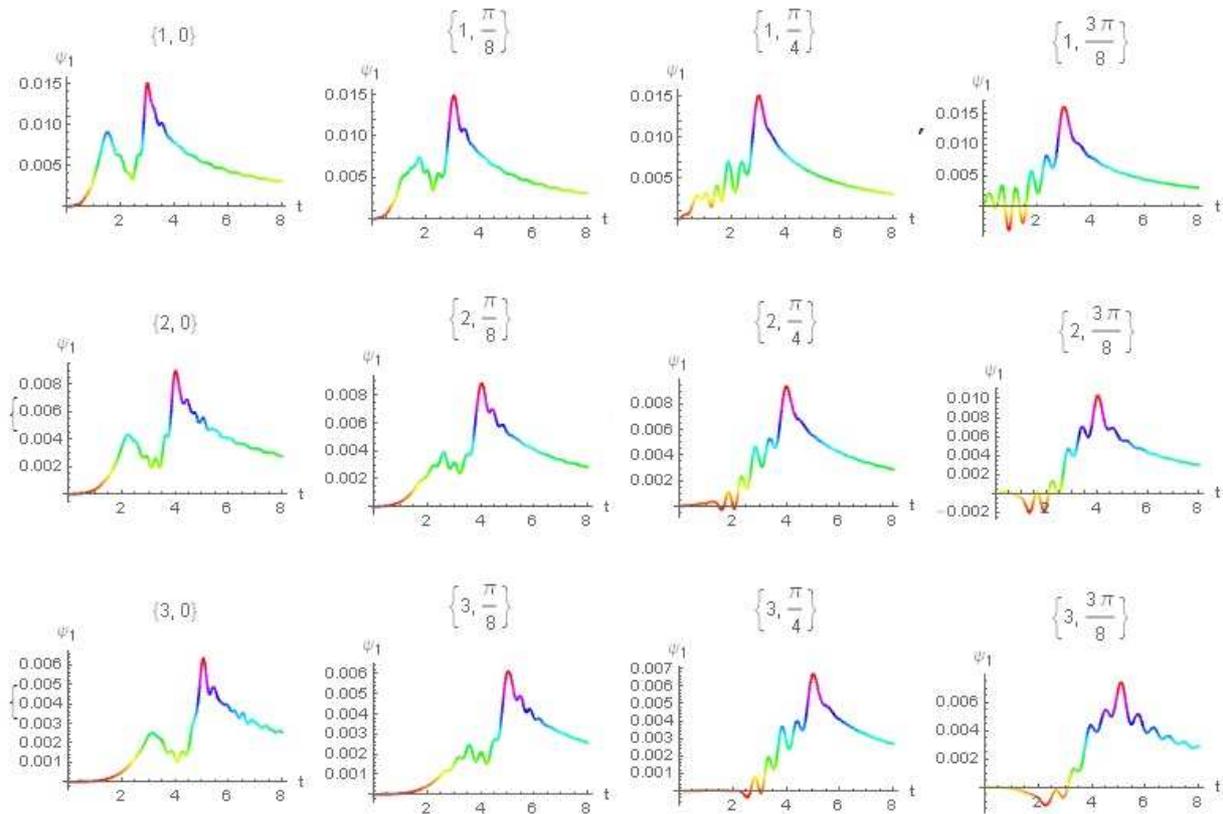


Рис. 4. Зависимости функции ψ_1 от времени в различных точках $\{r, \vartheta\}$ (координаты точек указаны над рисунками) в примере с данными (19).

Особый интерес представляют хаотические колебания, возникающие в нелинейной системе (10) и усиливаемые волновыми уравнениями (15) – рис. 5-6. Как известно, в составе сигнала события GW150914 был обнаружен шум неизвестной природы [1, 3], что в классическом случае может соответствовать задаче трех тел [29]. Однако численные эксперименты с моделью столкновения частиц в потоках Риччи позволяют обнаружить хаотическое поведение гравитационных потенциалов и в случае двух тел – рис. 7.

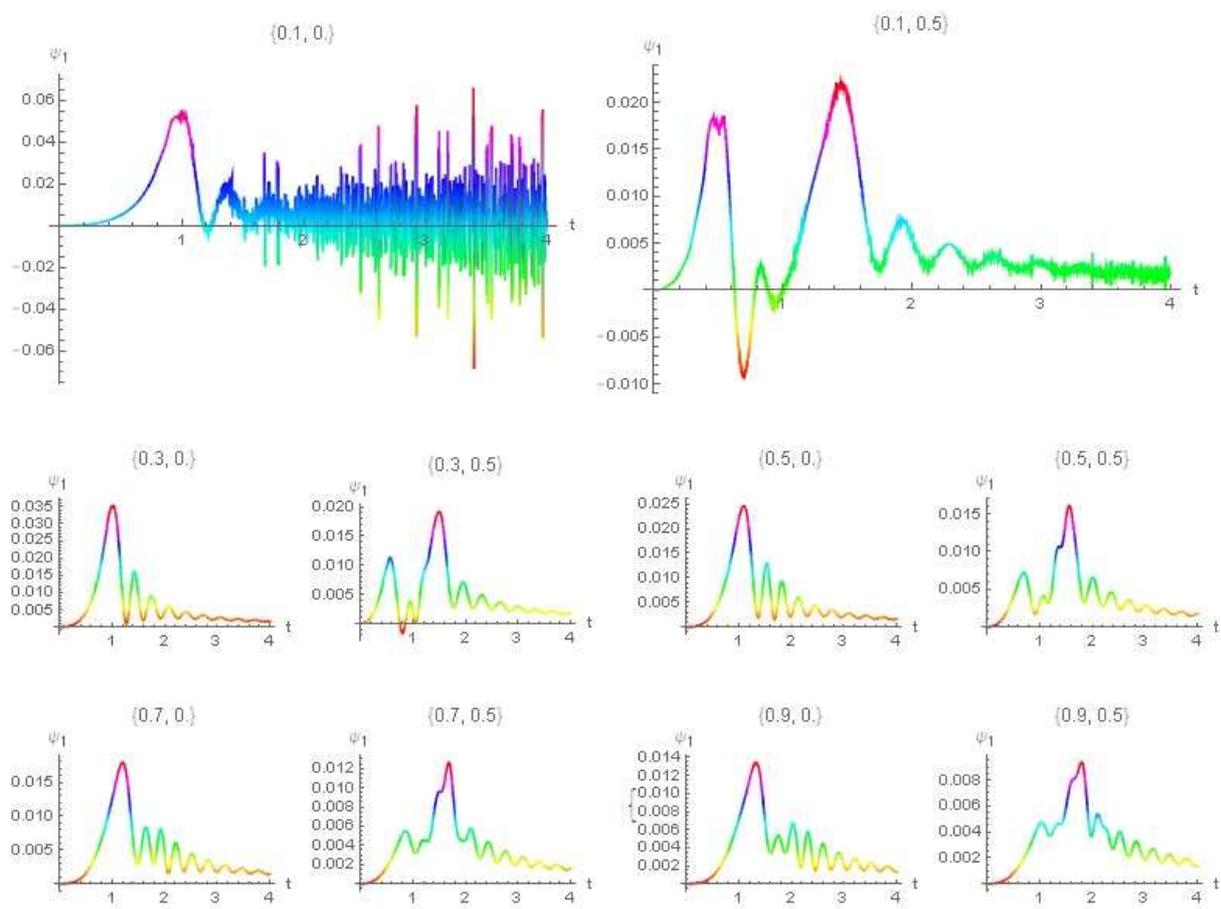


Рис. 5. Зависимости функции ψ_1 от времени в различных точках $\{\rho, z\}$ (координаты точек указаны над рисунками) в варианте решения с данными (18).

На рис. 5-6 представлены данные численного решения задачи (10), (15)-(17) с данными (18)-(19) соответственно, демонстрирующие хаотическое поведение функции ψ_1 , обусловленное хаотическим поведением гравитационных потенциалов – рис. 7. Из данных на рис. 5-7 следует, что хаотические колебания развиваются в узком слое, прилегающем к границе расчетной области $\rho = r_0$.

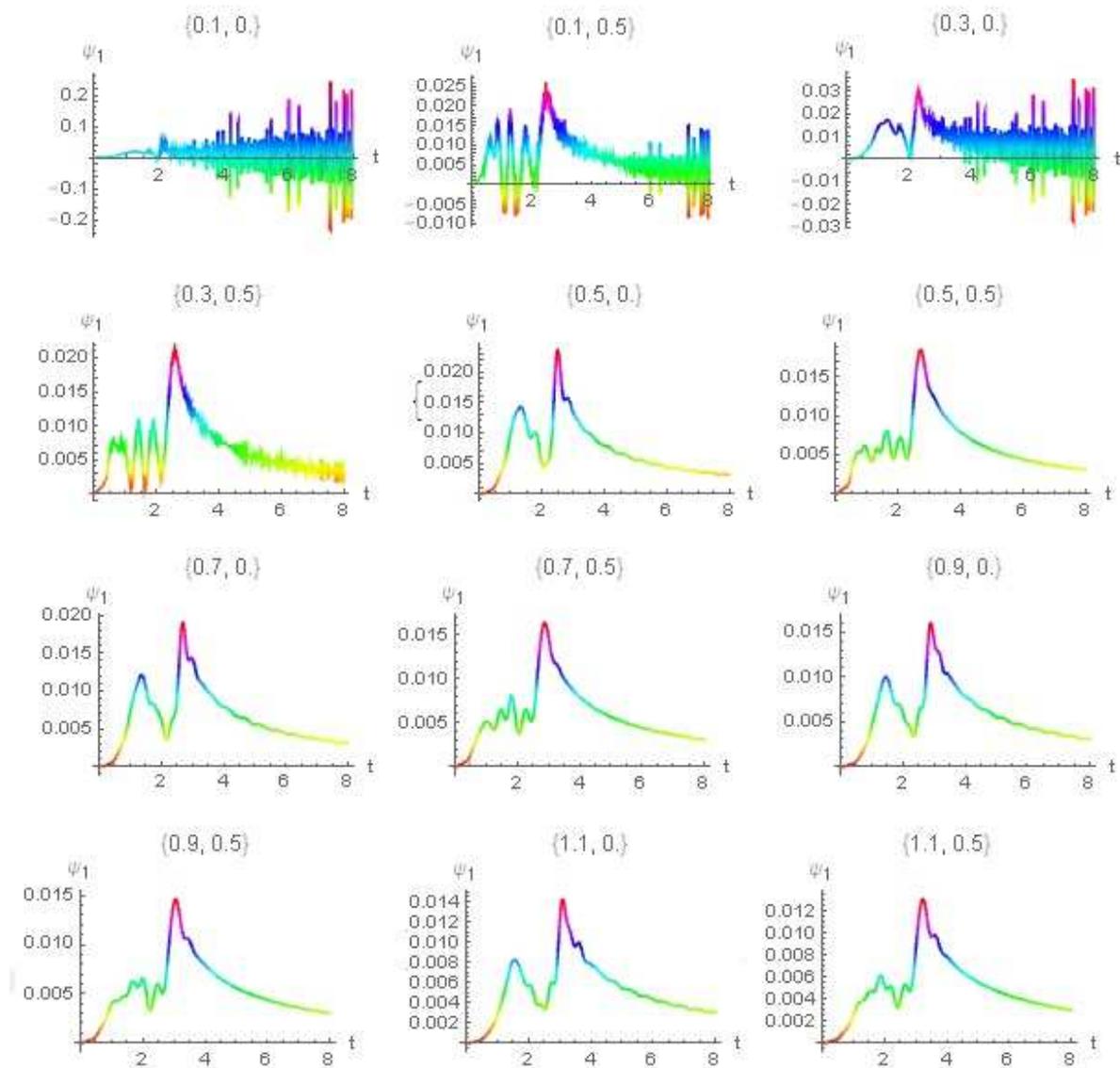


Рис. 6. Зависимости функции ψ_1 от времени в различных точках $\{\rho, z\}$ (координаты точек указаны над рисунками) в примере с данными (19).

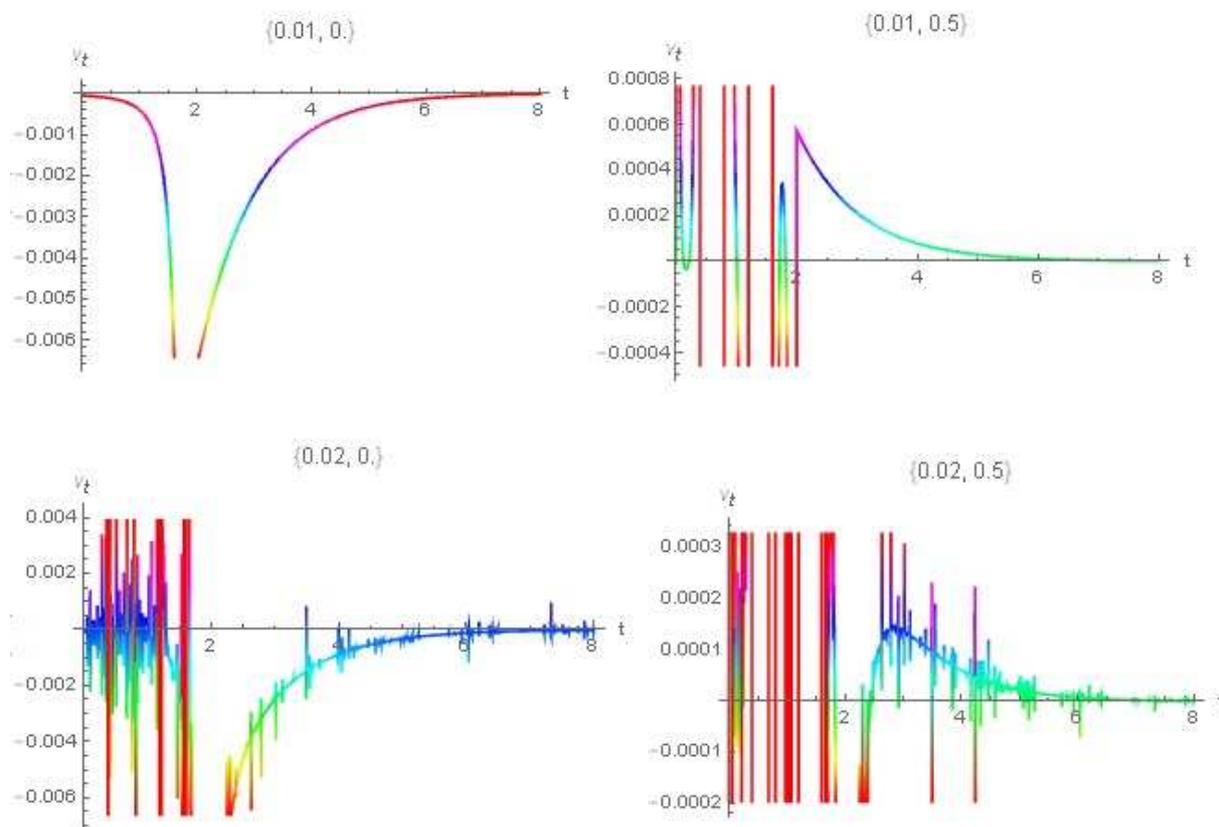


Рис. 7. Зависимости функции V_t от времени в различных точках $\{\rho, z\}$ (координаты точек указаны над рисунками) в примере с данными (19).

На рис. 7 представлены результаты моделирования производной по времени гравитационного потенциала V , фигурирующей в качестве источника в системе уравнений (15) в задаче о столкновении и слиянии двух тел с исходными данными (19). Из приведенных данных следует, что вблизи границы $\rho = r_0$ наблюдается хаотическое поведение V_t , чем и объясняется наличие шума в зависимости ψ_1 от времени в указанной области – рис 6-7.

На рис. 8 представлены данные численного решения задачи (10), (15)-(17) с данными (19), демонстрирующие хаотическое поведение функций

ψ_2, ψ_3 , обусловленное хаотическим поведением гравитационных потенциалов. Из приведенных на рис. 8 данных следует, что и в этом случае хаотические колебания развиваются в слое, прилегающем к границе расчетной области $\rho = r_0$.

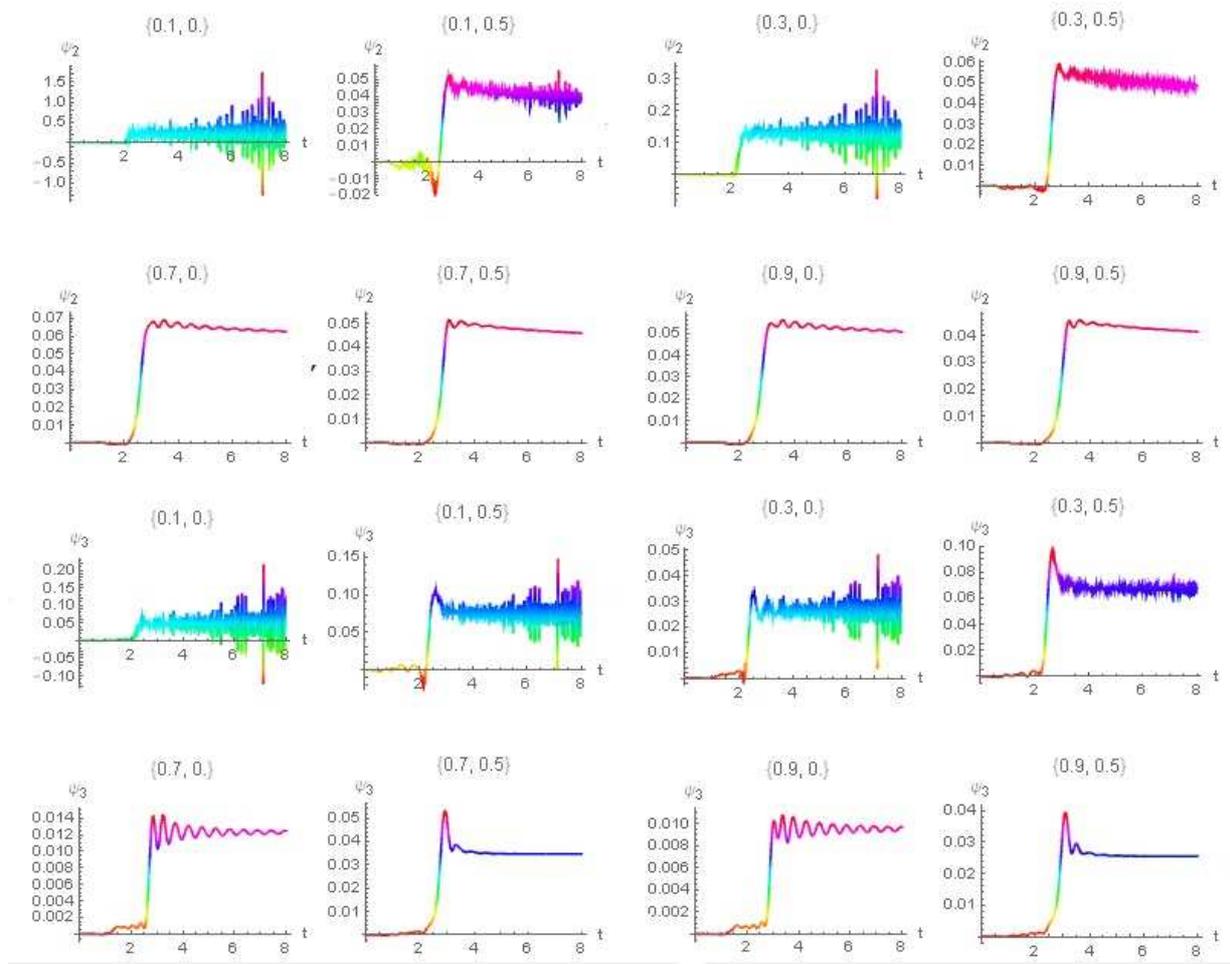


Рис. 8. Зависимости функций ψ_2, ψ_3 от времени в различных точках $\{\rho, z\}$ (координаты точек указаны над рисунками) в варианте расчетов с данными (19).

Отметим, что амплитуда функций ψ_2, ψ_3 в области слияния частиц довольно велика – рис. 8, что указывает на неприменимость линейной теории

в этой области. В этом случае необходимо использовать теорию нелинейных гравитационных волн. Однако решение этой задачи выходит за рамки настоящей работы.

Наконец, заметим, что развитая теория излучения гравитационных волн при слиянии сингулярностей в потоках Риччи может оказаться полезной в решении задач астрофизики, связанных с интерпретацией экспериментальных данных [1-3].

Библиографический список

1. Abbott B.P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger// *Phys. Rev. Let.*, PRL 116, 061102, 12 Feb., 2016.
2. Abbott B.P. et al. Properties of the binary black hole merger GW150914/The LIGO Scientific Collaboration and The Virgo Collaboration, 11 Feb 2016; arXiv:1602.03840.
3. Abbott B.P. et al. The basic physics of the binary black hole merger GW150914/The LIGO Scientific Collaboration and The Virgo Collaboration, Aug 5 2016; arXiv:1608.01940.
4. Baumgarte T., Shapiro S. *Numerical Relativity: Solving Einstein's Equations on the Computer.* – Cambridge University Press, 2010.
5. Zilhao M. Loffler F. An Introduction to the Einstein Toolkit// arXiv:1305.5299v2, 2 Jun 2013.
6. Maione F., De Pietri R., Loffler F. Binary neutron star merger simulations with different initial orbital frequency and equation of state// arXiv: 1605.03424v1, 11 may 2016.
7. Schwarzschild K. *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie// Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse, 189–196 (1916); On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory//arXiv: physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 May 1999.*
8. Einstein A., Infeld L., Hoffmann B. *Gravitational Equations and Problems of Motion//Ann. Math.*, 39, 65-100, 1938.
9. Einstein A., Infeld L. *Gravitational Equations and Problems of Motion II//Ann. Math.*, 41, 455-564, 1940; Einstein A., Infeld L. *On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math.*, 1, 209—241, 1949.
10. Трунев А.П. Столкновение частиц в потоках Риччи/ А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №07(121).
11. Hamilton R.S. Three manifolds with positive Ricci curvature// *Jour. Diff. Geom.* 17, 255-306, 1982.
12. Hamilton R.S. Four manifolds with positive curvature operator. *Jour. Diff. Geom.* 24, 153-179, 1986.

13. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces// *Contemp. Math.* 71, 237-261, 1988.
14. Hamilton R.S. The Harnack estimate for the Ricci flow// *Jour. Diff. Geom.* 37, 225-243, 1993.
15. Hamilton R.S. A compactness property for solutions of the Ricci flow// *Amer. Jour. Math.* 117, 545-572, 1995.
16. Perelman G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications// *arXiv:math/0211159*, 11 Nov 2002.
17. Perelman G. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds// *arXiv:math/0307245*, 17 Jul 2003.
18. Perelman G. Ricci flow with surgery on three-manifolds// *arXiv:math/0303109*, 10 Mar 2003.
19. Silberstein L. Two-Centers Solution of the Gravitational Field Equations, and the Need for a Reformed Theory of Matter// *Phys. Rev.* 49, 268, 1936.
20. Трунев А.П. Динамика релятивистских частиц в метрике галактик / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №02(116). С. 1619 – 1641. – IDA [article ID]: 1161602101. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/02/pdf/101.pdf>.
21. Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, Eduard Herltet. *Exact Solutions to Einstein's Field Equations. Second Edition.* Cambridge University Press. ISBN 0-521-46136-7, 2003.
22. Synge J.L. *Relativity: the General Theory.* - Amsterdam, 1960.
23. Petrov A.Z. *New methods in general relativity.* - Moscow: Nauka, 1966.
24. Landau L.D., Lifshitz E.M. *The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.).* Pergamon Press. ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.
25. Einstein A., Rosen N. Two-Body Problem in General Relativity Theory// *Phys. Rev.* 49, 404 – Published 1 March 1936.
26. Трунев А.П. Геометрическая турбулентность / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №05(099). С. 1003 – 1023. – IDA [article ID]: 0991405069. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/05/pdf/69.pdf>
27. Трунев А.П. Геометрическая турбулентность и квантовая теория. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 с.
28. Трунев А.П. Общая теория относительности и метрика галактик / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №10(094). С. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf>
29. Fiziev P.P. On gravitational waves from classical three body problem// *arXiv:1609.02604v2*, 15 Sep 2016.

References

1. Abbott B.P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger// *Phys. Rev. Let.*, PRL 116, 061102, 12 Feb., 2016.

2. Abbott B.P. et al. Properties of the binary black hole merger GW150914/The LIGO Scientific Collaboration and The Virgo Collaboration, 11 Feb 2016; arXiv:1602.03840.
3. Abbott B.P. et al. The basic physics of the binary black hole merger GW150914/The LIGO Scientific Collaboration and The Virgo Collaboration, Aug 5 2016; arXiv:1608.01940.
4. Baumgarte T., Shapiro S. Numerical Relativity: Solving Einstein's Equations on the Computer. – Cambridge University Press, 2010.
5. Zilhao M. Loffler F. An Introduction to the Einstein Toolkit// arXiv:1305.5299v2, 2 Jun 2013.
6. Maione F., De Pietri R., Loffler F. Binary neutron star merger simulations with different initial orbital frequency and equation of state// arXiv: 1605.03424v1, 11 may 2016.
7. Schwarzschild K. Uber das Gravitations-feld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie// Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse, 189–196 (1916); On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory//arXiv: physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 May 1999.
8. Einstein A., Infeld L., Hoffmann B. Gravitational Equations and Problems of Motion//Ann. Math., 39, 65-100, 1938.
9. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and Problems of Motion II//Ann. Math., 41, 455-564, 1940; Einstein A., Infeld L. On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1, 209—241, 1949.
10. Trunев A.P. Stolknovenie chastic v potokah Richchi/ A.P. Trunев // Politematicheskij setevoy jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №07(121).
11. Hamilton R.S. Three manifolds with positive Ricci curvature// Jour. Diff. Geom. 17, 255-306, 1982.
12. Hamilton R.S. Four manifolds with positive curvature operator. Jour. Diff. Geom. 24, 153-179, 1986.
13. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces// Contemp. Math. 71, 237-261, 1988.
14. Hamilton R.S. The Harnack estimate for the Ricci flow// Jour. Diff. Geom. 37, 225-243, 1993.
15. Hamilton R.S. A compactness property for solutions of the Ricci flow// Amer. Jour. Math. 117, 545-572, 1995.
16. Perelman G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications// arXiv:math/0211159, 11 Nov 2002.
17. Perelman G. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds//arXiv:math/0307245, 17 Jul 2003.
18. Perelman G. Ricci flow with surgery on three-manifolds//arXiv:math/0303109, 10 Mar 2003.
19. Silberstein L. Two-Centers Solution of the Gravitational Field Equations, and the Need for a Reformed Theory of Matter//Phys. Rev. 49, 268, 1936.
20. Trunев A.P. Dinamika reljativistskih chastic v metrike galaktik / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoy jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №02(116). S. 1619 – 1641. – IDA [article ID]: 1161602101. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/02/pdf/101.pdf>.

21. Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, Eduard Herltet. Exact Solutions to Einstein's Field Equations. Second Edition. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46136-7, 2003.
22. Synge J.L. Relativity: the General Theory. - Amsterdam, 1960.
23. Petrov A.Z. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.
24. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). Pergamon Press. ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.
25. Einstein A., Rosen N. Two-Body Problem in General Relativity Theory//Phys. Rev. 49, 404 – Published 1 March 1936.
26. Trunev A.P. Geometricheskaja turbulentnost' / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №05(099). S. 1003 – 1023. – IDA [article ID]: 0991405069. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/05/pdf/69.pdf>
27. Trunev A.P. Geometricheskaja turbulentnost' i kvantovaja teorija. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 s.
28. Trunev A.P. Obshhaja teorija odnositel'nosti i metrika galaktik / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №10(094). S. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf>
29. Fiziev P.P. On gravitational waves from classical three body problem// arXiv:1609.02604v2, 15 Sep 2016.