УДК 631.872

05.00.00 Технические науки

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ВЕНТИЛЯЦИИ С ПЕРЕМЕННЫМ РАСХОДОМ ВОЗДУХА ВДОЛЬ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОСИ РЕАКТОРА В ПРОЦЕССЕ КОМПОСТИРОВАНИЯ

Пиотровский Дмитрий Леонидович
Д.т.н., профессор, заведующий кафедрой автоматизации производственных процессов

Посмитная Лариса Александровна
Старший преподаватель кафедры автоматизации производственных процессов

Дружинина Ксения Васильевна
Аспирант кафедры автоматизации производственных процессов

Дружинина Ульяна Васильевна
Аспирант кафедры автоматизации производственных процессов
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», Краснодар, Россия

В статье получена математическая модель системы вентиляции с переменным расходом воздуха вдоль вертикальной оси реактора в процессе компостирования. Решена задача выбора способа подачи воздуха в биореактор, обеспечивающего снижение температуры субстрата вдоль оси биореактора. Предложенный способ обеспечивает снижение температуры и влагосодержания газовой фазы, что приводит к изменению динамики процесса компостирования. Статья подготовлена в рамках выполнения научного проекта 16-48-230441 а(р) «Математическое моделирование процессов, протекающих в автоматизированной установке для круглогодичного производства органических удобрений в условиях Краснодарского края», финансируемого РФФИ и администрацией Краснодарского края

Ключевые слова: КОМПОСТИРОВАНИЕ, СИСТЕМА ВЕНТИЛЯЦИИ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ГАЗОВАЯ ФАЗА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ БАЛАНС ТЕПЛОТЫ И МАССЫ

UDC 631.872

Technical sciences

MATHEMATICAL MODEL OF A VENTILATION SYSTEM WITH VARIABLE AIR FLOW ALONG THE VERTICAL AXIS OF THE REACTOR IN THE COMPOSTING PROCESS

Piotrovskiy Dmitriy Leonidovich
Dr.Sci.Tech., prof., head of the Department of automation of production processes

Posmitnaja Larisa Aleksandrovna
Senior lecturer, Department of automation of production processes

Druzhinina Ksenija Vasilievna
graduate student, Department of automation of production processes

Druzhinina Ulyana Vasilievna
graduate student, Department of automation of production processes
Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia

In the article, we present the mathematical model of a ventilation system with variable air flow along the vertical axis of the reactor in the composting process. We have solved the problem of the choice of the method of supplying air to the bioreactor, reducing the temperature of the substrate along the axis of the bioreactor. The proposed method provides a reduction of temperature and moisture content of the gas phase, which leads to a change in the dynamics of the composting process. This article was prepared in the framework of the scientific project 16-48-230441 a(R) "Mathematical modeling of the processes occurring in the automated installation for year-round production of organic fertilizers in the conditions of the Krasnodar region", financed by RFBR and administration of the Krasnodar region

Keywords: COMPOSTING, VENTILATION SYSTEM, MATHEMATICAL MODEL, DIFFERENTIAL HEAT BALANCE AND MASS, GAS PHASE

Doi: 10.21515/1990-4665-121-119

Построение математической модели, описывающей распределение температуры и влажности субстрата вдоль оси биореактора во времени для испарительного охлаждения субстрата позволяет решить задачу выбора способа подачи воздуха в биореактор, обеспечивающего снижение

вариации температуры субстрата вдоль оси биореактора при длительной вентиляции субстрата.

При построении модели были приняты следующие допущения.

1. За время моделирования перемешивание субстрата отсутствует.

2. Теплообмен через стенки реактора отсутствует.

3. Направление движения воздуха – от основания к верхушке вдоль оси биореактора.

4. Параметры состояния субстрата и воздуха системы вентиляции однородны в плоскости горизонтального сечения биореактора. Это позволяет рассматривать одномерную модель биореактора.

5. Теплопроводность и влагопроводность субстрата не рассматриваются вследствие их малого влияния на рассматриваемый процесс.

Хотя в большинстве биореакторов перенос теплоты и влаги взаимосвязаны вследствие использования испарительного охлаждения, большинство существующих на сегодняшний день моделей либо пренебрегают балансом влаги, либо включают его в упрощенной форме. Точное поддержание влажности субстрата технически весьма затруднено вследствие сложности измерения и неоднородности субстрата. В результате такой подход неприменим при компостировании [1].

Влияние испарительного охлаждения субстрата на процесс может быть учтено, если рассматривать субстрат как некую псевдооднородную среду, состоящую из двух фаз, находящихся в равновесии, и имеющую усредненные свойства воздуха и субстрата. Это в свою очередь предполагает необходимость использования насыщенного влагой воздуха для вентиляции. Однако для активации испарения, а следовательно и охлаждения субстрата, используется ненасыщенный (сухой) воздух, поэтому предположение о равновесии между воздухом и субстратом также неприемлемо[2].

Таким образом, математическая модель должна рассматривать частицы субстрата и расстояние между ними, заполненное газовой средой, как отдельные фазы, и описывать процессы тепломассопереноса между ними. Поэтому мы будем рассматривать математическую модель системы вентиляции при компостировании субстрата в биореакторе как модель тепломассопереноса в двухфазной среде [3].

Для одномерной модели биореактора дифференциальный баланс теплоты и массы одной фазы в элементарном объеме площадью S и длиной Δx за время Δt можно представить в виде следующего выражения:

$$\begin{cases} M(x+\Delta x) - M(x) = \rho S \Delta x \dfrac{\partial M}{\partial t} \Delta t \\ Q(x+\Delta x) - Q(x) = c\rho S \Delta x \dfrac{\partial T}{\partial t} \Delta t \end{cases}, \qquad (1)$$

где $M(x)$ и $M(x+\Delta x)$ – масса соответственно в точках x и Δx, кг;

T – температура, С;

c – теплоемкость, Дж/(кг*^{0}С);

ρ – плотность, кг/м^3.

В элементарном объеме субстрата происходят процессы массопереноса между субстратом и газовой фазой $\left(\dfrac{dM_w}{dt}\right)$:

- испарение воды с поверхности субстрата в газовую фазу;

- конденсация воды из газовой фазы на поверхность субстрата.

В элементарном объеме субстрата также происходят процессы теплопереноса между субстратом и газовой фазой:

- конвективный теплообмен между поверхностью субстрата и газовой фазой $\left(\dfrac{dQ_g}{dt}\right)$;

- изменение энтальпии субстрата (газовой фазы) при испарении (конденсации) воды $\left(\dfrac{dQ_s}{dt}\right)$.

Для коллоидной капиллярно-пористой среды процесс массообмена (влагообмена) между субстратом и газовой фазой при испарительном охлаждении может быть представлен следующим уравнением:

$$\frac{dM_w}{dt} = Ka\left(\varphi_s - \varphi_s^*\right), \qquad (2)$$

где $\frac{dM_w}{dt}$ – изменение массы влаги в субстрате или газовой среде (с соответствующим знаком), кг;

Ka – коэффициент массопереноса влаги между субстратом и газовой фазой, кг воды/(с*м^3);

φ_s – влагосодержание субстрата, кг воды/кг субстрата;

φ_s^* – равновесное влагосодержание субстрата при известных температуре и влагосодержании газовой фазы, кг воды/кг субстрата.

Соответственно изменение энтальпии субстрата, связанное с испарением влаги в газовую фазу, может быть представлено следующим выражением:

$$\frac{dQ_s}{dt} = \lambda Ka\left(\varphi_s - \varphi_s^*\right), \qquad (3)$$

где λ – удельная теплота испарения воды, Дж/кг воды.

Процесс теплообмена между субстратом и газовой фазой может быть представлен следующим выражением:

$$\frac{dQ_g}{dt} = ha\left(T_g - T_s\right), \qquad (4)$$

где ha – коэффициент теплообмена между субстратом и газовой фазой, Дж/(с*м^3*К);

T_g – температура газовой фазы, ^{0}С;

T_s – температура субстрата, ^{0}С.

Выражение для Ka, φ_s^*, ha определено экспериментально в виде эмпирического выражения:

$$Ka = \left(a_1 + a_2\left[T_g + 273.15\right]\right)\varphi_s - a_3 + a_4\left(T_g + 273.15\right), \quad (5)$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 – экспериментально определенные коэффициенты.

$$\varphi_s^* = \left[\frac{\ln(1 - a_{wg}^{C_5})}{-\exp(C_1 + C_2 T_g)}\right]^{\frac{1}{(C_3 + C_4 T_g)}}, \quad (6)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 – экспериментально определенные коэффициенты.

$$ha = b_1\left[\frac{G(T_g + 273.15)}{b_2 P}\right]^{b_3}, \quad (7)$$

где b_1, b_2, b_3 – экспериментально определенные коэффициенты.

Для двухфазной модели процесса из (1), учитывая (2) – (7), а также пренебрегая теплопроводностью и влагопроводностью субстрата, дифференциальный баланс теплоты и массы в элементарном объеме площадью S и длиной Δx за время Δt можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} M_w(x+\Delta x) - M_w(x) = -\varepsilon\rho_g S\Delta x \dfrac{\partial \varphi_g}{\partial t}\Delta t + Ka\left(\varphi_s - \varphi_s^*\right)S\Delta x\Delta t \\ M_w(x+\Delta x) - M_w(x) = -\rho_s S\Delta x \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial t}\Delta t - Ka\left(\varphi_s - \varphi_s^*\right)S\Delta x\Delta t \\ Q_g(x+\Delta x) - Q_g(x) = -c_g\rho_g S\Delta x \dfrac{\partial T_g}{\partial t}\Delta t - ha\left(T_g - T_s\right)S\Delta x\Delta t \\ Q_s(x+\Delta x) - Q_s(x) = -c_s\rho_s S\Delta x \dfrac{\partial T_s}{\partial t}\Delta t + ha\left(T_g - T_s\right)S\Delta x\Delta t - \lambda Ka\left(\varphi_s - \varphi_s^*\right)S\Delta x\Delta t \end{cases}, \quad (8)$$

где $\varepsilon\rho_g$ – плотность газа с учетом порозности субстрата, кг воздуха/м^3;

ρ_s – плотность субстрата, кг субстрата/м^3;

φ_g – влагосодержание газовой фазы, кг воды/кг воздуха.

Для моделирования системы вентиляции с боковым подачей воздуха представим плотность подачи воздуха вдоль оси биореактора в виде функции $g(x) = \dfrac{dG}{dx}(x)$, определенной на интервале $x \in [0; H]$, где H – высота биореактора. Поскольку в процессе применяется принудительная вентиляция, то $g(x) \geq 0$ для $x \in [0; H]$, причем $g(x) = 0$ соответствует

традиционной системе вентиляции с постоянным потоком воздуха вдоль оси биореактора.

Тогда поток воздуха системы вентиляции в точке x можно представить в виде G(x), причем для непрерывности потока необходимо выполнение условия:

$$G(x) = G(0) + \int_0^x g(x)dx, \qquad g(x) \geq 0 \tag{9}$$

где G(0) – поток воздуха в основании реактора.

Таким образом, выражение (9) описывает поток воздуха в точке вертикальной оси биореактора для традиционной системы вентиляции при G(0)=G, $g(x) = 0$; для системы вентиляции с боковой подачей воздуха при $G(0) \geq 0$, $g(x) > 0$.

Из (8) имеем:

$$M_w(x+\Delta x) - M_w(x) = -\varepsilon\rho_g S\Delta x \frac{\partial\varphi_g}{\partial t}\Delta t + Ka\left(\varphi_s - \varphi_s^*\right)S\Delta x\Delta t + g\Delta x\varphi_{вх}S\Delta t, \tag{10}$$

где $\varphi_{вх}$ – влагосодержание подаваемого воздуха системы вентиляции, кг воды/кг воздуха.

Запишем массовый поток в точках x и Δx:

$$M_w(x) = G\varphi_g(x)S\Delta t, \tag{11}$$

$$M_w(x+\Delta x) = (G + g\cdot\Delta x)\varphi_g(x+\Delta x)S\Delta t. \tag{12}$$

Подставляя (11), (12) в (10), получаем:

$$\varepsilon\rho_g \frac{\partial\varphi_g}{\partial t} + G\frac{\varphi_g(x+\Delta x) - \varphi_g(x)}{\Delta x} = Ka\left(\varphi_s - \varphi_s^*\right) - g\left(\varphi_g(x+\Delta x) - \varphi_{вх}\right) \tag{13}$$

Производя предельный переход при $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$, получаем:

$$\varepsilon\rho_g \frac{\partial\varphi_g}{\partial t} + G\frac{\partial\varphi_g}{\partial x} = Ka\left(\varphi_s - \varphi_s^*\right) - g\left(\varphi_g - \varphi_{вх}\right). \tag{14}$$

Из (8) имеем:

$$M_w(x+\Delta x) - M_w(x) = -\rho_s S\Delta x \frac{\partial\varphi_s}{\partial t}\Delta t - Ka\left(\varphi_s - \varphi_s^*\right)S\Delta x\Delta t. \tag{15}$$

Поскольку массовый поток субстрата через плоскости сечения в

точках x и Δx отсутствует, $M_w(x+\Delta x)-M_w(x)=0$. Тогда из (15):

$$0=-\rho_s\Delta x\frac{\partial\varphi_s}{\partial t}-Ka\left(\varphi_s-\varphi_s^*\right)\Delta x. \quad (16)$$

Производя предельный переход при $\Delta x\to 0$, $\Delta t\to 0$ получаем:

$$\frac{\partial\varphi_s}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_s}\left[Ka\left(\varphi_s-\varphi_s^*\right)\right]. \quad (17)$$

Из (8) имеем:

$$Q_g(x+\Delta x)-Q_g(x)=-c_g\varepsilon\rho_g S\Delta x\frac{\partial T_g}{\partial t}\Delta t-ha\left(T_g-T_s\right)S\Delta x\Delta t+g\Delta xS\Delta tc_gT_{вх}, \quad (18)$$

где $T_{вх}$ – температура подаваемого воздуха системы вентиляции, ^{o}С.

Запишем массовый поток в точках x и Δx:

$$Q_g(x)=GS\Delta tc_gT_g(x), \quad (19)$$

$$Q_g(x+\Delta x)=(G+g\Delta x)S\Delta tc_gT_g(x+\Delta x). \quad (20)$$

Подставляя (19), (20) в (18), получаем:

$$Gc_g\frac{T_g(x+\Delta x)-T_g(x)}{\Delta x}+\rho_gc_g\frac{\partial T_g}{\partial t}=-ha\left(T_g-T_s\right)-c_gg\left(T_g(x+\Delta x)-T_{вх}\right). \quad (21)$$

Производя предельный переход при $\Delta x\to 0$, $\Delta t\to 0$ и учитывая, что $\rho_g=\varepsilon\rho_g$, $c_g=c_{pg}+\varphi_gc_{pv}$, где c_{pg} – удельная теплоемкость сухого газа, Дж/(кг *К); c_{pv} – удельная теплоемкость водяного пара, Дж/(кг*К), получаем:

$$G(c_{pg}+\varphi_gc_{pv})\frac{\partial T_g}{\partial x}+\varepsilon\rho_g(c_{pg}+\varphi_gc_{pv})\frac{\partial T_g}{\partial t}=-ha\left(T_g-T_s\right)-g(c_{pg}+\varphi_gc_{pv})\left(T_g-T_{вх}\right). \quad (22)$$

Из (8) имеем:

$$Q_s(x+\Delta x)-Q_s(x)=-c_s\rho_sS\Delta x\frac{\partial T_s}{\partial t}\Delta t+ha\left(T_g-T_s\right)S\Delta x\Delta t-\lambda Ka\left(\varphi_s-\varphi_s^*\right)S\Delta x\Delta t. \quad (23)$$

Поскольку тепловой поток субстрата через плоскости сечения в точках x и Δx отсутствует, $Q_s(x+\Delta x)-Q_s(x)=0$. Тогда из (23):

$$c_s\rho_s\frac{\partial T_s}{\partial t}=ha\left(T_g-T_s\right)-\lambda Ka\left(\varphi_s-\varphi_s^*\right). \quad (24)$$

Учитывая $c_s = c_{ps} + \varphi_s c_{pw}$, где c_{ps} – удельная теплоемкость сухого субстрата, Дж/(кг*К); c_{pw} – удельная теплоемкость воды, Дж/(кг*К) и производя предельный переход при $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$, получаем:

$$(c_{ps} + \varphi_s c_{pw})\rho_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = ha(T_g - T_s) - \lambda Ka(\varphi_s - \varphi_s^*). \quad (25)$$

Из (14), (17), (22), (25) получаем математическую модель разработанной системы вентиляции биореактора в виде системы уравнений, описывающих тепловой и массовый баланс двухфазной среды:

$$\begin{cases} \varepsilon\rho_g \dfrac{\partial \varphi_g}{\partial t} + G\dfrac{\partial \varphi_g}{\partial x} = Ka(\varphi_s - \varphi_s^*) - g(\varphi_g - \varphi_{вх}) \\ \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho_s}\left[Ka(\varphi_s - \varphi_s^*)\right] \\ G(c_{pg} + \varphi_g c_{pv})\dfrac{\partial T_g}{\partial x} + \varepsilon\rho_g(c_{pg} + \varphi_g c_{pv})\dfrac{\partial T_g}{\partial t} = -ha(T_g - T_s) - g(c_{pg} + \varphi_g c_{pv})(T_g - T_{вх}) \\ (c_{ps} + \varphi_s c_{pw})\rho_s \dfrac{\partial T_s}{\partial t} = ha(T_g - T_s) - \lambda Ka(\varphi_s - \varphi_s^*) \end{cases}. \quad (26)$$

Учитывая, что традиционная система вентиляции является частным случаем системы с боковой подачей воздуха, для которого $g(x) = 0$ [4], получаем математическую модель традиционной системы вентиляции биореактора в виде системы уравнений, описывающих тепловой и массовый баланс двухфазной среды:

$$\begin{cases} \varepsilon\rho_g \dfrac{\partial \varphi_g}{\partial t} + G\dfrac{\partial \varphi_g}{\partial x} = Ka(\varphi_s - \varphi_s^*) \\ \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho_s}\left[Ka(\varphi_s - \varphi_s^*)\right] \\ G(c_{pg} + \varphi_g c_{pv})\dfrac{\partial T_g}{\partial x} + \varepsilon\rho_g(c_{pg} + \varphi_g c_{pv})\dfrac{\partial T_g}{\partial t} = -ha(T_g - T_s) \\ (c_{ps} + \varphi_s c_{pw})\rho_s \dfrac{\partial T_s}{\partial t} = ha(T_g - T_s) - \lambda Ka(\varphi_s - \varphi_s^*) \end{cases} \quad (27)$$

Из приведенных уравнений видно, что система уравнений (27) для традиционной системы вентиляции отличается отсутствием двух слагаемых, описывающих снижение температуры и влажности воздуха в

точке оси биореактора за счет добавления воздуха с исходными параметрами. Это позволяет на основе аналитического вида моделей сделать следующий вывод. Цель, поставленная при разработке системы вентилирования, достигнута: слагаемые $-g(\varphi_g - \varphi_{вх}) < 0$ и $-g(c_{pg} + \varphi_g c_{pv})(T_g - T_{вх}) < 0$ (соответственно в тепловом и массовом балансе газовой фазы) обеспечивают снижение температуры и влагосодержания газовой фазы. Это, в свою очередь, приводит к изменению динамики процесса компостирования.

Данная статья подготовлена в рамках выполнения научного проекта 16-48-230441 а(р) «Математическое моделирование процессов, протекающих в автоматизированной установке для круглогодичного производства органических удобрений в условиях Краснодарского края», финансируемого РФФИ и администрацией Краснодарского края.

Литература

1. MacDonald, L. Physical and Mathematical Modelling of the Composting Process / L. MacDonald - University of Guelph, 1995.

2. Московец А.Л. Постановка задачи и анализ оптимального управления процессом компостирования/ А.Л.Московец, С.В.Усатиков, Д.Л.Пиотровский //депонированная рукопись № 1926-В2004. - 06.12.2004

3. Пиотровский Д.Л. Автоматизация производства органических удобрений/ Д.Л. Пиотровский, Т.Г.Шарапкина// Автоматизация. Современные технологии. 2004. - № 7. - С. 9-11

4.Пиотровский Д.Л. Теоретические основы построения автоматических систем управления процессами производства органических компостов: диссертация … доктора технических наук: 05.13.06 . - Краснодар, 2007

References

1. MacDonald, L. Physical and Mathematical Modelling of the Composting Process / L. MacDonald - University of Guelph, 1995.

2. Moskovec A.L. Postanovka zadachi i analiz optimal'nogo upravlenija processom kompostirovanija/ A.L.Moskovec, S.V.Usatikov, D.L.Piotrovskij //deponirovannaja rukopis' № 1926-B2004. - 06.12.2004

3. Piotrovskij D.L. Avtomatizacija proizvodstva organicheskih udobrenij/ D.L. Piotrovskij, T.G.Sharapkina// Avtomatizacija. Sovremennye tehnologii. 2004. - № 7. - S. 9-11

4. Piotrovskij D.L. Teoreticheskie osnovy postroenija avtomaticheskih sistem upravlenija processami proizvodstva organicheskih kompostov: dissertacija … doktora tehnicheskih nauk: 05.13.06 . - Krasnodar, 2007