

УДК 515.1+530.1

UDC 515.1+530.1

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and mathematics

**ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ЗАКОН В
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ОТ КВАРКОВ
ДО ГАЛАКТИК****LOGARITHMIC LAW FOR DYNAMICAL
SYSTEMS FROM QUARKS TO GALAXIES**

Logarithmic law for dynamical systems from quarks to galaxies

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D., директор
Scopus Author ID: 6603801161
SPIN-код автора: 4945-6530

Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D., C.E.O.
Scopus Author ID: 6603801161

*A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада**A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada*

В работе рассмотрены различные примеры динамических систем, в которых движение определяется логарифмическим законом – системы кварков, гидродинамические системы, галактики. Указан общий характер углового движения на гипертеле в пространстве с произвольной размерностью и радиального движения в 6D в метрике с логарифмическим потенциалом. В 6D исследована метрика, описывающая случай движения с двумя центрами симметрии. Показано, что в такой метрике существует класс точных решений, логарифмически зависящих от координат центров гравитации. Установлено, что в спиральных галактиках орбитальное движение обусловлено логарифмическим потенциалом, который является точным решением уравнений поля в теории гравитации Эйнштейна. Наиболее известным и широко распространенным в природе случаем является турбулентное течение над гладкой или шероховатой поверхностью, в котором скорость логарифмически зависит от расстояния до стенки. Дан вывод логарифмического профиля скорости в турбулентном потоке из уравнений Навье-Стокса. Установлена аналогия логарифмического профиля скорости и логарифмического закона кавитации в случае разрушения материалов при ударных нагрузках. В электродинамике закон Ампера, описывающий взаимодействие проводников с током является следствием логарифмической зависимости векторного потенциала от расстояния до оси проводника. Существует, однако, альтернативный вывод закона Ампера из гипотезы Римана о связи токов с движением зарядов

The article discusses various examples of dynamical systems in which the motion is determined by the logarithmic law - quark systems, hydrodynamic systems, galaxies. Set the general nature of angular motion on a hypersphere in a space of arbitrary dimension and radial movement 6D in the metric of a logarithmic potential. We investigate the 6D metric describing the case of motion with two centers of symmetry. It is shown that in such a metric exists a class of exact solutions, logarithmically dependent on the gravity center coordinates. It was established that in spiral galaxies the orbital motion is due to the logarithmic potential, which is the exact solution of the field equations of Einstein's theory of gravity. The most well-known and widespread in nature case is turbulent flow over a smooth or rough surface, in which the mean velocity depends logarithmically on the distance from the wall. We derive the logarithmic velocity profile in turbulent flow from the Navier-Stokes equations. An analogy of the logarithmic velocity profile and the logarithmic law in the case of erosion of materials under impacts been proposed. In electrodynamics, Ampere's law, which describes the interaction of current-carrying conductors, is a consequence of the logarithmic dependence of the vector potential of the distance from the conductor axis. There is, however, an alternative derivation of Ampere law of the Riemann hypothesis about the currents due to the motion of charges

Ключевые слова: ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ,
ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ,
СУПЕРГРАВИТАЦИЯ, ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Keywords: GENERAL RELATIVITY,
SUPERGRAVITY, TURBULENCE, UNIFIED
FIELD THEORY

Введение

Логарифмический закон широко используется в физике в масштабах, начиная от систем кварков [1-5] и заканчивая спиральными галактиками [6-8]. Отметим, что в случае спиральных галактик логарифмический закон, описывающий зависимость гравитационного потенциала от расстояния до центра галактики, был установлен на основе обработки экспериментальных данных [6]. Было показано, что логарифмический закон является точным решением уравнений поля в теории гравитации Эйнштейна [6-8].

В гидродинамике известен логарифмический закон, описывающий зависимость средней скорости в турбулентном потоке от расстояния до стенки [9-18]. Этот закон первоначально был установлен путем обработки экспериментальных данных [9-10]. В наших работах [12-18] и других было показано, что логарифмический профиль скорости может быть выведен из уравнений Навье-Стокса.

В работе [8] исследована проблема описания движения частиц в единой теории поля в $6D$, в теории супергравитации в $112D$ и в метрике галактик. В $6D$ исследована метрика, описывающая случай движения с двумя центрами симметрии. Показано, что в такой метрике существует класс точных решений, зависящих логарифмически от координат центров гравитации. Указан общий характер углового движения на гиперсфере и радиального движения в $6D$ в метрике с логарифмическим потенциалом. Доказано, что аналогичные решения с логарифмическим потенциалом существуют в метрике галактик в метрической теории гравитации Эйнштейна. Обсуждается связь полученных решений с нелинейной электродинамикой, с теорией взаимодействия кварков и с теорией Янга-Миллса.

В настоящей работе рассмотрены различные примеры динамических систем, в которых движение определяется логарифмическим законом – системы кварков, проводники с током, гидродинамические системы, галактики.

Динамика кварков на гиперсфере

Рассмотрим систему, содержащую большое число частиц. В этом случае существует возможность описания динамики путем отображения в многомерное пространство [19-21]. Будем предполагать, что сильное взаимодействие частиц осуществляется в многомерном пространстве в соответствии с теорией относительности.

Рассмотрим обобщение уравнений Эйнштейна для пустого пространства на случай произвольного числа измерений [22-23]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k g_{\mu\nu} \quad (1)$$

Здесь k – некоторая функция, зависящая от размерности пространства, $R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}$ – тензор Риччи и метрический тензор соответственно.

В общем случае имеют место соотношения

$$\begin{aligned} R_{ik} &= R_{jk}^j, \quad R = g^{ik} R_{ik}, \\ R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} &= \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma_{\beta\delta}^{\mu} \Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\mu} \Gamma_{\mu\delta}^{\alpha}, \\ \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$ – тензор Римана, Γ_{kl}^i – символы Кристоффеля второго рода.

Отметим, что в модели (1) сохраняются все результаты, связанные с определением, так называемых пространств Эйнштейна [24-25], поскольку соответствующие метрики являются решением первого уравнения (1).

В метрической теории существует два основных типа законов физики. Первый тип законов вытекает из равенства нулю ковариантной производной метрического тензора:

$$Dg_{ik} = 0 \rightarrow \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk} \Gamma_{il}^m - g_{im} \Gamma_{kl}^m = 0 \quad (3)$$

В стандартной теории поля [26] из уравнений (3) выводится связь символов Кристоффеля с метрическим тензором в форме

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right)$$

Дальнейшее развитие теории строится на определении тензора кривизны и тензора Риччи в соответствии с выражениями (2). Заметим, что в общей теории относительности предполагается, что тензор энергии импульса материи связан с тензором Эйнштейна уравнением Эйнштейна [26].

Второй тип законов вытекает из равенства нулю ковариантной производной скорости,

$$Du^i = 0 \rightarrow \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \quad (4)$$

Отметим, что совокупность законов физики в форме (3)-(4) при заданных функциях Γ_{kl}^i полностью описывает динамику полей и частиц в многомерных пространствах.

В работах [22-23] представлена модель гравитации в многомерных пространствах размерностью D с метрикой

$$ds^2 = \psi(t, r) dt^2 - p(\psi) dr^2 - d\phi_1^2 - \sin^2 \phi_1 d\phi_2^2 - \sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2 d\phi_3^2 - \dots - \sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2 \dots \sin^2 \phi_{N-1} d\phi_N^2 \quad (5)$$

Здесь $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ - углы на единичной сфере, погруженной в $D - 1$ мерное пространство. Метрика (5) описывает многие важные случаи симметрии, используемые в физике элементарных частиц и в теории супергравитации. Например, 3-х сфера используется для представления $Sp(1) \cong SO(4) / SO(3) \cong SU(2)$ симметрии; 5-сфера описывает $SO(6) / SO(5) = SU(3) / SU(2)$ и т.п. Такой подход позволяет охватить все

многообразии материи, которую производит фабрика природы, путем выбора уравнения состояния $p = p(\psi)$.

Уравнения поля в метрике (5) сводятся к одному уравнению второго порядка [22-23]

$$-p'\psi_{tt} + \psi_{rr} = -Kp\psi - \frac{pp' - 2p''p\psi + p'^2\psi}{2p\psi} \psi_t^2 + \frac{p + p'\psi}{2p\psi} \psi_r^2 \quad (6)$$

В общем случае параметры модели и скалярная кривизна зависят только от размерности пространства, имеем

$$\begin{aligned} k &= D(D-5)/2 + 3, \\ K &= 2(D-3), \\ R &= -D^2 + 3D \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что движение частиц в метрике (5) разделяется на радиальное движение и движение на гиперсфере, которое в общем случае можно исследовать независимо от радиального движения. Будем предполагать, что существуют такие частицы, которые движутся в метрике (5) на гиперсфере с числом углов N . Как известно, движение массивных частиц в гравитационном поле в общем случае описывается уравнением (4). Пронумеруем координаты метрики (5) следующим образом

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N, x_{N+1}, x_{N+2}.$$

Система уравнений (4) в метрике (5) имеет вид [27-29]

$$\frac{d^2\phi_i}{ds^2} + 2\frac{d\phi_i}{ds} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{d\phi_j}{ds} \cot\phi_j - \cos\phi_i \sin\phi_i \sum_{j=i+1}^N \frac{d\phi_j}{ds} \frac{d\phi_j}{ds} \prod_{k=i+1}^{j-1} \sin^2\phi_k = 0, \quad i=1, \dots, N. \quad (8)$$

Отметим, что в силу уравнений (8) все углы связаны между собой. Поэтому движение вдоль каждого угла может влиять на динамику всей системы. Это влияние является особенно сильным в окрестности полюсов системы, где $\phi_i \rightarrow 0, \pi$, при этом $\cot\phi_i \rightarrow \pm\infty$. Согласно системе уравнений (8) число таких полюсов равно $2(N-1)$.

Покажем, что логарифмический потенциал, используемый в теории кварков [1-5], является следствием движения на гиперсфере. Для доказательства перепишем уравнение (8) в виде

$$\frac{d^2 \phi_i}{ds^2} + 2 \frac{d\phi_i}{ds} \frac{d}{ds} \sum_{j=1}^{i-1} \ln(\sin \phi_j) - \cos \phi_i \sin \phi_i \sum_{j=i+1}^N \frac{d\phi_j}{ds} \frac{d\phi_j}{ds} \prod_{k=i+1}^{j-1} \sin^2 \phi_k = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (8,a)$$

Отсюда следует, что в особых точках $\phi_j \rightarrow 0, \pi$ решение системы (8,a) зависит от логарифмических потенциалов $\ln(\sin \phi_j) \approx \ln \phi_j$, которые, как будет показано ниже, могут быть связаны с наличием центров гравитации или зарядов.

На рис. 1 представлены результаты моделирования динамики частиц на гиперсфере в случае 35 углов. Отметим, что проекции траектории частиц в трехмерном пространстве образуют своеобразные фигуры в форме коридоров, аналогичные тем, которые были получены нами в теории Янга-Миллса [30].

Динамика частиц в 6D

В шестимерном пространстве с сигнатурой метрики $(+, +, +, \pm, -, -)$ можно построить естественное обобщение метрики (5) на случай наличия двух центров симметрии в виде [6]

$$ds^2 = \psi(t, r) dt^2 + d\chi_1^2 + \sin^2 \chi_1 d\chi_2^2 - p(\psi) dr^2 - d\phi_1^2 - \sin^2 \phi_1 d\phi_2^2 \quad (9)$$

Здесь $\chi_1, \chi_2, \phi_1, \phi_2$ - углы на единичных сферах, погруженных в трехмерные пространства; t, r - координаты, связанные со временем и расстоянием соответственно.

Рассмотрим гравитацию в пространствах с метрикой (9). Заметим, что только четыре компоненты тензора Эйнштейна в метрике (9) отличны от нуля:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = G_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2 \chi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin^2 \phi_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

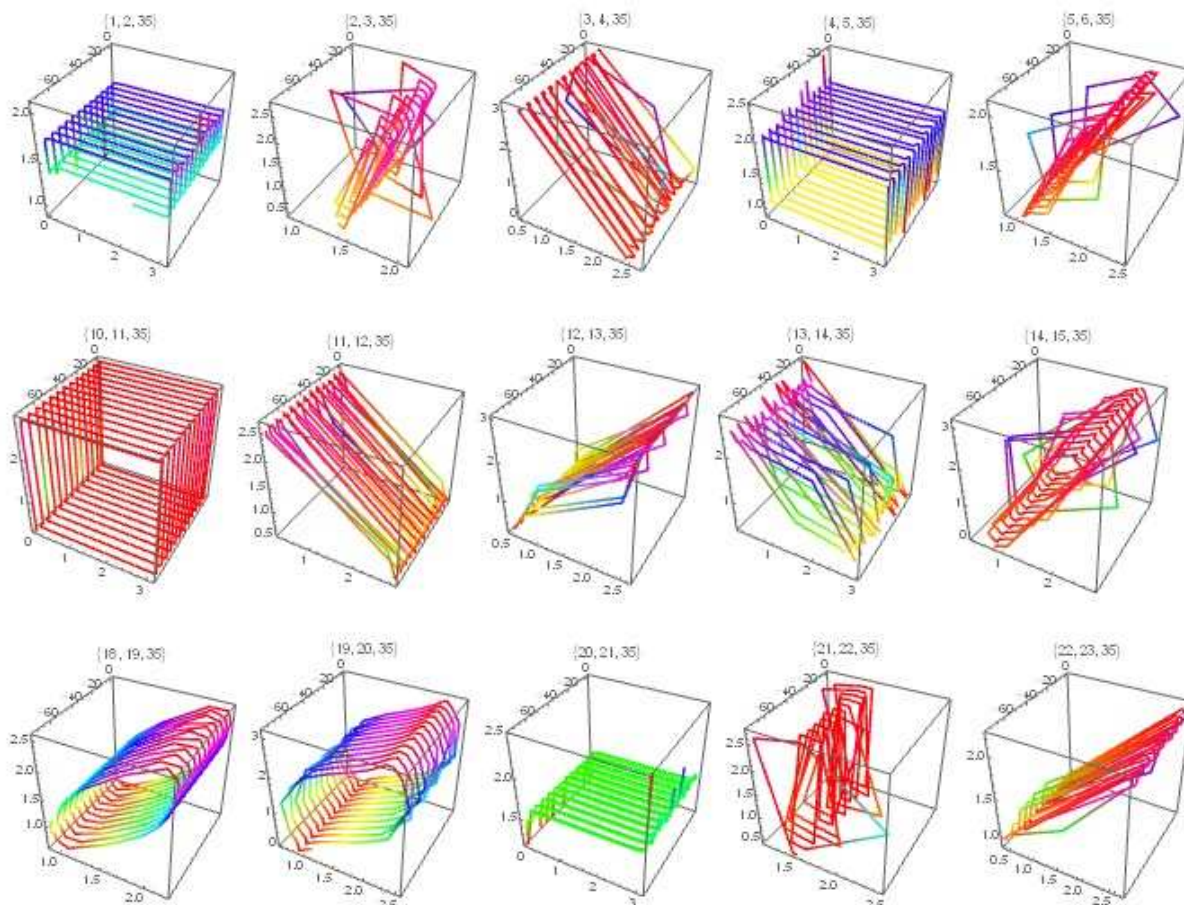


Рис. 1. Отображение движения на гиперсфере в трехмерном пространстве для $N=35$: над рисунками указаны комбинации углов, использованных для отображения.

Следовательно, в этом случае в первом уравнении (1) следует положить $k = 0$, тогда уравнения поля в метрике (9) сводятся к одному уравнению второго порядка $G_{22} = 0$. Отсюда находим

$$-p'\psi_{tt} + \psi_{rr} = -\frac{pp'' - 2p'p'\psi + p'^2\psi}{2p\psi}\psi_t^2 + \frac{p + p'\psi}{2p\psi}\psi_r^2 \quad (11)$$

В частном случае, полагая в уравнении (11) $p(\psi) = -\psi, \psi = e^u$, имеем уравнение Лапласа

$$u_{tt} + u_{rr} = 0 \quad (12)$$

В другом частном случае, полагая в (11) $p(\psi) = \psi, \psi = e^w$, приходим к волновому уравнению [6]

$$w_{tt} - w_{rr} = 0 \quad (13)$$

Рассмотрим динамику частиц в метрике (9) в частном случае $p(\psi) = -\psi, \psi = e^u$, когда уравнения поля сводятся к уравнению Лапласа (12). В этом случае система уравнений (4) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^2t}{ds^2} + \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2}(t_s^2 - r_s^2) \frac{\partial u}{\partial t} &= 0, \\ \frac{d^2r}{ds^2} + \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}(r_s^2 - t_s^2) \frac{\partial u}{\partial r} &= 0, \\ \frac{d^2\chi_1}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2\chi_2}{ds^2} + \frac{d\chi_2}{ds} \frac{d\chi_2}{ds} \cot \chi_2 &= 0, \\ \frac{d^2\phi_1}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2\phi_2}{ds^2} + \frac{d\phi_2}{ds} \frac{d\phi_2}{ds} \cot \phi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь обозначено $t_s = dt / ds, r_s = dr / ds$.

Решение уравнения (12), описывающее N центров гравитации на плоскости имеет вид

$$u = -\sum_{j=1}^N \ln \sqrt{(t-t_j)^2 + (r-r_j)^2} \quad (16)$$

Из уравнений (15) видно, что движение в 6D в метрике (9) разделяется на движение на двух сферах и на движение в плоскости (r, t) . В качестве координаты времени может быть выбран любой из углов или параметр S - рис. 2-3.

На рис 2-3 представлены зависимости радиальных координат от параметра S , траектории плоского и трехмерного движения в метрике (9) с

потенциалом (16) с числом $N = 35$. Отметим, что в этих примерах 35 центров гравитации расположены равномерно по окружности радиуса 4, описанной вокруг точки (6,6).

Отметим сходство траекторий представленных на рис. 2-3 и на рис. 1. Это сходство обусловлено сходством динамических моделей (8) и (15)-(16). В системе уравнений (8) есть особые точки, где $\phi_i \rightarrow 0, \pi$, при этом $\cot \phi_i \rightarrow \pm\infty$. В системе (15)-(16) этим точкам соответствуют логарифмические особенности функции $u(r,t)$.

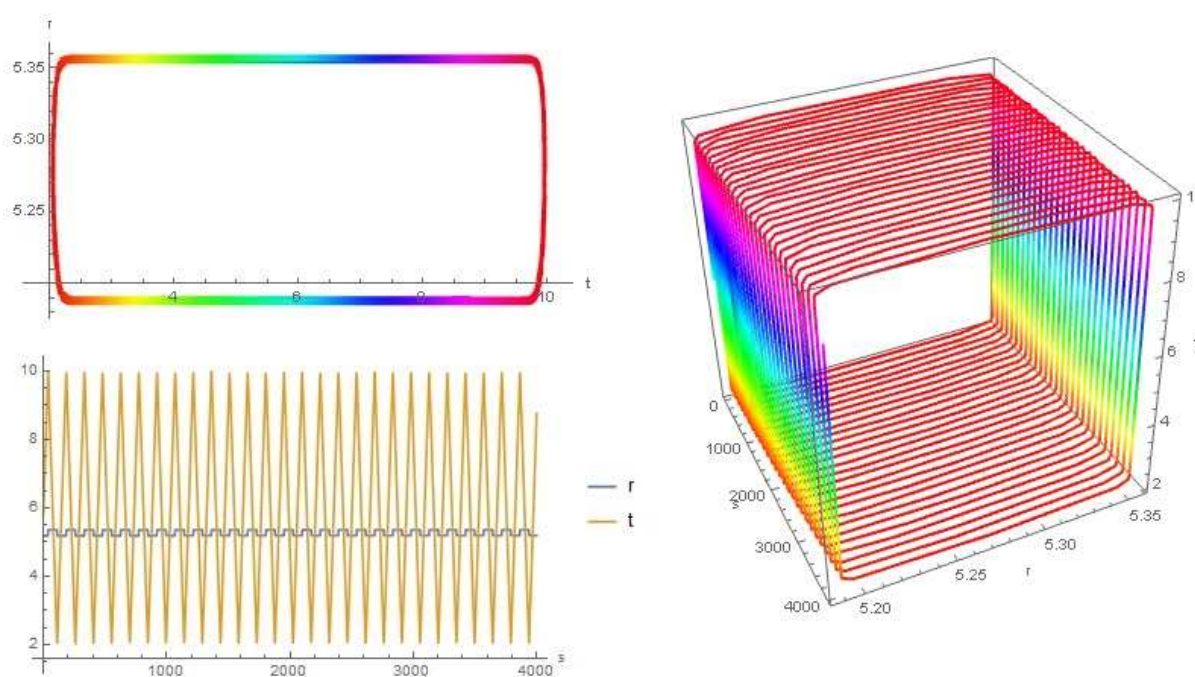


Рис. 2. Зависимость координат (r,t) от параметра s , траектории плоского и трехмерного нерелятивистского движения в 6D в метрике (9) с потенциалом (16) для $N = 35$.

Отметим, что в модели (15)-(16) различаются случаи нерелятивистского и релятивистского движения, которые соответствуют начальным данным $dr/dt \rightarrow 0$ и $dr/dt \rightarrow 1$ на рис 2-3. В первом случае траектории сгущаются вокруг сторон прямоугольника в плоскости (r,t) , а

во втором случае заполняют область ограниченную сторонами параллелограмма – рис. 3.

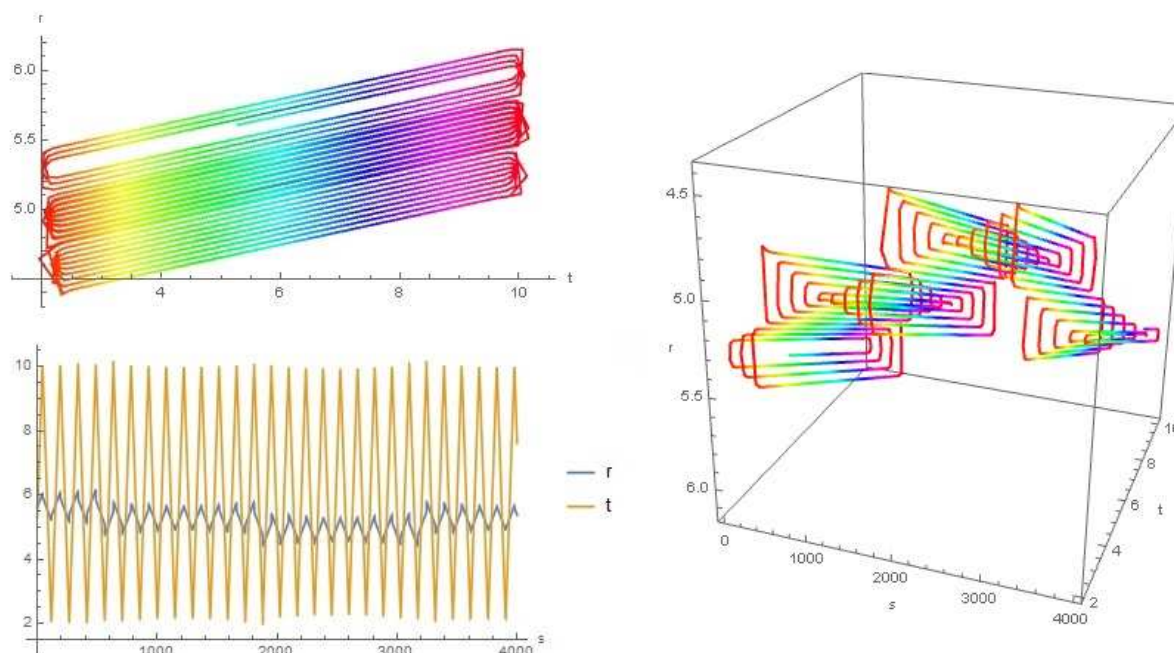


Рис. 3. Зависимость координат (r, t) от параметра s , траектории плоского и трехмерного релятивистского движения в 6D в метрике (9) с потенциалом (16) для $N = 35$.

Аксиально-симметрические поля и метрики галактик

В работах [6-8] были получены решения уравнений поля в общей теории относительности, описывающее метрику галактик и содержащее логарифмическую особенность. Метрика таких пространств, при некоторых предположениях может быть приведена к виду [6, 24-25]

$$ds^2 = e^\mu dt^2 - e^{-\mu} (e^v d\rho^2 + e^v dz^2) - e^{-\mu} \rho^2 d\phi^2 \quad (17)$$

Здесь $\mu = \mu(\rho, x^3)$, $v = v(\rho, x^3)$ - функции, удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна, $\rho = \sqrt{x^1{}^2 + x^2{}^2}$, $z = x^3$.

Вычисляя компоненты тензора Эйнштейна $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$ в метрике (17) и полагая для вакуума $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 0$, находим уравнения поля:

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^3} = 0, \\
 \omega_2 &= \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mu}{\partial x^3} \right)^2 \right] = 0, \\
 \omega_3 &= \frac{\partial v}{\partial x^3} - \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \frac{\partial \mu}{\partial x^3} = 0, \\
 \omega_4 &= \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial x^3} \right)^2 \right] = 0.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Можно проверить, что не все уравнения (18) являются независимыми и что выполняются следующие два соотношения [24]

$$\omega_4 \equiv \frac{\partial \omega_2}{\partial \rho} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} + \rho \omega_1 \frac{\partial \mu}{\partial \rho}, \quad \rho \omega_1 \frac{\partial \mu}{\partial x^3} \equiv \frac{\partial \omega_2}{\partial x^3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial \rho}
 \tag{19}$$

Следовательно, можно в качестве системы уравнений для определения двух функций $\mu = \mu(\rho, x^3), v = v(\rho, x^3)$ выбрать, например, первое и третье уравнения (18), имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^3} &= 0, \\
 \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial x^3} \right)^2 \right] &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Прямой проверкой можно убедиться, что потенциал типа (16) удовлетворяет первому уравнению (20), имеем

$$\mu = \sum_{j=1}^N a_j \ln \sqrt{(\rho - \rho_j)^2 + (z - z_j)^2}
 \tag{25}$$

Для определения траекторий релятивистских частиц используем уравнение (4) в метрике (17) с потенциалом (25). Символы Кристоффеля вычисляются в метрике (17) согласно

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{10}^0 &= \frac{\mu_\rho}{2}, \Gamma_{20}^0 = \frac{\mu_z}{2}, \\
 \Gamma_{00}^1 &= \frac{\mu_\rho}{2} e^{2\mu-\nu}, \Gamma_{11}^1 = \frac{\nu_\rho - \mu_\rho}{2}, \Gamma_{21}^1 = \frac{\nu_z - \mu_z}{2}, \Gamma_{22}^1 = \frac{-\nu_\rho + \mu_\rho}{2}, \Gamma_{33}^1 = \frac{r\mu_\rho - 2}{2} r e^{-\nu}, \\
 \Gamma_{00}^2 &= \frac{\mu_z}{2} e^{2\mu-\nu}, \Gamma_{11}^2 = \frac{-\nu_z + \mu_z}{2}, \Gamma_{21}^2 = \frac{\nu_\rho - \mu_\rho}{2}, \Gamma_{22}^2 = \frac{\nu_z - \mu_z}{2}, \Gamma_{33}^2 = \frac{r^2 \mu_z}{2} e^{-\nu}, \\
 \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{\rho} - \frac{\mu_\rho}{2}, \Gamma_{32}^3 = -\frac{\mu_z}{2}
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

Здесь индексы 0,1,2,3 соответствуют координатам t, ρ, z, ϕ . Отметим, что производные ν_ρ, ν_z вычисляются согласно второму и третьему уравнениям (18).

Рассмотрим уравнения движения (4) с коэффициентами аффинной связности (26) в первом приближении по малому параметру $\nu \sim \mu^2 \ll 1$, имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{dt}{ds} \frac{dz}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{d^2 r}{ds^2} - r \phi_s^2 - \frac{dz}{ds} \frac{dr}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{1}{2} (t_s^2 + z_s^2 + r^2 \phi_s^2 - r_s^2) \frac{\partial \mu}{\partial r} &= 0, \\
 \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \frac{dr}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{1}{2} (t_s^2 - z_s^2 + r^2 \phi_s^2 + r_s^2) \frac{\partial \mu}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{d^2 \phi}{ds^2} = \frac{d\phi}{ds} \frac{dr}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{d\phi}{ds} \frac{dz}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} &.
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Здесь $r = \rho, t_s = dt/ds, r_s = dr/ds, z_s = dz/ds, \phi_s = d\phi/ds$. Система уравнений (27) решалась численно. На рис. 4 приведены типичные траектории движения частиц в метрике (17) с потенциалом (25), вычисленные для начальных данных:

$$\begin{aligned}
 a_i &= 0.031, i = 1, \dots, 35; \\
 t(0) &= 0, t'(0) = 1., r(0) = 6, r'(0) = 10^{-3}, \\
 z(0) &= 0, z'(0) = 10^{-3}, \phi(0) = 0, \phi'(0) = 10^{-3}
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

В случае движения в 3D в поле с потенциалом (25) с источниками, распределенными по окружности в сечении в плоскости (r, z) , траектории заполняют тор, что объясняется структурой поверхностей равного уровня потенциала $\mu(r, z)$ - рис. 4.

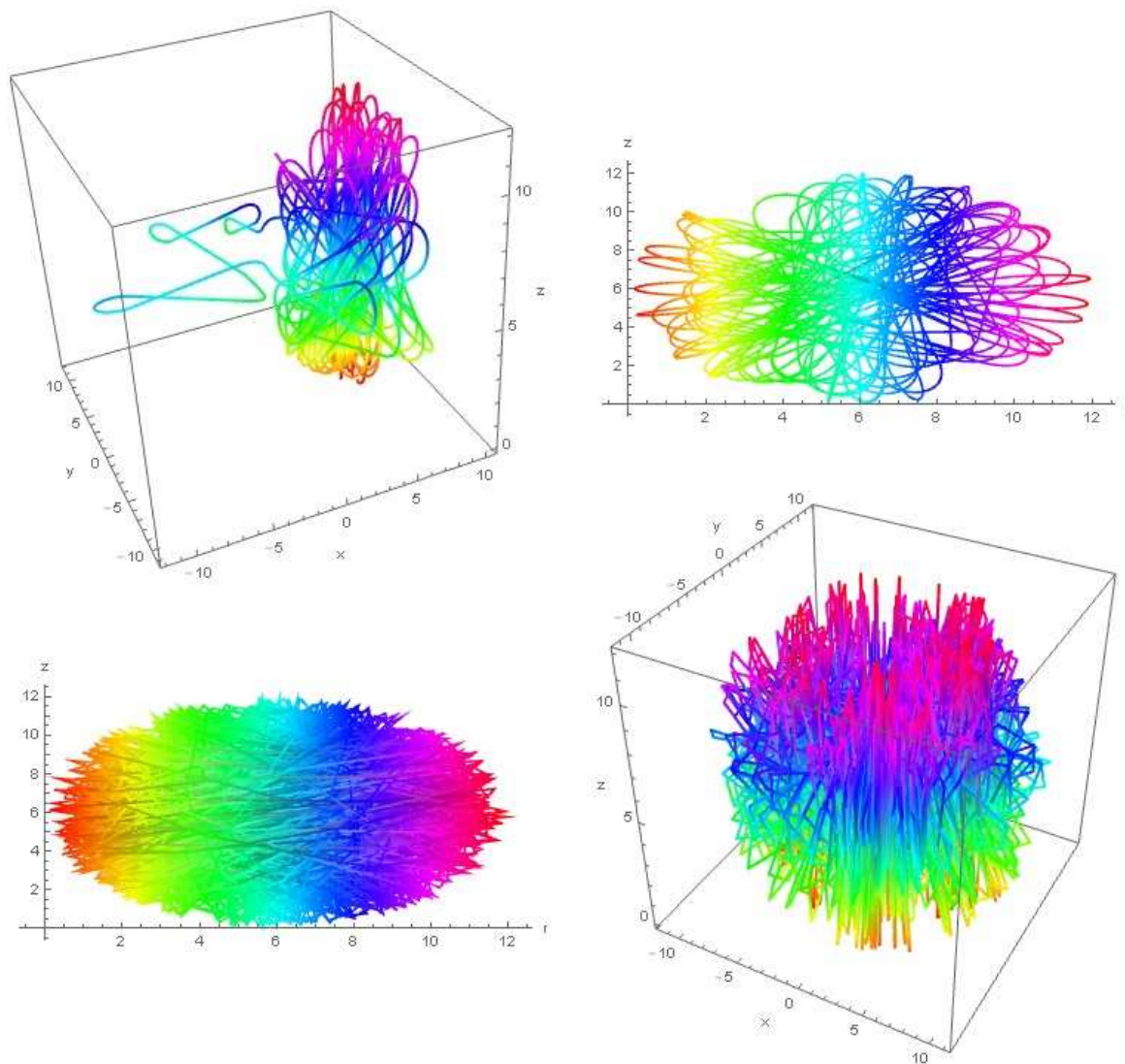


Рис. 4. Траектории движения в метрике (17) с потенциалом (25) в модели (27) с данными (28): вверху $s = 1000$; внизу $s = 10000$.

Отметим, что движение в метрике галактик с потенциалом (25) является хаотическим – рис.4, что объясняется нелинейностью модели (27) и распределением потенциала, содержащего в данном примере 35 источников.

Логарифмический профиль скорости в турбулентном течении

Рассмотрим систему уравнений, описывающую неизотермическое атмосферное течение несжимаемого газа с учетом сил плавучести и переноса инертной примеси, имеем [1-7]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho_0} &= \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} (\rho - \rho_0) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \frac{\nu}{Pr} \nabla^2 T \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi &= \frac{\nu}{Sc} \nabla^2 \phi \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь обозначено: ρ - плотность воздуха; $\mathbf{u} = (u, v, w)$ - вектор скорость потока; ν - кинематическая вязкость; P - давление за вычетом гидростатического атмосферного давления; \mathbf{g} - вектор ускорения свободного падения; ρ_0 - равновесная плотность; T - температура, Pr - число Прандтля; ϕ массовая концентрация примеси; $Sc = \nu / D$ - число Шмидта; D - коэффициент молекулярной диффузии.

Гидростатическое уравнение и стандартное приближение Буссенеска для возмущений плотности заданы в виде

$$\nabla p_0 = \mathbf{g} \rho_0(p_0, T_0), \quad \rho - \rho_0 = -\rho_0 \beta (T - T_0) \quad (30)$$

Здесь $\beta = -\rho^{-1}(\partial \rho / \partial T)_p$ - коэффициент расширения, $\beta = 1/T$ для идеального газа.

Определим систему декартовых координат таким образом, что бы ось Z была направлена против направления вектора ускорения свободного падения. Рельеф обтекаемой поверхности описывается уравнением $z = r(x, y)$.

Граничные условия для параметров течения зададим на обтекаемой поверхности и на границе пограничного слоя следующим образом:

$$\begin{aligned} z = r(x, y): \quad \mathbf{u} &= 0, \quad T = T_g, \quad \phi = \phi_g \\ z = H: \quad \mathbf{u} &= U_0(1, 0, 0), \quad T = T_0, \quad \phi = \phi_0. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь T_g - температура подстилающей поверхности, ϕ_g - концентрация примеси на поверхности, H - высота пограничного слоя, U_0 - скорость течения на высоте $z = H$, T_0, ϕ_0 - температура и концентрация примеси на высоте $z = H$ соответственно.

По координатам x, y зададим периодические граничные условия. Считаем, что в начальный момент скорость течения, температура и концентрация примеси описываются линейными функциями, имеем

$$t = 0: u = U_0 z / H, \quad T = T_g + (T_0 - T_g) z / H, \quad \phi = \phi_g + (\phi_0 - \phi_g) z / H \quad (32)$$

Решения задачи (29)-(32) для различных турбулентных течений были получены в наших работах [12-18] и других. Практически при любой функции распределения шероховатости $z = r(x, y)$ течение довольно быстро переходит в турбулентный режим с установлением логарифмического профиля скорости, температуры и концентрации примеси.

Этот факт, установленный во многих исследованиях [9-10], показывает, что природа изобрела наиболее экономичный способ движения в форме логарифмического профиля. Однако если логарифмический профиль подставить во второе уравнение (1), то можно убедиться, что это уравнение не выполняется. Такой результат означает, что в природе существуют силы, которые поддерживают логарифмический профиль, но которые не нашли отражения в уравнениях (1). Обычно происхождение этих сил приписывают так называемым напряжениям Рейнольдса, обусловленным турбулентной вязкостью или диффузией [10-11].

Обратимся к методу решения проблемы турбулентной диффузии, который был предложен в наших работах [12-18]. Основная идея заключается во введении в уравнения (29) случайных параметров. Например, в пограничном слое можно представить вектор скорости течения $\mathbf{u} = (u, v, w)$ в форме $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z/h(x, y, t), t)$, где $h = h(x, y, t)$ - это поверхность, описывающая динамическую шероховатость [12-18].

Предполагается, что такую поверхность можно характеризовать случайными параметрами h, h_r, h_x, h_y , которые имеют смысл высоты,

скорости движения элемента и наклонов поверхности. Обозначим функцию распределения этих параметров $f_s = f_s(h, h_x, h_y, h_t)$.

Предположим, что $\eta = z/h = const$ и рассмотрим достаточно представительную область течения объемом $dV = L_x L_y dz$, где L_x, L_y - типичные масштабы течения в направлениях x, y соответственно. Рассмотрим подобласть течения dV_s , которая принадлежит рассматриваемой области течения dV , и в которой случайные параметры h, h_t, h_x, h_y изменяются в интервалах $(h; h + dh)$, $(h_t; h_t + dh_t)$, $(h_x; h_x + dh_x)$, $(h_y; h_y + dh_y)$.

В общем случае подобласть dV_s является многосвязной областью, объем которой задается уравнением

$$dV_s = dV f_s(h, h_x, h_y, h_t) dh dh_x dh_y dh_t.$$

Случайная амплитуда скорости может быть определена путем суммирования выражения $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z/h(x, y, t), t)$ в объеме dV_s :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t) = \lim_{\delta V \rightarrow dV_s} \frac{1}{\delta V} \int \mathbf{u}(x, y, \eta, t) dx dy dz \quad (33)$$

Здесь δV - произвольный объем, вложенный в $dV = L_x L_y dz$ и содержащий dV_s . Очевидно, что $\tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t)$ является случайной функцией, поскольку зависит от случайных параметров. Уравнения, описывающие динамику $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t)$, следуют из уравнений (29) и (33), а их вывод дан в [15-16].

Статистический момент порядка m случайной функции $\tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t)$ определяется следующим образом

$$\bar{\mathbf{u}}^m(z, t) = \int \tilde{\mathbf{u}}^m(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t) f_s(h, h_x, h_y, h_t) dh dh_x dh_y dh_t \quad (34)$$

В результате применения указанных преобразований система уравнений (29) принимает вид [15-16]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{N}}{\rho_0 h} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \eta} &= \frac{\nu}{h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} - \\ &- \frac{\nu n^2 \eta}{h^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + \frac{\nu \mathbf{N}}{h^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} (\tilde{p} - \rho_0) \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} &= \frac{\nu}{\text{Pr} h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} - \frac{\nu n^2 \eta}{\text{Pr} h^2} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta} &= \frac{\nu}{\text{Sch}^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta} - \frac{\nu n^2 \eta}{\text{Sch}^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь $\tilde{W} = \tilde{w} - \eta \Phi$, $\Phi = h_x \tilde{u} + h_y \tilde{v}$, $\tilde{P} = \tilde{p} + \theta$, $n = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$, $\mathbf{N} = (-\eta h_x, -\eta h_y, 1)$.

Отметим, что фигурирующая в уравнениях (35) турбулентная вязкость пропорциональна квадрату расстояния до шероховатой стенки. Система уравнений (35) имеет установившееся решение в форме логарифмического профиля, как для скорости, так и для температуры и концентрации [13-18].

Система уравнений, описывающая профиль установившегося турбулентного течения над гладкой поверхностью имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{du^+}{dz^+} &= e^{-I} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{1 + \xi^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sqrt{1 + \xi^2}} \right), \\ R_t \chi \frac{d^2 \chi}{d\xi^2} + \frac{d}{d\xi} (1 + \xi^2) \frac{d^2 \chi}{d\xi^2} &= 0, \quad I = R_t \int_0^\xi \frac{\chi d\xi}{1 + \xi^2} \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь $u^+ = \tilde{u} / u_\tau$, $\xi = z^+ / \lambda^+$, $\lambda^+ = h u_\tau / \nu \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$ - характерный безразмерный масштаб вязкого подслоя, $u_\tau = \sqrt{\tau / \rho}$, τ - величина трения, ρ - плотность жидкости; $\alpha = \arctan(h_y / h_x)$, $v^+ = \tilde{v} / u_\tau$, $w^+ = \tilde{w} / u_\tau$, $\chi = [(u^+ \cos \alpha + v^+ \sin \alpha + w_0^+) \xi - w^+] / w_0^+$, $w_0^+ = h_t / u_* \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$ - второй масштаб скорости, $R_t = h h_t / \nu (h_x^2 + h_y^2)$ - число Рейнольдса вычисленное по

параметрам динамической шероховатости. Граничные условия для системы уравнений (36) сформулируем на гладкой стенке в форме

$$u^+(0) = 0, \quad \chi(0) = 0, \quad \chi'(0) = 1, \quad \chi''(0) = a \quad (37)$$

Здесь a - свободный параметр, который используется в решении задачи методом пристрелки.

Далее предположим, что для $z^+ \rightarrow \infty$ имеет место логарифмическая асимптотика

$$du^+ / dz^+ \rightarrow 1 / \kappa z^+.$$

Полагая, что $\lim_{\xi \rightarrow \infty} I(\xi, R_t) = I_0(R_t)$, находим из первого уравнения (36): $du^+ / dz^+ = \lambda^+ e^{-I_0} / z^+$, следовательно $\lambda^+ = e^{I_0} / \kappa$. Это уравнение имеет непрерывный спектр масштабов $\lambda^+ = \lambda^+(R_t)$ - рис. 5.

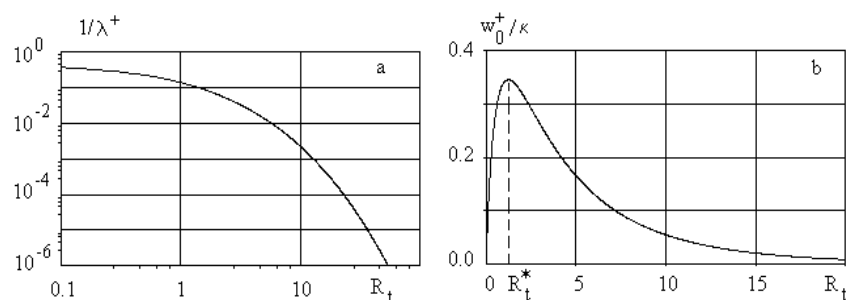


Рис.5. Обратный масштаб $1/\lambda^+$ и нормированная скорость w_0^+/κ в зависимости от числа Рейнольдса динамической шероховатости [18].

Используя динамическое число Рейнольдса $R_t = w_0^+ \lambda_0^+$, запишем уравнение $\lambda^+ = e^{I_0} / \kappa$ следующим образом

$$w_0^+ / \kappa = R_t \exp[-I_0(R_t)] \quad (38)$$

Для однозначности профиля средней скорости следует предположить, что $\kappa = const$ и что второй масштаб скорости имеет экстремум относительно числа Рейнольдса R_t , т.е. $\delta w_0^+ / \delta R_t = 0$. Отсюда находим $R_t = R_t^* \approx 1.2193$, $\lambda_0^+ \approx 9.16$ для $\kappa = 0.39$ [18]. Положим в первом

уравнении (36) $\alpha = \pi / 2$. Интегрируя это уравнение, находим, что профиль средней скорости можно представить в форме:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln z^+ + c_0, \quad c_0 = \frac{1}{\kappa_0} \int_0^{\infty} \frac{e^{l_0-l} - 1}{\sqrt{1+\xi^2}} d\xi - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\lambda_0^+}{2}, \quad z^+ \gg \lambda^+. \quad (39)$$

Таким образом, мы показали, что логарифмический профиль средней скорости может быть выведен из уравнений Навье-Стокса, как приближенное решение уравнений (35). В этой связи заметим, что в работе [31] было установлено, что глубина разрушения поверхности при ударной эрозии логарифмически зависит от времени.

Доказано, что логарифмический закон в этом случае является следствием физического механизма установления процесса разрушения, при котором константой является не скорость эрозии, а среднеквадратичная глубина впадин на поверхности. Аналогичный закон в случае турбулентного течения относится ко второму масштабу скорости (38), которым определяется масштаб изменения флуктуаций скорости - рис. 5, б.

Закона Ампера

Закон, описывающий силу взаимодействия двух проводников с током, является фундаментальным законом физики, так как из этого закона устанавливается единица тока – ампер. Согласно определению основных единиц СИ, «ампер есть сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 метр один от другого. Вызвал бы в каждом участке проводника длиной 1 метр силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ ньютона» [32].

Как известно, в электродинамике закон Ампера является следствием логарифмической зависимости векторного потенциала от расстояния до оси проводника. Однако существует альтернативный вывод закона Ампера <http://ej.kubagro.ru/2016/06/pdf/99.pdf>

из волнового уравнения для скалярного потенциала, который предложил Риман [33-34]. Основным уравнением теории Римана является волновое уравнение, описывающее скалярный потенциал системы зарядов

$$(\partial_t^2 - c^2 \nabla^2)U + c^2 4\pi\rho = 0 \quad (40)$$

Риман рассматривал решение уравнения (40) для точечного заряда

$$U = f(t - r / c) / r \quad (41)$$

Закон Ампера может быть выражен в форме потенциала силы взаимодействия двух проводников с током, который Риман преобразует к виду

$$-\frac{2}{c^2} \iint \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}'}{r} dVdV' = \sum \sum \frac{ee' r^2}{c^2} \frac{dd'}{dt dt} \frac{1}{r} \quad (42)$$

Риман доказывает, что из решений (41) можно построить правую часть выражения (42).

В современной теории поля [26] закон Ампера может быть выведен как следствие наличия запаздывающих потенциалов движущихся зарядов, что, по сути, аналогично гипотезе Римана [34]. В этой связи отметим, что в новой ревизии единиц измерения предлагается фиксировать величину элементарного заряда, с дальнейшим определением единицы тока ампер через единицу заряда кулон. Таким образом, гипотеза Римана о связи токов с движением зарядов находит свое окончательное подтверждение.

Наконец заметим, что турбулентность, как основное состояние движущейся сплошной среды, имеет своим следствием механизм передачи энергии от больших масштабов к малым [11]. Тем самым можно обосновать наличие барионной материи в теории геометрической турбулентности [35]. В таком случае логарифмический закон преобладает на всех уровнях взаимодействия от кварков до галактик [8], что обусловлено, в том числе, законами установления средних параметров с участием флуктуаций [18, 31].

Библиографический список

1. Quigg C., Rosner Jonathan L. Quarkonium level spacings//Physics Letters B, Volume 71, Issue 1, p. 153-157.
2. Khelashvili A. A., Khmaladze V. Yu., Chachava N. D. Many-particle problem with logarithmic potentials and its application to quark bound states// Theoretical and Mathematical Physics, January 1985, Volume 62, Issue 1, pp 90-95.
3. Imbo T.D. Simple Baryon-Meson Mass Relations From A Logarithmic Interquark Potential// arXiv:hep-ph/9701352v1, 23 Jan, 1997.
4. Киселев В.В., Лиходеев А.К. Барионы с двумя тяжелыми кварками//УФН, Том 172, №5, 2002.
5. Patricio Gaete. On finite interquark potential in $D = 3$ driven by minimal length//arXiv: 1407.0407v1, 1 Jul 2014.
6. Трунев А.П. Общая теория относительности и метрика галактик / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №10(094). С. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf>
7. Трунев А.П. Динамика релятивистских частиц в метрике галактик / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №02(116). С. 1619 – 1641. – IDA [article ID]: 1161602101. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/02/pdf/101.pdf>
8. Трунев А.П. Динамика частиц в метрике с логарифмическим потенциалом / Трунев А.П. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №06(120). – IDA [article ID]: 1201606070. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/06/pdf/70.pdf>, 1,500 у.п.л.
9. Прандтль Л., Титъенс О. Гидро- и аэромеханика. Том 2. – М.-Л., ОНТИ, 1935.
10. Schlichting H. Boundary Layer Theory. - McGraw-Hill, NY, 1960.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика – 3 изд. – М.: Наука. – 1986; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics. - Pergamon, Oxford, UK, first edition, 1959.
12. Trunev A. P. Diffuse processed in turbulent boundary layer over rough surface/ Air Pollution III, Vol.1. Theory and Simulation, eds. H. Power, N. Moussiopoulos & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Publ., Southampton, pp. 69-76, 1995.
13. Trunev A. P. Similarity theory for turbulent flow over natural rough surface in pressure and temperature gradients, Air Pollution IV. Monitoring, Simulation and Control, eds. B. Caussade, H. Power & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Pub., Southampton, pp. 275-286, 1996.
14. Trunev A. P., Similarity theory and model of diffusion in turbulent atmosphere at large scales, Air Pollution V. Modelling, Monitoring and Management, eds. H. Power, T. Tirabassi & C.A. Brebbia, CMP, Southampton-Boston, pp. 109-118, 1997.
15. Trunev A. P. Theory of Turbulence and Model of Turbulent Transport in the Atmospheric Surface Layer. - Russian Academy of Sciences, Sochi, 160 p., 1999 (in Russian).

16. Трунев А.П. Теория турбулентности и моделирование турбулентного переноса в атмосфере. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №05(059). С. 179 – 243; №06(060). С. 412 – 491.

17. Трунев А.П. Теория турбулентности и модель влияния плотности шероховатости // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №04(058). С. 348 – 382.

18. Трунев А.П. Теория и константы пристенной турбулентности // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №04(058). С. 383 – 394.

19. Mlodinow L.D., Papanicolaou N. SO(2,1) algebra and the large N expansion in quantum mechanics// Annals of Physics, Vol. 128, Issue 2, pp. 314-334, 1980.

20. Jevicki A., Papanicolaou N. Classical dynamics in the large N limit// Nuclear Physics B, Vol. 171, pp. 362-376, 1980.

21. Chatterjee A. Large-N expansions in quantum mechanics, atomic physics and some O(N) invariant systems// Physics Reports, Vol. 186, Issue 6, pp. 249-370, 1990.

22. Трунев А.П. Гравитационные волны и квантовая теория Шредингера / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №02(096). С. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf>

23. Трунев А.П. Gravitational waves and quantum theory / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №02(096). С. 1146 – 1161. – IDA [article ID]: 0961402078. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/78.pdf>

24. Petrov A.Z. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.

25. Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, Eduard Herltet. Exact Solutions to Einstein's Field Equations. Second Edition. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46136-7, 2003.

26. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). - Pergamon Press, ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.

27. Трунев А.П. Супергравитация в 112D / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №03(117). С. 1263 – 12184. – IDA [article ID]: 1171603082. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/03/pdf/82.pdf>

28. Трунев А.П. Теория физических констант и супергравитация в 112D / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №04(118). Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/78.pdf>

29. Трунев А.П. Единая теория поля и супергравитация в 112D / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №06(120). Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/06/pdf/99.pdf>

ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №05(119). С. 1390 – 1419. – IDA [article ID]: 1191605094. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/05/pdf/94.pdf>

30. Трунев А.П. Моделирование нелинейных цветовых колебаний в теории Янга-Миллса // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2015. – №06(110). С. 1654 – 1673. – IDA [article ID]: 1101506108. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2015/06/pdf/108.pdf>

31. Trunev A. P., Fomin V. M. Continual model of impingement erosion// J. Applied Mech. Tech. Phys., 6, pp. 113-120, 1985.

32. ГОСТ 8.417-2002. Государственная система обеспечения единства измерений. Единицы величин.

33. Риман Б. Сочинения. - Москва-Ленинград, ОГИЗ, 1948.

34. Трунев А.П. Риманова геометрия и единая теория поля в 6D / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2015. – №01(105). С. 161 – 186. – IDA [article ID]: 1051501008. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2015/01/pdf/08.pdf>

35. Трунев А.П. Геометрическая турбулентность и квантовая теория. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 с.

References

1. Quigg C., Rosner Jonathan L. Quarkonium level spacings//Physics Letters B, Volume 71, Issue 1, p. 153-157.

2. Khelashvili A. A., Khmaladze V. Yu., Chachava N. D. Many-particle problem with logarithmic potentials and its application to quark bound states// Theoretical and Mathematical Physics, January 1985, Volume 62, Issue 1, pp 90-95.

3. Imbo T.D. Simple Baryon-Meson Mass Relations From A Logarithmic Interquark Potential// arXiv:hep-ph/9701352v1, 23 Jan, 1997.

4. Kiselev V.V., Lihodeev A.K. Bariony s dvumja tjazhelymi kvarkami//UFN, Tom 172, №5, 2002.

5. Patricio Gaete. On finite interquark potential in $D = 3$ driven by minimal length//arXiv: 1407.0407v1, 1 Jul 2014.

6. Trunev A.P. Obshhaja teorija odnositel'nosti i metrika galaktik / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoy jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №10(094). S. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf>

7. Trunev A.P. Dinamika reljativistskih chastic v metrike galaktik / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoy jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №02(116). S. 1619 – 1641. – IDA [article ID]: 1161602101. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/02/pdf/101.pdf>

8. Trunev A.P. Dinamika chastic v metrike s logarifmicheskim potencialom / Trunev A.P. // Politematicheskij setevoy jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №06(120). – IDA [article ID]: 1201606070. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/06/pdf/70.pdf>, 1,500 u.p.l.

9. Prandtl' L., Tit'ens O. Gidro- i ajeromehanika. Tom 2. – M.-L., ONTI, 1935.

10. Schlichting H. Boundary Layer Theory. - McGraw-Hill, NY, 1960.

11. Landau L. D, Lifshic E. M. Teoreticheskaja fizika. T.6. Gidrodinamika – 3 izd. – M.: Nauka. – 1986; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics. - Pergamon, Oxford, UK, first edition, 1959.
12. Trunев A. P. Diffuse processed in turbulent boundary layer over rough surface/ Air Pollution III, Vol.1. Theory and Simulation, eds. H. Power, N. Moussiopoulos & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Publ., Southampton, pp. 69-76, 1995.
13. Trunев A. P. Similarity theory for turbulent flow over natural rough surface in pressure and temperature gradients, Air Pollution IV. Monitoring, Simulation and Control, eds. B. Caussade, H. Power & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Pub., Southampton, pp. 275-286, 1996.
14. Trunев A. P., Similarity theory and model of diffusion in turbulent atmosphere at large scales, Air Pollution V. Modelling, Monitoring and Management, eds. H. Power, T. Tirabassi & C.A. Brebbia, CMP, Southampton-Boston, pp. 109-118, 1997.
15. Trunев A. P. Theory of Turbulence and Model of Turbulent Transport in the Atmospheric Surface Layer. - Russian Academy of Sciences, Sochi, 160 p., 1999 (in Russian).
16. Trunев A.P. Teorija turbulentnosti i modelirovanie turbulentnogo perenosa v atmosfere. // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №05(059). S. 179 – 243; №06(060). S. 412 – 491.
17. Trunев A.P. Teorija turbulentnosti i model' vlijanija plotnosti sherohovatosti // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №04(058). S. 348 – 382.
18. Trunев A.P. Teorija i konstanty pristennoj turbulentnosti // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №04(058). S. 383 – 394.
19. Mlodinow L.D., Papanicolaou N. SO(2,1) algebra and the large N expansion in quantum mechanics// Annals of Physics, Vol. 128, Issue 2, pp. 314-334, 1980.
20. Jevicki A., Papanicolaou N. Classical dynamics in the large N limit// Nuclear Physics B, Vol. 171, pp. 362-376, 1980.
21. Chatterjee A. Large-N expansions in quantum mechanics, atomic physics and some O(N) invariant systems// Physics Reports, Vol. 186, Issue 6, pp. 249-370, 1990.
22. Trunев A.P. Gravitacionnye volny i kvantovaja teorija Shredingera / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №02(096). S. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf>
23. Trunев A.P. Gravitational waves and quantum theory / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №02(096). S. 1146 – 1161. – IDA [article ID]: 0961402078. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/78.pdf>
24. Petrov A.Z. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.
25. Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, Eduard Herltet. Exact Solutions to Einstein's Field Equations. Second Edition. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46136-7, 2003.
26. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). - Pergamon Press, ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.

27. Trunев A.P. Supergravitacija v 112D / A.P. Trunев // Politematiceskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №03(117). S. 1263 – 12184. – IDA [article ID]: 1171603082. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/03/pdf/82.pdf>

28. Trunев A.P. Teorija fiziceskih konstant i supergravitacija v 112D / A.P. Trunев // Politematiceskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №04(118). Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/78.pdf>

29. Trunев A.P. Edinaja teorija polja i supergravitacija v 112D / A.P. Trunев // Politematiceskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №05(119). S. 1390 – 1419. – IDA [article ID]: 1191605094. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/05/pdf/94.pdf>

30. Trunев A.P. Modelirovanie nelinejnyh cvetovyh kolebanij v teorii Janga-Millsa // Politematiceskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2015. – №06(110). S. 1654 – 1673. – IDA [article ID]: 1101506108. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2015/06/pdf/108.pdf>

31. Trunев A. P., Fomin V. M. Continual model of impingement erosion// J. Applied Mech. Tech. Phys., 6, pp. 113-120, 1985.

32. GOST 8.417-2002. Gosudarstvennaja sistema obespečenija edinstva izmerenij. Edinicy velichin.

33. Riman B. Sochinenija. - Moskva-Leningrad, OGIZ, 1948.

34. Trunев A.P. Rimanova geometrija i edinaja teorija polja v 6D / A.P. Trunев // Politematiceskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2015. – №01(105). S. 161 – 186. – IDA [article ID]: 1051501008. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2015/01/pdf/08.pdf>

35. Trunев A.P. Geometricheskaja turbulentsnost' i kvantovaja teorija. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 s.