УДК 528.117

25.00.00 Науки о Земле

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КООРДИНАТ ТОЧЕК ОБРАТНОЙ УГЛОВОЙ ЗАСЕЧКОЙ

Соколов Юрий Григорьевич
к.т.н., профессор

Гурский Иван Николаевич
доцент

Струсь Сергей Сергеевич
к.э.н., доцент

Пшидаток Саида Казбековна
к.с-х.н., доцент
Кубанский государственный аграрный университет, Краснодар, Россия

Даже при современном развитии геодезической техники отказаться от традиционных способов сгущения плановой сети не представляется возможным. Поэтому в статье рассмотрен случай определения координат точки с использованием обратной угловой засечки и проведена оценка точности их определения. В классических способах решения обратной угловой засечки просчитываются коэффициенты, с помощью которых и получают координаты определяемой точки. Авторами предлагается использовать вспомогательные углы, что приведет к уменьшению объемов вычислений. Кроме того в статье приведены примеры решения по известным формулам Гаусса и через расчет прямой геодезический задачи

Ключевые слова: ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ СЕТЬ, ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ, КООРДИНАТЫ, ОБРАТНАЯ УГЛОВАЯ ЗАСЕЧКА

UDC 528.117

Sciences about Earth

THE COORDINATES OF THE POINTS BACKWARDS THE ANGULAR NOTCH

Sokolov Yuriy Grigoryevich
Dr.Sci.Tech., professor

Gurskiy Ivan Nikolaevich
associate professor

Strus Sergey Sergeyevich
Cand.Econ.Sci., associate professor

Pshidatok Saida Kazbekovna
Cand.Agr.Sci., associate professor
Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

Even with the modern development of geodetic techniques to abandon traditional ways a condensation of planned networks is not possible. Therefore, the article describes the case of determination of coordinates of points using backwards the angular notch and the accuracy of their determination. In the classical methods of solving the backwards the angular notch are calculated coefficients, and get the coordinates of the designated point. The authors propose to use auxiliary angles that will reduce the amount of calculation. In addition, the article gives examples of solutions to well-known formulas of Gauss and through the calculation of direct geodetic purpose

Keywords: GEODETIC NETWORK, COORDINATES, ACCURACY ASSESSMENT, BACKWARDS ANGULAR NOTCH

Вопросом определения координат точек обратной угловой засечкой посвящено достаточно много работ. Среди классических способов ее решения следует отметить способы Кнесселя и Деламбра [1,2]. Вместе с тем в литературе предлагаются и другие решения этой задачи. В рассматриваемой работе предлагается определить координаты через вспомогательные углы φ_1 и φ_2 (рисунок 1).

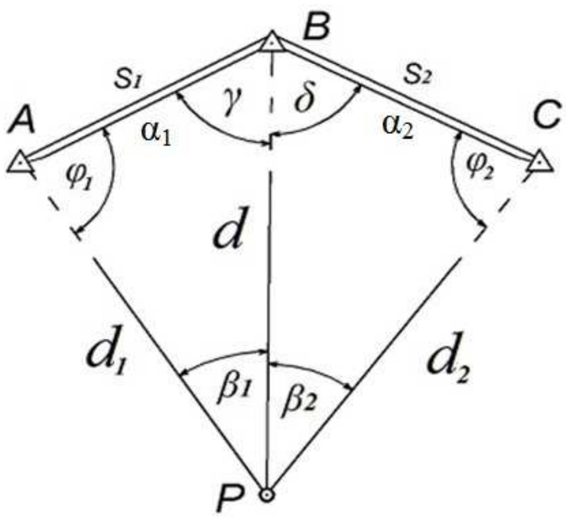

Рисунок 1 – Схема решения обратной угловой засечки через вспомогательные углы

На рисунке 1 β_1 и β_2 – измеренные горизонтальные углы при определяемой точке *P*. Точки *A*, *B* и *C* исходные с известными координатами X_A, $У_A$; X_B $У_B$; X_C, $У_C$.

Для ее решения по координатам исходных точек определяют длины сторон S_1, S_2 и дирекционные углы α_1 и α_2 решением обратных геодезических задач.

Далее находят сумму вспомогательных углов φ_1и φ_2

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 360° – (\alpha_1 – \alpha_2) – (\beta_1 + \beta_2). \quad (1)$$

Введем обозначение

$$\varphi_1 + \varphi_2 = A \quad (2)$$

Из треугольников *ABP* и *BCP* по теореме синусов через вспомогательные углы φ_1 и φ_2 и измеренные углы β_1 и β_2 находим длину линии d:

$$d = S_1 \frac{Sin\varphi_1}{Sin\beta_1};\ d = S_2 \frac{Sin\varphi_2}{Sin\beta_2}. \quad (3)$$

При равенстве левых частей (3) получают

$$S_1\frac{Sin\varphi_1}{Sin\beta_1} = S_2\frac{Sin\varphi_2}{Sin\beta_2}. \tag{4}$$

Откуда находят коэффициент *К*, отражающий отношение синусов вспомогательных углов φ_1и φ_2, который можно вычислить через измеренные углы β_1 и β_2 и стороны S_1, S_2.

$$\frac{Sin\varphi_1}{Sin\varphi_2} = \frac{S_2Sin\beta_1}{S_1Sin\beta_2} = K \tag{5}$$

Полученные два уравнения с двумя неизвестными позволяют найти синусы углов φ_1 и φ_2.

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 &= A \\ \frac{Sin\varphi_1}{Sin\varphi_2} &= K \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Для решения системы (6) применяют способ подстановки

$$\varphi_2 = \mathrm{A} - \varphi_1; \qquad \frac{Sin\varphi_1}{[Sin(\mathrm{A} - \varphi]_1)} = \mathrm{K} \tag{7}$$

Учитывая, что $[sin(\mathrm{A} - \varphi]_1) = Sin\mathrm{A} \cdot Cos\varphi_1 - Cos\mathrm{A} \cdot Sin\varphi_1$, после замены $Cos\varphi_1 = \sqrt{1 - Sin^2\varphi_1}$и несложных преобразований получают

$$Sin\varphi_1 = \frac{K\ Sin\ A}{\sqrt{1 + 2KCosA + K^2}},\ Sin\varphi_2 = \frac{Sin\ A}{\sqrt{1 + 2KCosA + K^2}} \tag{8}$$

Откуда

$$\varphi_1 = arcsin\varphi_1; \quad \varphi_2 = arcsin\varphi_2 \tag{9}$$

Далее задача решается путем нахождения длины линии *d*

$$d' = S_1\frac{Sin\varphi_1}{Sin\beta_1}, \qquad d'' = S_2\frac{Sin\varphi_2}{Sin\beta_2};\ d = \frac{1}{2}(d' + d'') \tag{10}$$

По дирекционным углам исходных линий *BA* (α_1), *BC* (α_2) и углам γ и δ, вычисляемым по формулам:

$$\gamma = 180° - (\beta_1 + \varphi_1) \ \delta = 180° - (\varphi_2 + \beta_2) \tag{11}$$

Находят дважды значения дирекционного угла линии *BP* ($\alpha_1 BP$) и его среднего значения

$$\alpha'_{BP} = \alpha_1 - \gamma\,;\ \alpha''_{BP} = \alpha_2 + \delta\,; \quad \alpha_{BP} = \frac{1}{2}(\alpha'_{BP} + \alpha''_{BP}) \tag{12}$$

По формуле прямой геодезической задачи вычисляют координаты пункта *P*

$$X_P = X_B + d \cdot Cos\alpha_{BP}\ ;\ Y_P = Y_B + d \cdot Sin\alpha_{BP} \tag{13}$$

Рассмотренную задачу можно существенно упростить (не решая систему двух уравнений с двумя неизвестными). Из рисунка 1 запишем

$$\varphi_2 = 360° - [\beta_1 + \beta_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) + \varphi_1] = 360° - (B + \varphi_1), \tag{14}$$

где $B = \beta_1 + \beta_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)$

Отсюда:

$$Sin\varphi_2 = -Sin\,(B + \varphi_1) = -(Sin\,B \cdot Cos\varphi_1 + Cos\,B \cdot Sin\varphi_1) \tag{15}$$

Разделим (15) на $Sin\varphi_1$, получим

$$\frac{Sin\varphi_2}{Sin\varphi_1} = -(SinB \cdot ctg\varphi_1 + CosB) \tag{16}$$

Учитывая, что $\frac{Sin\varphi_1}{Sin\varphi_2} = K$, получим: $\frac{1}{K} = -(SinB \cdot ctg\varphi_1 + CosB)$ (17)

Откуда

$$Ctg\varphi_1 = -\frac{1 + k\,CosB}{KSinB};\ tg\varphi_1 = -\frac{k\,SinB}{1 + KCosB}; \tag{18}$$

Тогда

$$\varphi_1 = arctg\left(-\frac{KSinB}{1 + kCosB}\right), \ \varphi_2 = \arcsin\left(\frac{Sin\varphi_1}{K}\right) \tag{19}$$

Получив углы φ_1 и φ_2 задачу можно решать, как и в предыдущем способе или определить координаты точек по формулам Гаусса:

$$X_P = X_A + \frac{\left(X_c - X_A\right) tg\alpha_{CP} + Y_A - Y_c}{tg\alpha_{CP} - tg\alpha_{AP}}; \tag{20}$$

$$Y_P = Y_c + (X_P - X_c)tg\alpha_{CP}$$

где $\alpha_{CP} = \alpha_{CB} - \varphi_2$; $\alpha_{AP} = \alpha_{AB} + \varphi_2$

Средняя квадратическая ошибка определения положения точки *P* по трем исходным пунктам согласно [1] будет:

$$M_P = \frac{dm''_\beta}{\rho'' Sin(\varphi_1 + \varphi_2)}\sqrt{\frac{d_1^2}{S_1^2} + \frac{d_2^2}{S_2^2}}, \tag{21}$$

где m_β – средняя квадратическая ошибка измерения углов

ρ'' – радиан (ρ'' = 206265")

d_1 и d_1 – длины сторон *AP* и *CP*, вычисленные по координатам точек *A*, *C* и *P*,

d – находим по формулам (10).

Для более доступного восприятия предложенного приведем решение обратной угловой засечки с использованием вспомогательных углов. Расчеты представим в табличной форме.

Таблица 1 – Вычисление значений вспомогательных углов

Обозначения, формулы	Значения величин, результаты вычислений		
A	X_A= 9227,01	У_A= 666,87	
B	X_B= 9518,87	У_B = 1584,74	
C	X_C= 9325,92	У_C = 2698,84	
β_1	40°52'21″		
β_2	47°38'07″		
X_A-X_B	-291,86	S_1=	963,16
У_A-У_B	-917,87	-	-
α_{BA}	252°21'38″		
X_C-X_B	-192,95	S_2=	1130,68
У_C-У_B	1114,1	-	-
α_{BC}	99°49'31″		
$\gamma+\delta=\alpha_{BA}-\alpha_{BC}$	152°32'06″		
$B=\gamma+\delta+\beta_1+\beta_2$	241°02'34″		
$k=\frac{S_2 sin\beta_1}{S_1 sin\beta_2}$	1,03969	$tg\varphi_1=\frac{ksinB}{1+kcosB}$	1,83179
φ_1	61°22'09″		
$\varphi_2=\frac{\arcsin(sin\varphi_1)}{k}$	57°35'16″		

Далее проведем вычисление координат по формулам Гаусса (20)

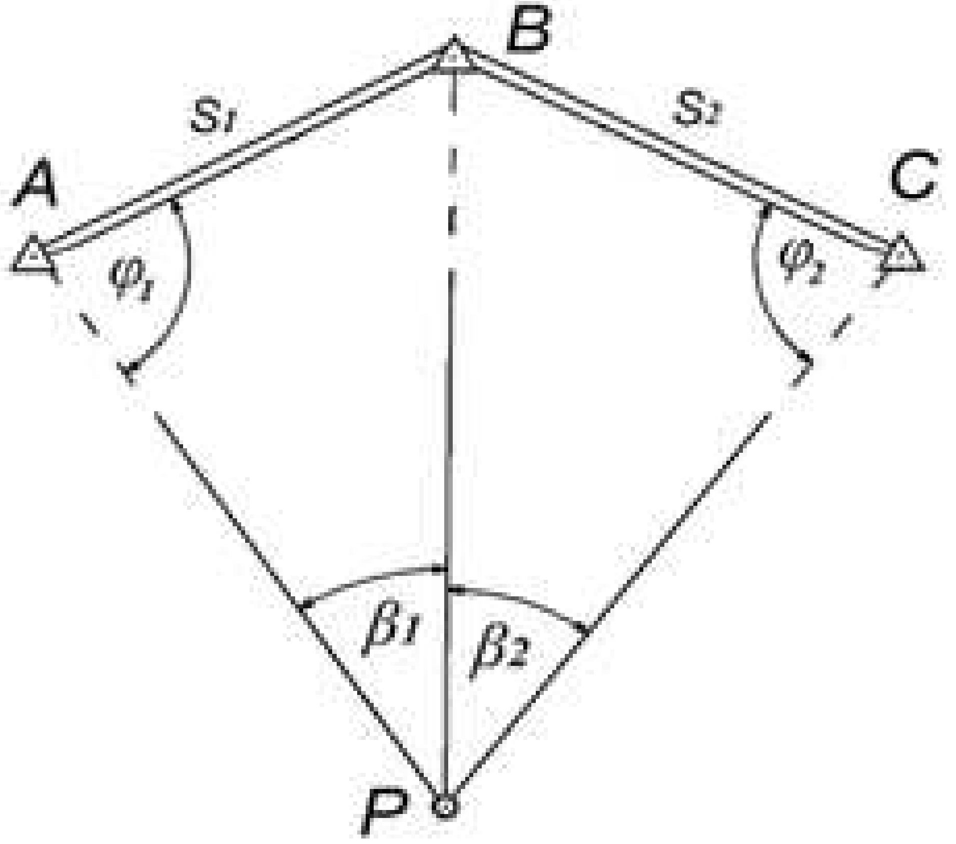

Рисунок 2 – Схема обратной угловой засечки по формулам Гаусса

Таблица 2 – Данные к расчетам по формулам Гаусса

$\alpha_{AP}=\alpha_{BA}-180°+\varphi_1$	133°43'47"		
$\alpha_{CP}=\alpha_{BC}+180°-\varphi_2$	222°14'15"		
X_P	8232,71	$У_P$	1706,27

Вычисление координат точки Р можно произвести решением прямой геодезической задачи через сторону ВР, в этом случае схема углов примет вид рисунок 3

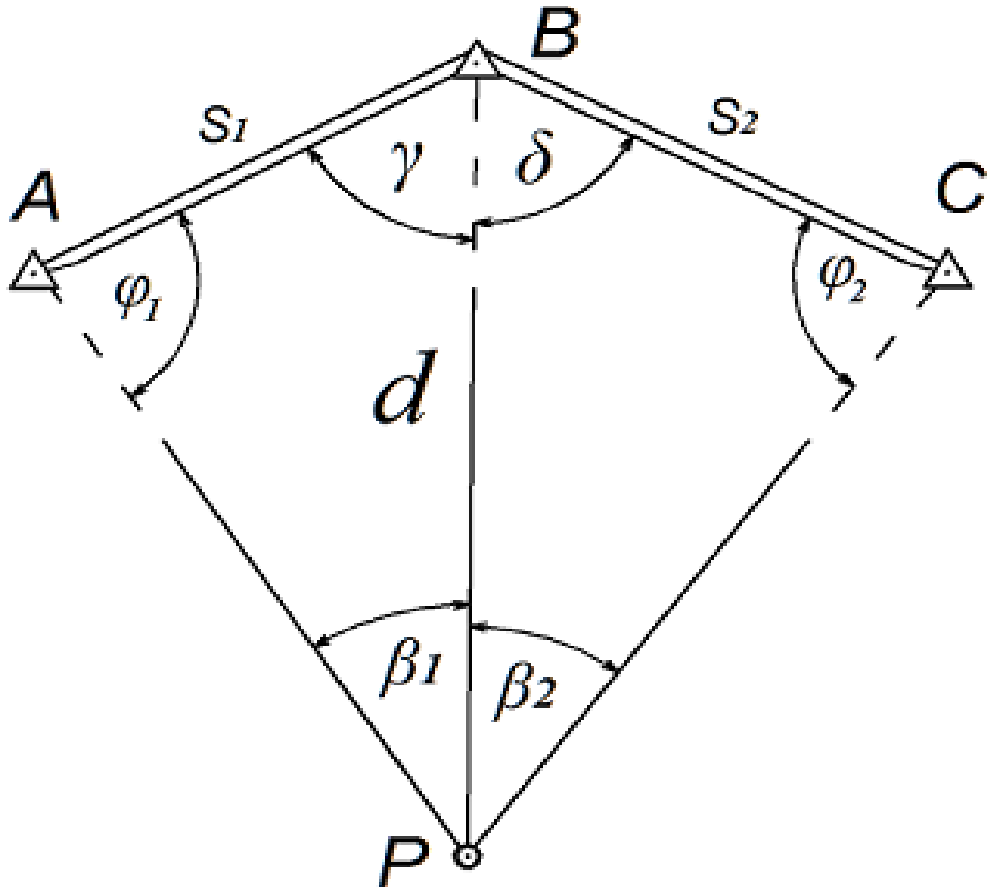

Рисунок 3 – Схема измерений при решении задачи ПГЗ

Таблица 3 – Данные к расчетам при решении задачи ПГЗ

$\gamma=180°-\beta_1-\varphi_1$	77°45'29″		
$\delta=180°-\beta_2-\varphi_2$	74°46'36″		
$\alpha_{BP}=\alpha_{BA}-\gamma$	174°36'8″		
$\alpha_{BP}=\alpha_{BC}+\delta$	174°36'8″		
$\alpha_{BP\ средн}$	174°36'8″		
$d=\frac{S_1 sin\varphi_1}{sin\beta_1}$	1291,89	$d'=\frac{S_2 sin\varphi_2}{sin\beta_2}$	1291,89
$d_{ср}$		1291,89	
$X_p=X_B+d\ cos\alpha_{BP}$		8232,71	
$У_p=У_B+d\ sin\alpha_{BP}$		1706,27	

Оценку точности определения координат точки P проводим по формуле (21)

Таблица 4 – Сводная таблица полученных величин

Названия, обозначения	Координаты		Приращения		Расстояния
	X	У	ΔX	ΔУ	
A	9227,01	666,87	-994,30	1039,40	1438,40
B	9518,87	1584,74	-1286,16	121,53	1291,89
C	9325,92	2698,84	-1093,21	-992,57	1476,59
P	8232,71	1706,27		$S_1=$	963,16
$\varphi_1+\varphi_2$	118°57'25"			$S_2=$	1130,68

$$m_p = \frac{1291{,}89 \cdot 5''}{206265'' \cdot \sin 118°57'25''} \cdot \sqrt{\frac{1438{,}40^2}{963{,}16^2} + \frac{1476{,}59^2}{1130{,}68^2}} = \pm 0.07\text{м.}$$

Список литературы

1. Геодезия: учебное пособие для вузов / Г. Г. Поклад, С. П. Гриднев – М.: Академический Проект, 2013

2. Справочник по геодезии. Под редакцией В.Д. Большакова, Г.П. Левчука, книга 2. М., Недра, 1985.

3. Ю.Г. Соколов, С.К. Пшидаток, С. С. Струсь «К вопросу уравнивания геодезической цепи из четырехугольников» Научный журнал КубГАУ [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ. – 2015. – № 114(10). – Шифр Информрегистра: IDA [article ID]: 1141510012 – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2015/10/pdf/12.pdf

References

1. Geodezija: uchebnoe posobie dlja vuzov / G. G. Poklad, S. P. Gridnev – M.: Akademicheskij Proekt, 2013

2. Spravochnik po geodezii. Pod redakciej V.D. Bol'shakova, G.P. Levchuka, kniga 2. M., Nedra, 1985.

3. Ju.G. Sokolov, S.K. Pshidatok, S. S. Strus' «K voprosu uravnivanija geodezicheskoj cepi iz chetyrehugol'nikov» Nauchnyj zhurnal KubGAU [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU. – 2015. – № 114(10). – Shifr Informregistra: IDA [article ID]: 1141510012 – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2015/10/pdf/12.pdf