УДК 528.117

25.00.00 Науки о Земле

К ВОПРОСУ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ПРИВЯЗКИ ДВУХ ТОЧЕК ПО ДВУМ ИСХОДНЫМ

Соколов Юрий Григорьевич
к.т.н., профессор

Гаврюхов Андрей Тимофеевич
к.т.н., профессор

Струсь Сергей Сергеевич
к.э.н., доцент

Пшидаток Саида Казбековна
к.с-х.н., доцент
Кубанский государственный аграрный университет, Краснодар, Россия

Рассматривается вопрос посвященный решению актуальной задачи сгущения планового обоснования от исходных пунктов, для которых известны или заранее определены координаты с использованием спутниковых геодезических приборов. Авторами представлен способ решения задачи геодезической привязки двух точек по двум исходным (задача Ганзена) путем определения действительных примычных углов и приведение этой задачи к решению прямой угловой засечки. Приведен численный пример решения и выполнена оценка точности полученных координат точек P и Q с использованием найденных действительных примычных углов и длин ребер получаемых треугольников

Ключевые слова: ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ, ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ УГЛЫ, ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ПРИВЯЗКА ПАРЫ ПУНКТОВ

UDC 528.117

The Earth sciences

TO THE QUESTION OF SOLVING THE PROBLEM OF TWO GEODETIC REFERENCE POINTS USING TWO SOURCES

Sokolov Yuriy Grigoryevich
Cand.Tech.Sci., professor

Gavruchov Andrey Timofeevich
Cand.Tech.Sci., professor

Strus Sergey Sergeyevich
Cand.Econ.Sci.

Pshidatok Saida Kazbekovna
Cand.Econ.Sci.
Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

The article examines an important matter of topical problems of the thickening of planned justification from the starting points, for which we have known or predetermined locations using satellite-surveying instruments. The authors present a method of solving the problem of two geodetic reference points using two sources (the approach of the Hansen) by determining the true adjoining corners and converting the problem to the solution of direct angular notches. We have also given a numerical example of the solution and the estimated accuracy of the obtained coordinates of the points P and Q using found valid adjoining corners and edge lengths of the resulting triangles

Keywords: GEODETIC MEASUREMENTS, HORIZONTAL ANGLES, GEODETIC REFERENCE OF PAIRS OF POINTS

В современных условиях совершенствования геодезических измерений на местности используются не только оптические приборы, но и спутниковые навигационные приемники, с помощью которых возможно, без прямой видимости между определяемыми точками, находить их пространственные координаты. Данный способ имеет свои недостатки, связанные с необходимостью открытого горизонта более 15^{o} и одновременного наблюдения не менее 4-х спутников. В условиях сложной городской застройки применение методов спутниковых наблюдений может оказаться проблематичным и для выполнения геодезических работ и привязки к исходным пунктам приходится комбинировать спутниковое сгущение сети с традиционными методами.

Вопрос использования спутниковых приемников для определения координат пунктов сгущения опорной сети в данной статье рассматривать не будем, потому что соблюдение определенной методики спутниковых измерений обязательно даст положительный результат. А вот для дальнейшего развития опорной геодезической сети традиционными методами существует ряд способов решения поставленной задачи:

- использование условного базиса между определяемыми точками;

- определение условного дирекционного угла между точками с известными координатами в условной системе координат с последующим введением поправок в дирекционные углы остальных сторон;

- вычисление примычных горизонтальных углов при опорных точках [1, 2, 3].

Способ, изложенный Чижмаковыми [2], представляет практический интерес, поскольку позволяет найти действительные примычные углы и решить задачу определения координат с помощью прямой угловой задачи.

В соответствии со схемой (рисунок 1) рассмотрим решение поставленной задачи - определения координат точек P и Q.

На рисунке 1 β_1, β_2, β_3, и β_4 измеренные горизонтальные углы. Точки $A(x_a,y_a)$ и $B(x_b,y_b)$ – известные пункты с координатами X_A, $У_A$; X_B, $У_B$.

Введем следующие обозначения:

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_1 = 180° - (\beta_1 + \beta_3);\ \varphi_1 = 180° - (\beta_2 + \beta_4); \\ \gamma_1 = \beta_1 - \beta_3;\ \varphi_3 + \varphi_4 = 180° - \gamma_1; \\ \varphi_3 = 180° - (\gamma_1 + \varphi_4). \end{array}\right\} \qquad (1);$$

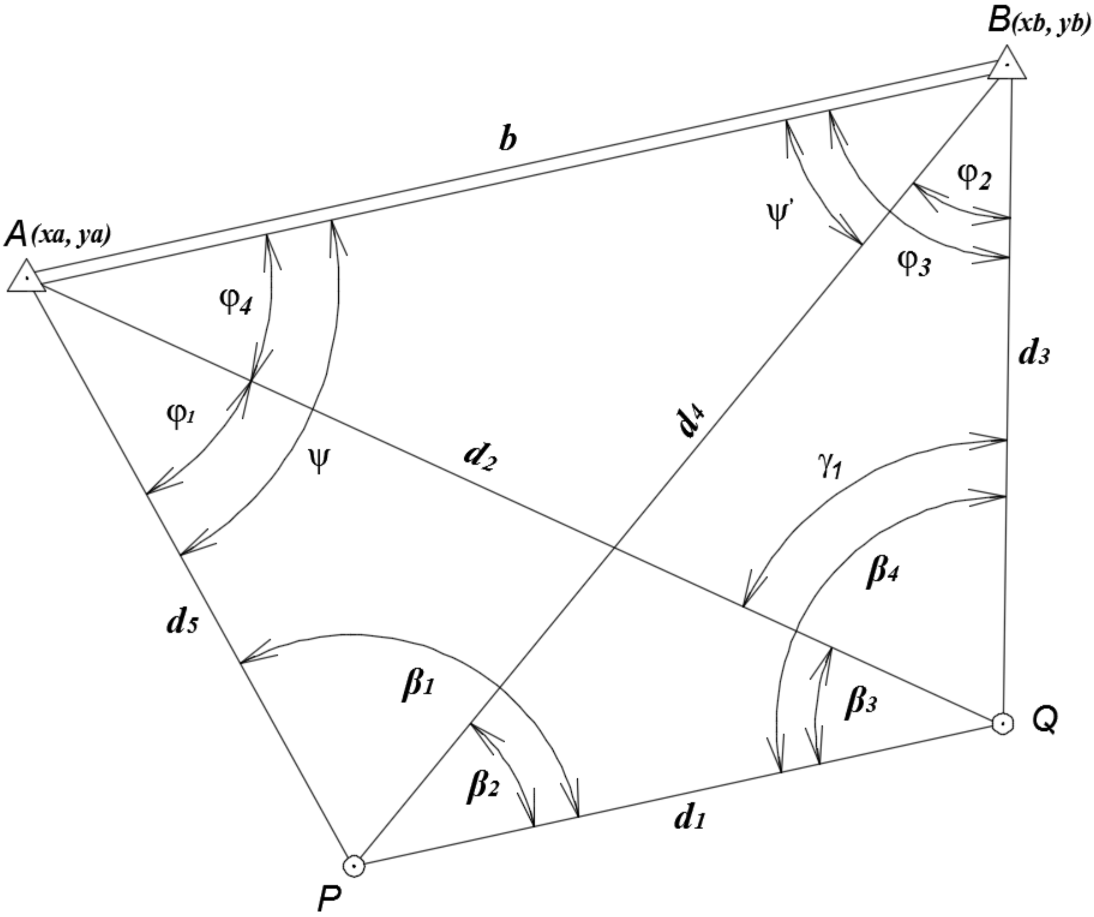

Рисунок 1 – Схема определения координат точек P и Q

Согласно [2] от точки Q отходят линии d_1, d_2 и d_3, как от полюса четырехугольника, т.е.

$$\frac{d_1}{d_2} \times \frac{d_2}{d_3} \times \frac{d_3}{d_1} = 1 \qquad (2);$$

Согласно теореме синусов имеем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d_1}{\sin\varphi_1} &= \frac{d_3}{\sin\beta_1} \\ \frac{d_2}{\sin\varphi_3} &= \frac{d_3}{\sin\varphi_4} \\ \frac{d_3}{\sin\beta_2} &= \frac{d_1}{\sin\varphi_2} \end{aligned}\right\} \qquad (3);$$

или

$$\left.\begin{aligned}\frac{d_1}{d_3}=\frac{\sin\varphi_1}{\sin\beta_1}\\ \frac{d_2}{d_3}=\frac{\sin\varphi_3}{\sin\varphi_4}\\ \frac{d_3}{d_1}=\frac{\sin\beta_2}{\sin\varphi_2}\end{aligned}\right\} \qquad (4);$$

Подставляя полученные выражения (4) в формулу (2), получим:

$$\frac{\sin\varphi_3}{\sin\varphi_4}=\frac{\sin\beta_1\times\sin\varphi_2}{\sin\beta_2\times\sin\varphi_1} \qquad (5);$$

Выражение (5) показывает, что это соотношение выполняется и позволяет, в отличии от [2], найти действительные примычные углы φ_3 и φ_4 следующим образом.

Правая часть этого выражения известна, обозначим для ее кратности через «a »

$$\frac{\sin\beta_1\times\sin\varphi_2}{\sin\beta_2\times\sin\varphi_1}=a \qquad (6);$$

Учитывая (1), получим:

$$\frac{cos\gamma_1\times cos\varphi_4+cos\gamma_1 sin\varphi_4}{sin\varphi_4}=sin\gamma_1\times ctg\varphi_4+cos\gamma_1=a \qquad (7);$$

Отсюда:

$$ctg\varphi_4=\frac{a-cos\gamma_1}{sin\gamma_1}\text{ и } tg\varphi_4=\frac{sin\gamma_1}{a-cos\gamma_1} \qquad \mathbf{(8);}$$

тогда

$$\varphi_4=arctg\left(\frac{sin\gamma_1}{a-cos\gamma_1}\right) \qquad \mathbf{(9);}$$

Найдем теперь угол φ_3 с учетом, что:

$$\varphi_4=180°-\gamma_1-\varphi_3;$$

$$sin\varphi_4=\sin(\gamma_1+\varphi_3)=sin\gamma_1 cos\varphi_3+cos\gamma_1 sin\varphi_3,$$

получим

$$\frac{sin\varphi_3}{sin\gamma_1 cos\varphi_3+cos\gamma_1 sin\varphi_3}=a \qquad \mathbf{(10);}$$

Разделив выражение (10) на $sin\varphi_3$, получим:

$$a = \frac{1}{sin\gamma_1 ctg\varphi_3 + cos\gamma_1} \quad \textbf{(11);}$$

откуда:

$$sin\gamma_1 ctg\varphi_3 + cos\gamma_1 = \frac{1}{a}; \; ctg\varphi_3 = \frac{1 - a \times cos\gamma_1}{a \times sin\gamma_1};$$

$$tg\varphi_3 = \frac{a \times sin\gamma_1}{1 - a \times cos\gamma_1}; \; \varphi_3 = arctg\frac{a \times sin\gamma_1}{1 - a \times cos\gamma_1} \quad \textbf{(12);}$$

Вычислив примычные углы φ_3 и φ_4, найдем углы, позволяющие решить прямую угловую засечку для определения координат точки P:

$$\psi = \varphi_4 + \varphi_1; \; \psi' = \varphi_3 - \varphi_2 \quad (13);$$

Так для точки P будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} X_P &= \frac{X_B ctg\psi - Y_B + X_A ctg\psi' + Y_A}{ctg\psi + ctg\psi'} \\ Y_P &= \frac{Y_B ctg\psi + X_B + Y_A ctg\psi' - X_A}{ctg\psi + ctg\psi'} \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(14);}$$

Аналогичным образом находим координаты точки Q, используя для решения прямой угловой засечки, вычисленные примычные углы φ_3 и φ_4.

├ ■("X" ↓"Q" " = " ("X" ↓"B" 〖"ctgφ" 〗↓"4" 〖"-Y" 〗↓"B" 〖" + X" 〗↓"A" 〖"ctgφ" 〗↓"3" 〖" + Y" 〗↓"

Для оценки точности полученных координат точек P и Q можно воспользоваться формулами, приведенными в работе [3]. Применительно к обозначениям, приведенным на рисунке 1, они будут иметь следующий вид:

$d_4^2 + 2d_3$↑

Для лучшего восприятия предложенных решений по привязке пары пунктов решим эту задачу на примере проведенных измерений.

Исходными пунктами возьмем точки A и B с известными координатами в условной системе координат, а горизонтальные углы измерим с точностью до десятых минут. Все данные для расчета представим в таблице 1.

Таблица 1 - Исходные данные и результаты полевых измерений

№	Название пункта	Координаты	
		X	Y
1	A	981,469	301,796
2	B	994,930	2052,903
	Горизонтальные углы	Измеренный угол, ° ’	
	β_1	112°25,6’	
	β_2	31°07,5’	
	β_3	29°08,0’	
	β_4	108°04,0’	

$$\varphi_1 = 180° - (\beta_1 + \beta_3) = 180° - (112°25{,}6' + 29°48{,}0') = 37°46{,}4'$$

$$\varphi_2 = 180° - (\beta_4 + \beta_2) = 180° - (108°04{,}0' + 31°07{,}5') = 40°48{,}5'$$

$$\gamma_1 = \beta_4 - \beta_3 = 108°04{,}0' + 29°48{,}0' = 78°16{,}0'$$

$$a = \frac{\sin 112°25{,}6' \times \sin 40°48{,}5'}{\sin 31°07{,}5' \times \sin 37°46{,}4'} = \frac{0.604104}{0.316626} = \mathbf{1{,}907941}$$

$$tg\varphi_4 = \frac{sin\gamma_1}{a - cos\gamma_1} = \frac{\sin 78°16{,}0'}{1{,}907941 - \cos 78°16{,}0'} = 0{,}\mathbf{574395}$$

$$\varphi_1 4 = 29°52'22"$$

$$tg\varphi_3 = \frac{a \times sin\gamma_1}{1 - a \times cos\gamma_1} = \frac{1{,}907941 \times \sin 78°16{,}0'}{1 - 1{,}907941 \times \cos 78°16{,}0'} = 3{,}\mathbf{052375}$$

$$\varphi_1 3 = 71°51'38"$$

Контроль вычисления:

$\varphi_3 + \varphi_4 + \gamma_1 = 180°$; $71°51'38 + 29°52'22 + 78°16{,}0' = \mathbf{180°}$

$\psi = 29°52'22 + 37°46{,}4' = 67°38'\mathbf{46}$;

$\psi' = 71°51'38 - 40°48{,}5' = 31°03'08$

Находим координаты точки P:

$$X_P = \frac{994{,}930ctg67°38'46 - 2052{,}903 + 981{,}469\mathbf{ctg31°03'08}\backslash + \mathbf{301,796}}{ctg\mathbf{67°38'46} + \mathbf{ctg31°03'08}\backslash} =$$

$$Y_P = \frac{2052{,}903ctg67°38'46 + 994{,}930 + 301{,}796\mathbf{ctg31°03'08}\backslash - \mathbf{981,469}}{ctg\mathbf{67°38'46} + \mathbf{ctg31°03'08}\backslash} =$$

Для точки Q:

$$X_Q = \frac{994{,}930ctg29°52'22 - 2052{,}903 + 981{,}469\mathbf{ctg}\,71°51'38 + \mathbf{301,796}}{ctg\mathbf{29°52'22} + \mathbf{ctg}\,71°51'38} =$$

$$Y_Q = \frac{2052{,}903ctg29°52'22 + 994{,}930 + 301{,}796\mathbf{ctg71°51'38} - \mathbf{981,469}}{ctg\mathbf{29°52'22} + \mathbf{ctg}\,71°51'38} =$$

Для проведения оценки точности предварительно необходимо найти длины сторон из решения обратной геодезической задачи по линиям d_2, d_3, d_4, d_5, и далее по формулам (16) выполним расчет среднеквадратических ошибок положения точек P и Q.

d_2=1699,643 м., d_3=890,826 м., d_4=1638,409 м., d_5=913,789 м.

$$m_1P = (5''/(206265'' \times 0{,}988498))\ \sqrt{(10484807 + 1316455)} = \pm 0{,}103 \text{ м.}$$

$$m_1Q = (5''/(206265'' \times 0{,}979105))\ \sqrt{(9265499 + 8411737)} = \pm 0{,}104 \text{ м.}$$

Таким образом, в статье представлен способ решения задачи геодезической привязки двух точек по двум исходным (задача Ганзена) путем определения действительных примычных углов и приведение этой задачи к решению прямой угловой засечки.

Литература

1. Справочник геодезиста. Под ред. В. Д. Большакова и Г. П. Левчука, М, Недра, 1985г.
2. Чижмаков А. Ф., Чижмакова А. М., Геодезия, Москва, Недра 1977г.
3. Соколов Ю. Г., Гурский И. Н., Струсь С. С., Пшидаток С. К. «К оценке точности определения координат в задаче Ганзена», Политематический электронный журнал февраль 2016.

REFERENCES

1. Spravochnik geodezista. Pod red. V. D. Bol'shakova i G. P. Levchuka, M, Nedra, 1985g.
2. Chizhmakov A. F., Chizhmakova A. M., Geodezija, Moskva, Nedra 1977g.
3. Sokolov Ju. G., Gurskij I. N., Strus' S. S., Pshidatok S. K. «K ocenke tochnosti opredelenija koordinat v zadache Ganzena», Politematicheskij jelektronnyj zhurnal fevral' 2016.