

УДК 519.2:303.732.4

UDC 519.2:303.732.4

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and mathematical sciences

**ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ В  
СТАТИСТИЧЕСКОМ КОНТРОЛЕ****LIMIT THEOREMS IN STATISTICAL  
CONTROL**

Орлов Александр Иванович  
д.э.н., д.т.н., к.ф.-м.н., профессор  
РИНЦ SPIN-код: 4342-4994  
*Московский государственный технический  
университет им. Н.Э. Баумана, Россия, 105005,  
Москва, 2-я Бауманская ул., 5, [prof-orlov@mail.ru](mailto:prof-orlov@mail.ru)*

Orlov Alexander Ivanovich  
Dr.Sci.Econ., Dr.Sci.Tech., Cand.Phys-Math.Sci.,  
professor  
*Bauman Moscow State Technical University,  
Moscow, Russia*

Проанализировано развитие теории статистического контроля (от XVIII в. до наших дней). М.В. Остроградский (1846) четко описывает потребности практики (а именно, возникающие при проверке качества больших партий мешков муки или штук сукна), для удовлетворения которых он провел свое исследование. В то же время Симпсон остался в кругу идей теории вероятностей XVIII в. Поэтому М.В. Остроградского следует считать основоположником теории статистического контроля (не только в нашей стране, но и во всем мире). Предельные теоремы теории вероятностей и математической статистики позволили получить ряд асимптотических результатов в задачах статистического контроля качества, предложить основанные на них практические рекомендации. Однако необходимо выяснить, насколько интересующие специалистов характеристики отличаются от предельных при конечных объемах выборки. Для алгоритма синтеза плана контроля на основе предела среднего выходного уровня дефектности это сделано в настоящей статье, а для алгоритма синтеза плана контроля на основе приемочного и браковочного уровней дефектности - пока нет (выяснение условий применимости этого алгоритма - нерешенная задача прикладной математики). Кратко рассмотрено развитие наших исследований по статистическому контролю. Единицами контроля могут быть не только единицы продукции, но и документы (при внутреннем и внешнем аудите), и условные единицы воздуха, воды, почвы при экологическом мониторинге. Одним из достижений можно считать перенос методов статистического контроля продукции на экологический мониторинг

The article analyzes the development of the theory of statistical control (from the XVIII century to the present). Prof. M.V. Ostrogradskii (1846) clearly describes the practical needs (ie, arising from the quality assurance of large quantities of bags of flour or pieces of cloth), to meet whom he spent his research. At the same time Simpson was among the ideas of probability theory XVIII century. Therefore prof. M.V. Ostrogradskii may be regarded as the founder of the theory of statistical process control (not only in our country but all over the world). Limit theorems of probability theory and mathematical statistics have provided a number of asymptotic results in problems of statistical quality control, offer based on these best practices. However, we must find out how much interest among specialists characteristics are different from limit for finite sample sizes. Such research for the synthesis algorithm control plan on the basis of the limit average output level of defects is made in this article, and for the synthesis algorithm control plan on the basis of the acceptance and the rejection levels of defects - not yet (clarification of the conditions of applicability of this algorithm - unsolved problem of applied mathematics). We have briefly reviewed the development of our researches on the statistical control. Control units can be not only some units of production, but also documents (with internal and external audit), and standard units of air, water and soil in the environmental monitoring. One of the achievements can be regarded as the transfer of statistical control of production for environmental monitoring

Ключевые слова: МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ, СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, КАЧЕСТВО, ВЫБОРОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ, СТАТИСТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ, ПЛАН СТАТИСТИЧЕСКОГО КОНТРОЛЯ, ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Keywords: MATHEMATICAL METHODS OF RESEARCH, STATISTICAL METHODS, QUALITY, SAMPLING CONTROL, STATISTICAL CONTROL, PLAN OF STATISTICAL CONTROL, LIMIT THEOREMS

## **1. Введение**

Статистические методы управления качеством продукции и услуг, обеспечения необходимого потребителям уровня качества включают в себя методы статистического контроля. Эти методы развиваем в соответствии с новой парадигмой математических методов исследования, с ее важнейшей составной частью - новой парадигмой статистических методов.

Отличительные черты новой парадигмы статистических методов обсуждались, в частности, в докладе [1] на основной на территории бывшего Советского Союза регулярно проводящейся в Ташкенте научной конференции по рассматриваемой тематике "Статистика и её применения". Новым теоретическим результатам посвящен доклад [2] на той же конференции работа 2013 г. Рассмотрим актуальные вопросы применения статистических методов в важной практической области - при управлении качеством промышленной продукции, которые были рассмотрены в Ташкенте в 2015 г.

Разделы, посвященные статистическим методам обеспечения качества, включены в учебники по эконометрике [3], теории принятия решений [4, 5], статистическим методам анализа данных [6]. Наши новые научные результаты по вопросам статистического контроля опубликованы в статьях [7 - 9].

## **2. О развитии теории статистического контроля**

О начальных шагах теории статистического контроля рассказывает Б.В. Гнеденко в [10]. В главе 2 этой книги есть параграф 6 «Статистический контроль качества продукции» (с.47-50). По словам Б.В. Гнеденко:

«Первым шагом, относящимся к этому кругу идей, по-видимому, следует считать одну из задач, рассмотренных Т. Симпсоном в книге

«Природа и законы случая» (1740). Вот формулировка этой задачи: имеется данное число вещей различного сорта –  $n_1$  вещей первого,  $n_2$  – второго, ... Наудачу берутся  $m$  вещей. Найти вероятность того, что при этом будет взято  $m_1$  вещей первого сорта,  $m_2$  вещей второго и т.д. В настоящее время эта задача не представляет труда для студентов, приступающих к изучению основ теории вероятностей. В ту пору она была предметом серьезного научного трактата».

Спустя сто с небольшим лет к этой задаче, но уже исходя из запросов практики, обратился М.В. Остроградский (1801 – 1862) в работе 1846 г. «Об одном вопросе, касающемся вероятностей» [11]. Вот что он писал (см. также [12]):

«В сосуде имеются белые и черные шары, общее количество которых нам известно, но мы не знаем, сколько из них какого цвета. Мы извлекаем некоторое количество шаров. Подсчитав, сколько из них белых и сколько черных, снова кладем в сосуд. Требуется определить вероятность того, что общее число белых не выходит из наперед заданных пределов. Или, лучше сказать, мы ищем зависимость между этой вероятностью и пределами, о которых идет речь.

Чтобы понять важность этого вопроса, представим себя на месте того, кто должен получить большое число предметов, причем должны выполняться некоторые условия, и кто, чтобы проверить эти условия, должен на каждый предмет потратить некоторое время. Перед армейскими поставщиками часто стоят такого рода задачи. Для них шары, содержащиеся в сосуде, представляют получаемые предметы, белые, например – предметы приемлемые, как удовлетворяющие определенным условиям, а черные – неприемлемые. (...)

Таким образом, если бы вопрос, который мы перед собой поставили, был решен, поставщик мог бы воспользоваться этим, чтобы свести приблизительно к двадцатой доле часто очень утомительную работу, как,

например, проверку большого количества мешков муки или штук сукна». [11, с.215].

Мы видим, что М.В. Остроградский четко описывает потребности практики (а именно, возникающие при проверке качества больших партий мешков муки или штук сукна), для удовлетворения которых он провел свое исследование. В то же время Симпсон остался в кругу идей теории вероятностей XVIII в. Поэтому М.В. Остроградского следует считать основоположником теории статистического контроля (не только в нашей стране, но и во всем мире).

Итак, уже около 170 лет статистические методы применяются для проверки соответствия продукции установленным требованиям, т.е. для сертификации. Основополагающая работа выполнена в 1846 г. действительным членом Петербургской академии наук М.В. Остроградским, который рассматривал задачу статистического контроля партий мешков муки или штук сукна армейскими поставщиками. Специалистам хорошо известна эта «точка отсчета». Например, в монографии проф. Я.Б. Шора [13] раздел 4 «Методы статистического контроля качества» начинается со ссылки на статью М.В. Остроградского 1846 г.

По словам Б.В. Гнеденко [10, с.49], «из отечественных ученых заслуживают быть отмеченными А.Н. Колмогоров (1903 – 1987), В.И. Романовский (1879 – 1954), С.Х. Сираждинов (1921 – 1988), Ю.К. Беляев (р. 1932) и др.». Отметим большое значение работ В.И. Романовского – основателя современной математической школы в Узбекистане, к которой, относятся, в частности, С.Х. Сираждинов и А.А. Абдушукуров, доклад которого [14] содержит анализ работ В.И. Романовского. Так, в статье 1932 г. «Вопросы статистического учета» [15] он обсуждает, в частности, «применение статистики к технике и индустрии: к контролю производства, к испытанию качества продуктов массового производства и т.д. Он

призывает заняться этой отраслью статистики, ввести курс в экономических вузах» [14, с.7]. На Всесоюзном совещании по математической статистике (осень 1948 г., Ташкент) В.И. Романовский выступил с докладом «О статистических методах контроля производства и качества продукции» [16]. В списке научных трудов В.И. Романовского, приведенным в его научной биографии [17], указано 12 публикаций по статистическим методам контроля качества (№№ 95, 110, 161, 169, 171, 177, 187, 188, 189, 193, 205, 206 в [17, с.143-152]).

Со времен М.В. Остроградского в России в статистическом контроле качества было сделано многое, особенно в области теории. Прорывные результаты получены в работе А.Н. Колмогорова [18] (см. также [19]). Так, монографии Ю.К. Беляева [20] и Я.П. Лумельского [21] можно смело назвать классическими. Был выпущен и длинный ряд практических руководств, в основном переводных.

Узбекская математическая школа заслужила всемирное признание. Именно поэтому в Ташкенте в 1986 г. был проведен Первый Всемирный Конгресс Общества математической статистики и теории вероятностей им. Бернулли [22 - 24]. Много важных результатов было получено в области статистических методов контроля производства и качества продукции. Так, в списке научных трудов С.Х. Сираждинова, приведенным в юбилейной статье [25], указано 7 публикаций по статистическим методам контроля качества (№№ 64, 69, 71, 73, 74, 78, 90 в [25, с. 239-242]). Значительное место в рассматриваемой области занимает математическая теория надежности [26]. При проведении испытаний на надежность необходимо обрабатывать неполные наблюдения, а для этого требуется развитие асимптотической теории оценивания для неклассических моделей [27]. В эту теорию входят методы оценивания функции распределения в моделях случайного цензурирования [28]. Представители узбекской математической школы получили ценные научные результаты в

области анализа цензурированных данных. Эти результаты продвигают применения вероятностно-статистических методов в теории и практике надежности сложных технических систем, а также в других предметных областях.

Предельные теоремы теории вероятностей и математической статистики позволили получить ряд асимптотических результатов в задачах статистического контроля качества, предложить основанные на них практические рекомендации [8]. Однако необходимо выяснить, насколько интересующие специалистов характеристики отличаются от предельных при конечных объемах выборок. Рассмотрим два примера, в одном из которых ответ на поставленный вопрос получен, а в другом - пока нет.

### **3. Синтез плана контроля на основе предела среднего выходного уровня дефектности**

Рассмотрим статистический приемочный контроль с разбраковкой. Забракованная по результатам контроля выборки партия продукции подвергается сплошному контролю. Все дефектные изделия обнаруживаются и либо исправляются на месте, либо извлекаются из партии. В результате в партии остаются только годные изделия. Такая процедура и называется «контроль с разбраковкой». Таким образом, «контроль с разбраковкой» – это статистический контроль, дополненный правилом: забракованная партия подвергается сплошному контролю.

При среднем входном уровне дефектности  $p$  и применении контроля с разбраковкой с вероятностью  $f(p)$  партия принимается (и уровень дефектности в ней по-прежнему равен  $p$ ) и с вероятностью  $(1 - f(p))$  бракуется и подвергается сплошному контролю, в результате чего к потребителю поступают только годные изделия. Следовательно, по формуле полной вероятности средний выходной уровень дефектности равен

$$f_1(p) = pf(p) + 0(1 - f(p)) = pf(p).$$

Средний выходной уровень дефектности  $f_1(p)$  равен 0 при  $p = 0$  и  $p = 1$ , положителен на интервале  $(0;1)$ , а потому достигает на нем максимума (по теореме математического анализа о том, что непрерывная функция на отрезке достигает максимума), который в теории статистического контроля называется пределом среднего выходного уровня дефектности (сокращенно ПСВУД):

$$ПСВУД = \max_{0 \leq p \leq 1} f_1(p).$$

*Пример.* Рассмотрим план  $(n, 0)$ . Для него, как известно,  $f(p) = (1 - p)^n$ , следовательно,  $f_1(p) = p(1 - p)^n$ . Чтобы найти ПСВУД, надо приравнять 0 производную среднего выходного уровня дефектности по среднему выходному уровню дефектности:

$$\begin{aligned} \frac{df_1(p)}{dp} &= (p(1 - p)^n)' = (1 - p)^n + pn(1 - p)^{n-1} = \\ &= (1 - p)^{n-1}(1 - p - pn) = (1 - p)^{n-1}(1 - (n + 1)p) = 0. \end{aligned}$$

В полученном уравнении корень  $p = 1$  соответствует минимуму, а не максимуму. Поскольку непрерывная функция на замкнутом отрезке достигает максимума, то максимум будет при

$$p_n = \frac{1}{n + 1}.$$

Следовательно,

$$ПСВУД = p_n(1 - p_n)^n = \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \quad (1)$$

По выражению (1) могут быть проведены конкретные расчеты. Однако оно довольно громоздко. Его можно упростить, используя один из замечательных пределов, полученных в курсе математического анализа, а именно:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e^{-1} = \frac{1}{2,718281828...} \approx 0,368. \quad (2)$$

Сравнивая соотношения (1) и (2), видим, что

$$ПСВУД = \left( \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} \right) \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}.$$

Первая скобка равна  $1/n$ , а вторая согласно соотношению (2) приближается к 0,368 при росте объема выборки. Поэтому получаем простую асимптотическую формулу

$$ПСВУД \approx \frac{0,368}{n}.$$

Изучим, исходя из (2), применимость различных функций для аппроксимации выражения

$$f(n) = \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}$$

Магистрант МФТИ Константин Виноградов предложил несколько вариантов функций, аппроксимирующих  $f(n)$ , и исследовал ошибки при конкретных значениях  $n$ . Изучены следующие 5 функций:

$$f_1(n) = \frac{0,4}{n}, \quad f_2(n) = \frac{0,37}{n}, \quad f_3(n) = \frac{0,368}{n}, \quad f_4(n) = \frac{0,3679}{n}, \quad f_5(n) = \frac{1}{ne}.$$

Для исследования функций К. Виноградов использовал язык R (The R Foundation for Statistical Computing).

На рис. 1 показаны зависимость исходной функции от аргумента, а также приведены графики для аппроксимирующих функций:

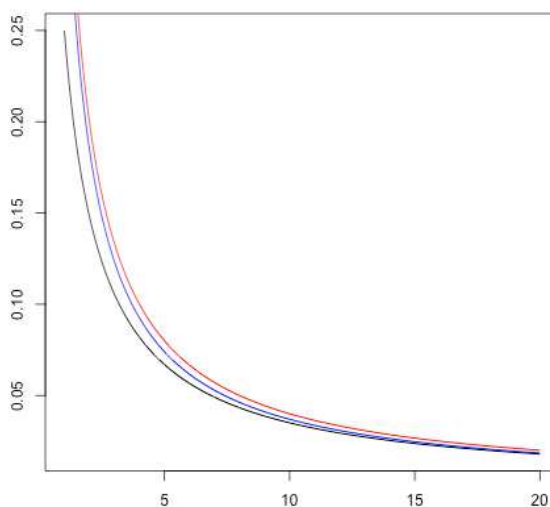


Рис. 1. Графики функций

черная линия –  $f(n)$ ,  
 красная линия –  $f_1(n)$ ,  
 синяя линия –  $f_2(n)$ ,  $f_3(n)$ ,  $f_4(n)$ ,  $f_5(n)$  (на графике эти функции неразличимы).

"На глаз" видно, что черная и синяя линии сливаются при объеме выборки 12 - 13. Для получения более точных выводов изучим относительную погрешность.



Будем рассчитывать относительную погрешность аппроксимации по формуле:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i(n) = \left| \frac{f_i(n) - f(n)}{f(n)} \right|, \quad i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

На рис. 2 приведены зависимости относительных погрешностей от значений аргумента объема выборки  $n$ :

красная линия –  $\varepsilon_1$ ,

синяя линия –  $\varepsilon_2$

зеленая линия –  $\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$

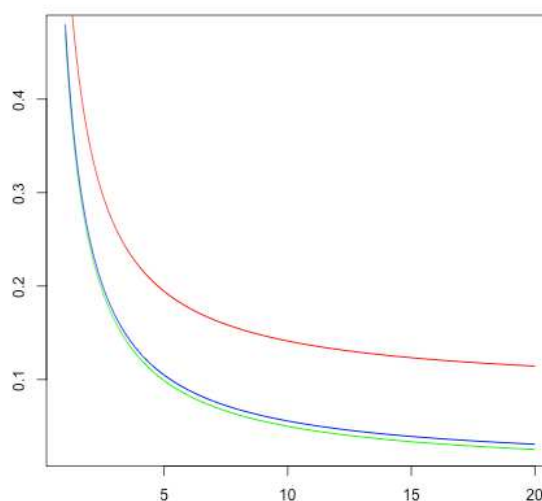


Рис.2. Относительные погрешности

(на графике эти функции неразличимы).

Последняя из рассмотренных функций представляют собой формулу, которая получается из  $f(n)$  при замене выражения в скобках значением второго замечательного предела. Остальные 4 функции являются этой же функцией с числителем, округленным соответственно до 1 - 4 знаков после запятой.

Далее в табл. 1 приведены результаты оценки относительной ошибки при аппроксимации искомой функции  $f(n)$  выбранным набором 5 функций.

В ячейках табл. 1 указаны объемы выборок  $n$ , начиная с которых погрешности аппроксимации  $\varepsilon_i(n)$ , округленные до целых процентов, составляют 0 - 5%.

Таким образом, мы получили, что функция  $f_1(n)$  вообще не подходит для расчетов с высокой точностью ( $\varepsilon \leq 5\%$ ), а  $f_2(n)$  не может обеспечить ошибку менее 1% при конечном значении аргумента. В результате, для достижения точности аппроксимации в 95% (т.е. погрешности  $\varepsilon \leq 5\%$ ) при  $n = 10$  достаточно использовать в расчетах  $f_3(n) = 0,368/n$ , а при  $n \geq 11$  достаточно  $f_2(n) = 0,37/n$ .

Следовательно, полученная в [8] на основе предельных теорем рекомендация об использовании  $f_3(n) = 0,368/n$  обоснована при  $n \geq 10$ . При меньших объемах выборки ее применять нецелесообразно (при столь малых объемах выборки надо использовать  $f(n)$ ). Впрочем, на практике объем выборки менее 10 встречается редко.

Таблица 1. Объемы выборок  $n$ , обеспечивающие заданную погрешность  $\varepsilon$ .

$\varepsilon$ (%)	Объемы выборок $n$ для аппроксимирующих функций $f_i(n)$				
	$f_1(n)$	$f_2(n)$	$f_3(n)$	$f_4(n)$	$f_5(n)$
5%	$\infty$	11	10	10	10
4%	$\infty$	13	12	12	12
3%	$\infty$	18	15	15	15
2%	$\infty$	27	21	20	20
1%	$\infty$	55	35	34	34
0%	$\infty$	$\infty$	107	102	100

#### 4. Синтез плана контроля на основе приемочного и браковочного уровней дефектности

Пусть  $X$  - число дефектных единиц продукции в выборке объема  $n$ . Распределение  $X$  является биномиальным. Пусть используется одноступенчатый план контроля  $(n, c)$ . Оперативная характеристика этого плана (т.е. вероятность приемки партии в зависимости от входного уровня дефектности  $p$ ) имеет вид

$$f(p) = \sum_{1 \leq k \leq c} P(X = k) = \sum_{1 \leq k \leq c} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

При безграничном росте объема выборки  $n$  по теореме Бернулли выборочная доля  $X/n$  дефектных единиц продукции приближается к вероятности дефектности  $p$  (сходимость по вероятности). Значит, если  $c/n$

окажется заметно больше входного уровня дефектности  $p$ , то партии будут почти всегда приниматься, а если  $c/n$  окажется заметно меньше входного уровня дефектности  $p$ , то партии будут почти всегда отклоняться. Ситуация будет нетривиальной только тогда, когда величины  $c/n$  и  $p$  близки друг к другу.

Хотя оперативная характеристика рассчитывается с помощью сумм биномиальных вероятностей, анализировать эти суммы затруднительно. Поэтому целесообразно найти для нее приближение с помощью теоремы Муавра – Лапласа. Имеем цепочку тождественных преобразований:

$$f(p) = P(X \leq c) = P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{c - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Справа стоит именно то выражение, которое участвует в (интегральной) теореме Муавра - Лапласа, впервые доказанной, как известно, П.Л. Чебышёвым). Воспользовавшись равномерной сходимостью в этой теореме, можно записать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(p) = \Phi\left(\frac{c - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

где  $\Phi(x)$  - функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

Последняя формула позволяет указать асимптотические выражения для приемочного  $p_{np}$  и браковочного  $p_{\delta p}$  уровней дефектности, исходя из риска поставщика  $\alpha$  и риска потребителя  $\beta$ . Действительно, согласно определениям этих понятий

$$\Phi\left(\frac{c - np_{np}}{\sqrt{np_{np}(1-p_{np}))}}\right) = 1 - \alpha, \quad \Phi\left(\frac{c - np_{\delta p}}{\sqrt{np_{\delta p}(1-p_{\delta p}))}}\right) = \beta, \quad (3)$$

откуда с помощью элементарных преобразований получаем, что

$$p_{np} = \frac{c}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{c}{n} \left(1 - \frac{c}{n}\right)} \Phi^{-1}(1 - \alpha), \quad p_{\delta p} = \frac{c}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{c}{n} \left(1 - \frac{c}{n}\right)} \Phi^{-1}(\beta). \quad (4)$$

Так как величины  $c/n$  и  $p$  близки друг к другу, то при переходе от формулы (3) к формуле (4) в подкоренных выражениях приемочный и браковочный уровни дефектности заменены на  $c/n$  (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка).

Поскольку при практическом применении статистического приемочного контроля принимают  $\alpha = 0,05$ ,  $\beta = 0,10$ , то в предыдущие формулы следует подставить  $\Phi^{-1}(0,95) = 1,64$  и  $\Phi^{-1}(0,10) = - 1,28$ . Итак, итоговые формулы для приемочного и браковочного уровней дефектности имеют вид

$$p_{np} = \frac{c}{n} - \frac{1,64}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{c}{n} \left(1 - \frac{c}{n}\right)}, \quad p_{\bar{op}} = \frac{c}{n} + \frac{1,28}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{c}{n} \left(1 - \frac{c}{n}\right)}.$$

Перейдем к задаче синтеза плана статистического контроля. Пусть заданы приемочный и браковочный уровни дефектности. Требуется построить одноступенчатый план, имеющий эти характеристики. Из формул (3) следует, в частности, что

$$c - np_{np} = \Phi^{-1}(1 - \alpha) \sqrt{np_{np}(1 - p_{np})}, \quad c - np_{\bar{op}} = \Phi^{-1}(\beta) \sqrt{np_{\bar{op}}(1 - p_{\bar{op}})}. \quad (5)$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем, что

$$np_{\bar{op}} - np_{np} = \sqrt{n} \{ \Phi^{-1}(1 - \alpha) \sqrt{p_{np}(1 - p_{np})} - \Phi^{-1}(\beta) \sqrt{p_{\bar{op}}(1 - p_{\bar{op}})} \}.$$

Следовательно, оценка  $n^*$  необходимого объема выборки имеет вид

$$n^* = \left( \frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha) \sqrt{p_{np}(1 - p_{np})} - \Phi^{-1}(\beta) \sqrt{p_{\bar{op}}(1 - p_{\bar{op}})}}{p_{\bar{op}} - p_{np}} \right)^2.$$

Для стандартных значений рисков  $\alpha = 0,05$ ,  $\beta = 0,10$  имеем:

$$n^* = \left( \frac{1,64 \sqrt{p_{np}(1 - p_{np})} + 1,28 \sqrt{p_{\bar{op}}(1 - p_{\bar{op}})}}{p_{\bar{op}} - p_{np}} \right)^2 \quad (6)$$

С помощью уравнений (5) нетрудно найти оценку  $c^*$  приемочного числа, заменив неизвестный объем выборки на его оценку  $n^*$ . Будем использовать оценку

$$c^* = n^* p_{\hat{op}} + \Phi^{-1}(\beta) \sqrt{n^* p_{\hat{op}} (1 - p_{\hat{op}})}.$$

Для стандартного значения  $\beta = 0,10$  имеем

$$c^* = n^* p_{\hat{op}} - 1,28 \sqrt{n^* p_{\hat{op}} (1 - p_{\hat{op}})}. \quad (7)$$

Итак, по формуле (6) можно рассчитать оценку объема выборки, затем по формуле (7) найти оценку приемочного числа. Необходимо отметить, что результаты расчетов по рассматриваемым асимптотическим формулам практически никогда не дают целые числа, поэтому необходима корректировка (округление до целого) полученных результатов.

Полученные формулы позволяют решить сформулированную выше задачу - по заданным приемочному и браковочному уровням дефектности подобрать такой одноступенчатый план контроля, что его оперативная характеристика  $f(p)$  удовлетворяет неравенствам

$$f(p_{np}) \geq 1 - \alpha, \quad f(p_{bp}) \leq \beta.$$

Поэтому при практической работе корректировка асимптотических результатов должна быть направлена на выполнение указанных неравенств.

*Пример.* Пусть  $p_{np} = 0,02$ ,  $p_{bp} = 0,09$ . Тогда по формуле (5) оценка объема выборки равна

$$\begin{aligned} n^* &= \left( \frac{1,64 \sqrt{0,02(1-0,02)} + 1,28 \sqrt{0,09(1-0,09)}}{0,09 - 0,02} \right)^2 = \left( \frac{1,64 \times 0,14 + 1,28 \times 0,286}{0,07} \right)^2 = \\ &= \left( \frac{0,2296 + 0,3661}{0,07} \right)^2 = \left( \frac{0,5957}{0,07} \right)^2 = 8,51^2 = 72,42. \end{aligned}$$

Полученное число не является натуральным, поэтому вполне естественно откорректировать объем выборки до ближайшего целого, т.е. до  $n^* = 72$ .

Оценку приемочного числа находим по формуле (6):

$$c^* = 72 \times 0,09 - 1,28 \sqrt{72 \times 0,09 \times 0,91} = 6,48 - 1,28 \times 2,428 = 3,37.$$

Полученное число не является целым, поэтому в качестве приемочного числа надо взять ближайшее целое, т.е. до 3.

Если объем выборки округлить до 73, то аналогично получим

$$c^{**} = 73 \times 0,09 - 1,28 \sqrt{73 \times 0,09 \times 0,91} = 6,57 - 1,28 \times 2,445 = 3,44.$$

При округлении снова получаем 3.

С помощью первого из уравнений (12) можно построить оценку  $c^*$  на основе приемочного уровня дефектности:

$$c^* = n^* p_{np} + \Phi^{-1}(1 - \alpha) \sqrt{n^* p_{np} (1 - p_{np})} = n^* p_{np} + 1,64 \sqrt{n^* p_{np} (1 - p_{np})}.$$

Подставив конкретные значения, получим практически ту же оценку, что и раньше:

$$c^* = n^* p_{np} + 1,64 \sqrt{n^* p_{np} (1 - p_{np})} = 72 \times 0,02 + 1,64 \sqrt{72 \times 0,02 \times 0,98} = 3,39.$$

Итак, в результате асимптотических расчетов найден одноступенчатый план (72, 3).

Необходимо изучение точности приведенных рекомендаций при синтезе планов на основе приемочного и браковочного уровней дефектности, полученных на основе предельных теорем. Во-первых, при каких условиях полученные по формулам (6) и (7) значения мало отличаются от точных значений (см., например, американский стандарт MIL STD 105 D и ГОСТ 18242-72). Во-вторых, по каким правилам проводить округления полученных по формулам (6) и (7) чисел до целых значений.

## **5. О некоторых работах по статистическому контролю**

В области статистических методов управления качеством есть много других нерешенных проблем. Они обсуждаются, в частности, в недавних работах [29, 30].

С целью адекватного восприятия положений настоящей статьи целесообразно кратко рассмотреть развитие наших работ по статистическому контролю.

В выполненной по заданию Госстандарта научной разработке по статистическому контролю использованием экономических критериев [31]

автор настоящей статьи отвечал за математическую сторону, основанную на байесовском подходе.

Методологические и теоретические основы статистического контроля как научно-практической области рассмотрены в программной статье [32].

Вместо с аспирантом Г.Г. Кравченко автором настоящей статьи разработан новый метод статистического контроля бесформенной (жидкой, газообразной, порошкообразной, сыпучей, тестообразной и т.п.) продукции, основанный на мысленном разделении всей массы продукции на условные единицы контроля [33, 34]. Для определения размеров выделяемых единиц контроля применялся метод проверки значимости отличия от 0 непараметрического коэффициента ранговой корреляции Спирмена.

Обоснованию адекватной трактовки понятий «приемочный уровень дефектности» и «браковочный уровень дефектности» посвящена работа [35]. В ней продемонстрировано, что «приемочный уровень дефектности» и «браковочный уровень дефектности» - это характеристики плана контроля, а не технологического процесса, как ошибочно полагали некоторые авторы. Выбирать значения этих характеристик с целью синтеза плана контроля следует, разумеется, на основе анализа соответствующего технологического процесса и требований, предъявляемых к продукции. Однако нецелесообразно связывать рассматриваемые понятия именно с технологическим процессом и продукцией.

Созданный автором настоящей статьи Всесоюзный центр статистических методов и информатики Центрального правления Всесоюзного статистического общества разработал ряд программных продуктов (диалоговых систем) по статистическому контролю. Их сравнительный анализ дан в статье [36].

Новые теоретические результаты были получены в конце 90-х годов. Так, предложено статистический контроль рассматривать как часть

технико-экономического взаимодействия поставщика и потребителя [7, 37]. В частности, установлено, что в случае высокого качества продукции целесообразно отказаться от выходного контроля, создав систему устранения дефектов у потребителей.

На основе теории люсианов и несмещенных оценок разработаны принципиально новые методы статистического контроля по двум альтернативным признакам [9, 38].

Предварительные итоги работ автора настоящей статьи по статистическим методам обеспечения качества продукции подведены в работах [39, 40].

Статистический контроль процессов с целью обнаружения разладки (отклонения) осуществляется с помощью контрольных карт Шухарта и кумулятивных сумм. Им посвящены статья [41], посвященная обнаружению изменений в организационно-экономических процессах, работы [42, 43], касающиеся выявления отклонений в системе контроллинга, статьи [44, 45], посвященные обеспечению безопасности полетов.

Полученные автором настоящей статьи научные результаты по статистическому контролю вошли в учебники [3 - 6], а также в учебное пособие [46]. В учебниках [5, 6] есть раздел про контрольные карты.

Отметим, что в перечисленных учебниках рассматривается синтез плана одноступенчатого контроля по значениям приемочного и браковочного уровней дефектности. Даны асимптотические формулы на основе теоремы Муавра - Лапласа. Как уже отмечалось, границы их применимости требуют изучения с помощью численных методов. В первом издании «Эконометрики» [3], выпущенном в 2002 г., приведены первоначальные формулы, в дальнейших изданиях и других учебниках – усовершенствованные, с более естественным выводом.



Синтез планов на основе ограничений на предел среднего выходного уровня дефектности также основан на асимптотическом методе, границы его применимости впервые изучены в настоящей статье с помощью численных методов.

Единицами контроля могут быть не только единицы продукции, но и документы (при внутреннем и внешнем аудите), и условные единицы воздуха, воды, почвы при экологическом мониторинге. Одним из достижений (видимо, основное продвижение автора настоящей статьи в экологической науке) можно считать перенес методов статистического контроля продукции на экологический мониторинг. Об этом рассказано во всех книгах автора настоящей статьи по экологической тематике, в частности, в крайней из них, подводящей итоги [47].

### Литература

1. Орлов А.И. Новая парадигма математической статистики // Материалы республиканской научно-практической конференции «Статистика и её применения – 2012». Под редакцией профессора А.А. Абдушукурова. – Ташкент: НУУз, 2012. – С.21-36.
2. Орлов А.И. Средние величины и законы больших чисел в топологических пространствах с показателями различия // Статистика и её применения. Материалы республиканской научно-практической конференции (Ташкент, 17-18 октября 2013 г.). – Ташкент: Изд-во «Университет», 2013. – С.30-37.
3. Орлов А.И. Эконометрика. 3-е изд. — М.: Экзамен, 2004. — 576 с.
4. Орлов А.И. Теория принятия решений. — М.: Экзамен, 2006. — 574 с.
5. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование: теория принятия решений. — М.: КноРус, 2011. — 568 с.
6. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование : в 3 ч. Ч.3. Статистические методы анализа данных. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. - 624 с.
7. Орлов А.И. Всегда ли нужен контроль качества продукции у поставщика? // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2014. № 96. С. 709-724.
8. Орлов А.И. Асимптотические методы статистического контроля // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2014. № 102. С. 1–31.
9. Орлов А.И. Метод проверки гипотез по совокупности малых выборок и его применение в теории статистического контроля // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2014. № 104. С. 38–52.

10. Гнеденко Б.В. Очерк по истории теории вероятностей. – М.: Едиториал УРСС, 2001. – 88 с.
11. Остроградский М.В. Об одном вопросе, касающемся вероятностей / Полное собрание трудов. Т.3. – Киев: Издательство Академии наук УССР, 1961. – С.215 – 237.
12. Гнеденко Б.В. Михаил Васильевич Остроградский // Квант. 1982. № 10. С. 5 – 10.
13. Шор Я.Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. – М.: Советское радио, 1962. – 552 с.
14. Абдушукуров А.А. О кафедре «Теория вероятностей и математическая статистика» (к 75 летию кафедры и 95 летию НУУз) // Статистика и её применения. Материалы республиканской научно-практической конференции (Ташкент, 17-18 октября 2013 г.). – Ташкент: Изд-во «Университет», 2013. – С. 5 – 18.
15. Романовский В.И. Выступление по докладу С.М. Гуревича "Вопросы социалистического учета" // Вопросы социалистического учета. Ташкент, 1932. С. 30-32.
16. Романовский В.И. О статистических методах контроля производства и качества продукции // Тезисы докладов и сообщений на Всесоюзном совещании по математической статистике, 27 сентября - 2 октября 1948 г. Ташкент, 1948. С.34.
17. Боголюбов А.Н., Матвиевская Г.П. Всеволод Иванович Романовский (1879 - 1954). - М.: Наука, 1997. - 157 с.
18. Колмогоров А.Н. Статистический приемочный контроль при допустимом числе дефектных изделий, равном нулю. – Л.: Знание, 1951. – 24 с.
19. Орлов А.И. Вероятностно-статистические методы в работах А.Н. Колмогорова // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2014. № 98. С. 96-104.
20. Беляев Ю.К. Вероятностные методы выборочного контроля. – М.: Наука, 1975. – 407 с.
21. Лумельский Я.П. Статистические оценки результатов контроля качества. – М.: Изд-во стандартов, 1979. – 200 с.
22. Орлов А.И. Первый Всемирный конгресс Общества математической статистики и теории вероятностей им. Бернулли // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1987. Т.53. № 3. С. 90-91.
23. Орлов А.И. Всемирный Конгресс Общества им. Бернулли // Стандарты и качество. 1987. № 5. С. 105-105.
24. Орлов А.И. Первый Всемирный конгресс Общества математической статистики и теории вероятностей им. Бернулли // Надежность и контроль качества. 1987. № 6. С. 54-59.
25. Азларов Т.А., Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н., Прохоров Ю.В., Сарымсаков Т.А., Статулявичус В.А. Сагды Хасанович Сираждинов (к шестидесятилетию со дня рождения) // Успехи математических наук. 1981. Т. 36. № 6 (222). С. 237–242.
26. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. - М.: Наука, 1965. - 524 с.
27. Абдушукуров А.А. Статистика неполных наблюдений. Асимптотическая теория оценивания для неклассических моделей. - Ташкент. "Университет", 2009. -267 с.
28. Абдушукуров А.А., Мурадов Р.С. Об оценках функции распределения в моделях случайного цензурирования // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2014. Т.80. № 11. С.62-67.

29. Орлов А.И. Основные проблемы контроллинга качества // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2015. № 111. С. 52–84.

30. Орлов А.И. О развитии асимптотических методов статистического контроля // Материалы республиканской научно-практической конференции "Статистика и ее применения - 2015". Под редакцией профессора А.А. Абдушукурова. - Ташкент, НУУЗ, 2015. - С. 30-40.

31. Сипатрина Л.С., Орлов А.И., Богатырев А.А. Рекомендации. Обоснование планов статистического приемочного контроля по альтернативному признаку при минимизации суммарных затрат. - М.: Изд-во стандартов, 1985. - 14 с.

32. Орлов А.И. Об оптимизации выборочного контроля качества продукции. // Стандарты и качество. 1989. № 3. С. 91-94.

33. Кравченко Г.Г., Орлов А.И. Метод выделения единиц бесформенной продукции при статистическом контроле качества // IV Всесоюзная научно-техническая конференция «Применение многомерного статистического анализа в экономике и оценке качества продукции» (г. Тарту, 5-7 сентября 1989 г.). Тезисы докладов. – Тарту: Изд-во Тартуского государственного ун-та, 1989. С.324-324.

34. Кравченко Г.Г., Орлов А.И. О статистическом приемочном контроле порошкообразных материалов // Надежность и контроль качества. 1991. №2. С.37-39.

35. Орлов А.И. Двойственность понятий в статистическом приемочном контроле // Надежность и контроль качества. 1991. №10, с.22-26.

36. Орлов А.И. Математическое обеспечение сертификации: сравнительный анализ диалоговых систем по статистическому контролю // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1996. Т.62. № 7. С. 46-49.

37. Орлов А.И. Всегда ли нужен контроль качества продукции? // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1999. Т.65. № 11. С. 51-55.

38. Орлов А.И. Статистический контроль по двум альтернативным признакам и метод проверки их независимости по совокупности малых выборок // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2000. Т.66. № 1. С. 58-62.

39. Орлов А.И. Сертификация и статистические методы (обобщающая статья) // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1997. Т.63. № 3. С. 55-62.

40. Орлов А.И. Статистический контроль качества продукции // Российское предпринимательство. 2001. № 2. С. 17-24.

41. Митрохин И.Н., Орлов А.И. Обнаружение разладки с помощью контрольных карт. – Журнал «Заводская лаборатория». 2007. Т. 73. №5.

42. Шаров В.Д., Орлов А.И. О выявлении отклонений в системе контроллинга (на примере мониторинга уровня безопасности полетов) // Green Controlling: Сборник тезисов III Международного конгресса по контроллингу/ Под науч. ред. С.Г. Фалько. – М.: НП «Объединение контроллеров», 2013.– С.133-135.

43. Шаров В.Д., Орлов А.И. Выявление отклонений в системе контроллинга (на примере мониторинга уровня безопасности полетов) // Green Controlling: Сборник трудов III Международного конгресса по контроллингу / Под науч. ред. С.Г. Фалько. – М.: НП «Объединение контроллеров», 2013. – С. 277 – 292.

44. Орлов А.И., Шаров В.Д. Выявление отклонений в контроллинге (на примере мониторинга уровня безопасности полетов) // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2014. № 95. С. 460-469.

45. Орлов А.И., Шаров В.Д. Метод выявления отклонений в системе контроллинга (на примере мониторинга уровня безопасности полетов) // Национальные интересы: приоритеты и безопасность. 2014. № 26 (263). С.54 – 64.

46. Орлов А.И. Принятие решений. Теория и методы разработки управленческих решений. - М.: ИКЦ «МарТ»; Ростов н/Д: Издательский центр «МарТ», 2005. - 496 с.

47. Орлов А.И. Проблемы управления экологической безопасностью. Итоги двадцати лет научных исследований и преподавания. – Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing. 2012. – 344 с.

## References

1. Orlov A.I. Novaja paradigma matematicheskoy statistiki // Materialy respublikanskoj nauchno-prakticheskoy konferencii «Statistika i ejo primenenija – 2012». Pod redakciej professora A.A. Abdushukurova. – Tashkent: NUUz, 2012. – S.21-36.

2. Orlov A.I. Srednie velichiny i zakony bol'shih chisel v topologicheskikh prostranstvakh s pokazateljami razlichija // Statistika i ejo primenenija. Materialy respublikanskoj nauchno-prakticheskoy konferencii (Tashkent, 17-18 oktjabrja 2013 g.). – Tashkent: Izd-vo «Universitet», 2013. – S.30-37.

3. Orlov A.I. Jekonometrika. 3-e izd. — M.: Jekzamen, 2004. — 576 s.

4. Orlov A.I. Teorija prinjatija reshenij. — M.: Jekzamen, 2006. — 574 s.

5. Orlov A.I. Organizacionno-jekonomicheskoe modelirovanie: teorija prinjatija reshenij. — M.: KnoRus, 2011. — 568 s.

6. Orlov A.I. Organizacionno-jekonomicheskoe modelirovanie : v 3 ch. Ch.3. Statisticheskie metody analiza dannyh. - M.: Izd-vo MGTU im. N.Je. Baumana, 2012. - 624 s.

7. Orlov A.I. Vsegda li nuzhen kontrol' kachestva produkcii u postavshhika? // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2014. № 96. S. 709-724.

8. Orlov A.I. Asimptoticheskie metody statisticheskogo kontrolja // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2014. № 102. S. 1–31.

9. Orlov A.I. Metod proverki gipotez po sovokupnosti malyh vyborok i ego primenenie v teorii statisticheskogo kontrolja // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2014. № 104. S. 38–52.

10. Gnedenko B.V. Oчерк по истории теории вероятностей. – М.: Editorial URSS, 2001. – 88 с.

11. Ostrogradskij M.V. Ob odnom voprose, kasajushhemsja verojatnostej / Polnoe sobranie trudov. T.3. – Kiev: Izdatel'stvo Akademii nauk USSR, 1961. – S.215 – 237.

12. Gnedenko B.V. Mihail Vasil'evich Ostrogradskij // Kvant. 1982. № 10. S. 5 – 10.

13. Shor Ja.B. Statisticheskie metody analiza i kontrolja kachestva i nadezhnosti. – М.: Sovetskoe radio, 1962. – 552 с.

14. Abdushukurov A.A. O kafedre «Teorija verojatnostej i matematicheskaja statistika» (k 75 letiju kafedry i 95 letiju NUUz) // Statistika i ejo primenenija. Materialy respublikanskoj nauchno-prakticheskoy konferencii (Tashkent, 17-18 oktjabrja 2013 g.). – Tashkent: Izd-vo «Universitet», 2013. – S. 5 – 18.

15. Romanovskij V.I. Vystuplenie po dokladu S.M. Gurevicha "Voprosy socialisticheskogo ucheta" // Voprosy socialisticheskogo ucheta. Tashkent, 1932. S. 30-32.

16. Romanovskij V.I. O statisticheskikh metodah kontrolja proizvodstva i kachestva produkcii // Tezisy dokladov i soobshhenij na Vsesojuznom soveshhanii po matematicheskoy statistike, 27 sentjabrja - 2 oktjabrja 1948 g. Tashkent, 1948. S.34.

17. Bogoljubov A.N., Matvievskaia G.P. Vsevolod Ivanovich Romanovskij (1879 - 1954). - M.: Nauka, 1997. - 157 s.
18. Kolmogorov A.N. Statisticheskij priemochnyj kontrol' pri dopustimom chisle defektnyh izdelij, ravnom nulju. - L.: Znanie, 1951. - 24 s.
19. Orlov A.I. Veroyatnostno-statisticheskie metody v rabotah A.N. Kolmogorova // Politematicheskij setevoy jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2014. № 98. S. 96-104.
20. Beljaev Ju.K. Veroyatnostnye metody vyborochnogo kontrolja. - M.: Nauka, 1975. - 407 s.
21. Lumel'skij Ja.P. Statisticheskie ocenki rezul'tatov kontrolja kachestva. - M.: Izd-vo standartov, 1979. - 200 s.
22. Orlov A.I. Pervyj Vsemirnyj kongress Obshhestva matematicheskoy statistiki i teorii veroyatnostej im. Bernulli // Zavodskaja laboratorija. Diagnostika materialov. 1987. T.53. № 3. S. 90-91.
23. Orlov A.I. Vsemirnyj Kongress Obshhestva im. Bernulli // Standarty i kachestvo. 1987. № 5. S. 105-105.
24. Orlov A.I. Pervyj Vsemirnyj kongress Obshhestva matematicheskoy statistiki i teorii veroyatnostej im. Bernulli // Nadezhnost' i kontrol' kachestva. 1987. № 6. S. 54-59.
25. Azlarov T.A., Gnedenko B.V., Kolmogorov A.N., Prohorov Ju.V., Sarymsakov T.A., Statuljavichus V.A. Sagdy Hasanovich Sirazhdinov (k shestidesjatiletiju so dnja rozhdenija) // Uspehi matematicheskikh nauk. 1981. T. 36. № 6 (222). S. 237-242.
26. Gnedenko B.V., Beljaev Ju.K., Solov'ev A.D. Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti. - M.: Nauka, 1965. - 524 s.
27. Abdushukurov A.A. Statistika nepolnyh nabljudenij. Asimptoticheskaja teorija ocenivaniya dlja neklassicheskikh modelej. - Tashkent. "Universitet", 2009. -267 s.
28. Abdushukurov A.A., Muradov R.S. Ob ocenkah funkcii raspredelenija v modeljah sluchajnogo cenzurovanija // Zavodskaja laboratorija. Diagnostika materialov. 2014. T.80. № 11. S.62-67.
29. Orlov A.I. Osnovnye problemy kontrollinga kachestva // Politematicheskij setevoy jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2015. № 111. S. 52-84.
30. Orlov A.I. O razvitiu asimptoticheskikh metodov statisticheskogo kontrolja // Materialy respublikanskoj nauchno-prakticheskoy konferencii "Statistika i ee primenenija - 2015". Pod redakciej professora A.A. Abdushukurova. - Tashkent, NUUZ, 2015. - S. 30-40.
31. Sipatrina L.S., Orlov A.I., Bogatyrev A.A. Rekomendacii. Obosnovanie planov statisticheskogo priemochnogo kontrolja po al'ternativnomu priznaku pri minimizacii summarnyh zatrat. - M.: Izd-vo standartov, 1985. - 14 s.
32. Orlov A.I. Ob optimizacii vyborochnogo kontrolja kachestva produkcii. // Standarty i kachestvo. 1989. № 3. S. 91-94.
33. Kravchenko G.G., Orlov A.I. Metod vydelenija edinic besformennoj produkcii pri statisticheskom kontrole kachestva // IV Vsesojuznaja nauchno-tehnicheskaja konferencija «Primenenie mnogomernogo statisticheskogo analiza v jekonomike i ocenke kachestva produkcii» (g. Tartu, 5-7 sentjabrja 1989 g.). Tezisy dokladov. - Tartu: Izd-vo Tartuskogo gosudarstvennogo un-ta, 1989. S.324-324.
34. Kravchenko G.G., Orlov A.I. O statisticheskom priemochnom kontrole poroshkoobraznyh materialov // Nadezhnost' i kontrol' kachestva. 1991. No.2. S.37-39.
35. Orlov A.I. Dvojstvennost' ponjatij v statisticheskom priemochnom kontrole // Nadezhnost' i kontrol' kachestva. 1991. No.10, s.22-26.

36. Orlov A.I. Matematicheskoe obespechenie sertifikacii: sravnitel'nyj analiz dialogovyh sistem po statisticheskomu kontrolju // Zavodskaja laboratorija. Diagnostika materialov. 1996. T.62. № 7. S. 46-49.
37. Orlov A.I. Vsegda li nuzhen kontrol' kachestva produkcii? // Zavodskaja laboratorija. Diagnostika materialov. 1999. T.65. № 11. S. 51-55.
38. Orlov A.I. Statisticheskij kontrol' po dvum al'ternativnym priznakam i metod proverki ih nezavisimosti po sovokupnosti malyh vyborok // Zavodskaja laboratorija. Diagnostika materialov. 2000. T.66. № 1. S. 58-62.
39. Orlov A.I. Sertifikacija i statisticheskie metody (obobshhajushhaja stat'ja) // Zavodskaja laboratorija. Diagnostika materialov. 1997. T.63. № 3. S. 55-62.
40. Orlov A.I. Statisticheskij kontrol' kachestva produkcii // Rossijskoe predprinimatel'stvo. 2001. № 2. S. 17-24.
41. Mitrohin I.N., Orlov A.I. Obnaruzhenie razladki s pomoshh'ju kontrol'nyh kart. – Zhurnal «Zavodskaja laboratorija». 2007. T. 73. No.5.
42. Sharov V.D., Orlov A.I. O vyjavlenii otklonenij v sisteme kontrollinga (na primere monitoringa urovnja bezopasnosti poletov) // Green Controlling: Sbornik tezisov III Mezhdunarodnogo kongressa po kontrollingu/ Pod nauch. red. S.G. Fal'ko. – M.: NP «Ob#edinenie kontrollerov», 2013.– S.133-135.
43. Sharov V.D., Orlov A.I. Vyjavlenie otklonenij v sisteme kontrollinga (na primere monitoringa urovnja bezopasnosti poletov) // Green Controlling: Sbornik trudov III Mezhdunarodnogo kongressa po kontrollingu / Pod nauch. red. S.G. Fal'ko. – M.: NP «Ob#edinenie kontrollerov», 2013. – S. 277 – 292.
44. Orlov A.I., Sharov V.D. Vyjavlenie otklonenij v kontrollinge (na primere monitoringa urovnja bezopasnosti poletov) // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2014. № 95. S. 460-469.
45. Orlov A.I., Sharov V.D. Metod vyjavlenija otklonenij v sisteme kontrollinga (na primere monitoringa urovnja bezopasnosti poletov) // Nacional'nye interesy: priority i bezopasnost'. 2014. № 26 (263). S.54 – 64.
46. Orlov A.I. Prinjatie reshenij. Teorija i metody razrabotki upravlencheskih reshenij. - M.: IKC «MarT»; Rostov n/D: Izdatel'skij centr «MarT», 2005. - 496 s.
47. Orlov A.I. Problemy upravlenija jekologicheskoj bezopasnost'ju. Itogi dvadcati let nauchnyh issledovanij i prepodavaniya. – Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing. 2012. – 344 s.