

УДК 330.42, 519.21

UDC 330.42, 519.21

08.00.00 Экономические науки

Economics

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ЦЕН В МОДЕЛИ ФИНАНСОВОГО РЫНКА С ШУМОВЫМИ АГЕНТАМИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

STOCHASTIC DYNAMICS OF PRICES IN A MODEL OF FINANCIAL MARKET WITH DIFFERENT TYPES OF NOISE TRADERS

Лебедева Татьяна Сергеевна

к.ф.-м.н.

SPIN-код: 9554-2941

Scopus ID: 36572578800

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
199034, Университетская наб., дом 7-9*

E-mail: t.podguzova@spbu.ru

Lebedeva Tatiana Sergeevna

Cand. Phys.-Math. Sci.

RSCI SPIN-code: 9554-2941

Scopus ID: 36572578800

Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

199034, 7/9 Universitetskaya nab.

E-mail: t.podguzova@spbu.ru

Ковалевский Дмитрий Валерьевич

к.ф.-м.н.

SPIN-код: 4216-6271

Scopus ID: 6507750055

Web of Science – ResearcherID: K-7994-2012

Международный центр по окружающей среде и дистанционному зондированию им. Нансена, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: d_v_kovalevsky@list.ru,

dmitry.kovalevsky@niersc.spb.ru

Kovalevsky Dmitry Valerievich

Cand. Phys.-Math. Sci.

RSCI SPIN-code: 4216-6271

Scopus ID: 6507750055

Web of Science – ResearcherID: K-7994-2012

Nansen International Environmental and Remote Sensing Centre, St. Petersburg, Russia

E-mail: d_v_kovalevsky@list.ru,

dmitry.kovalevsky@niersc.spb.ru

Выполнены расчеты динамики цен в рамках модели финансового рынка, состоящего из «фундаментальных» и «шумовых» агентов. Вычисления проведены в соответствии с полной динамической формулировкой закона уравнивания спроса и предложения (закон Вальраса). Для описания флуктуаций количества оптимистически и пессимистически настроенных шумовых агентов использовалась стохастическая «муравьиная модель» Кирмана, сводящаяся к исследованию цепи Маркова, а также модификация «муравьиной модели» с видоизмененными масштабными свойствами параметра, характеризующего интенсивность «стадного поведения» шумовых агентов

In the present study, the calculations of price dynamics are made in the model of a financial market consisting of fundamentalist and noise traders. Numerical calculations are carried out in accordance with the full Walrasian dynamic price adjustment rule. To describe fluctuations in the number of optimistic and pessimistic noise traders, a seminal stochastic Kirman's ant model (reducible to a Markov chain) is used, as well as its modification with different scaling properties of the parameter controlling the strength of herding behavior of noise agents

Ключевые слова: ФИНАНСОВЫЙ РЫНОК, СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА, СТАДНОЕ ПОВЕДЕНИЕ, ЗАКОН ВАЛЬРАСА

Keywords: FINANCIAL MARKET, STOCHASTIC DYNAMICS, HERDING BEHAVIOR, WALRAS' LAW

1. Введение

В последнее время процессы, происходящие на финансовых рынках, затрагивают все больше различных сфер деятельности государств и национальных экономик. Этим вызван особый интерес к развитию исследований в области динамики финансовых рынков [2, 13, 14].

Актуальным является направление по прогнозированию рыночных коллапсов, связанных с первоначальным резким необоснованным ростом цен, а затем их быстрым падением. И зачастую рост цен вызывается не какими-либо объективными причинами, а взаимодействием отдельных участников рынка.

В качестве метода исследования данных явлений предлагается построение модели искусственного рынка в рамках агент-ориентированного подхода, учитывающего взаимодействие между игроками рынка [15]. Агент-ориентированные модели представляют собой системы искусственных экономических агентов с некоторым набором свойств, и основная их задача – отследить влияние флуктуаций агентов, действующих на микроуровне, на ключевые характеристики макроуровня [1].

При моделировании следует помнить, что реальный финансовый рынок – это весьма трудная для прогнозирования, и вообще говоря, открытая система, включающая в себя множество зависящих друг от друга процессов. Такая система не может быть представлена линейной комбинацией составляющих ее компонентов и характеризуется коллективным поведением и взаимным влиянием отдельных ее подсистем. Последовательное моделирование финансовых рынков остается актуальной проблемой и в настоящее время.

В ряде экономических моделей [8, 10] присутствуют только агенты (так называемые «рационалисты» или «фундаменталисты»), принимающие решения, руководствуясь лишь «объективной» информацией (например, уровнем рыночных цен). Их характерным поведением, в случае резкого роста цен, не подкрепленного объективными фактами, является четкая оценка риска, связанного с дальнейшим быстрым снижением цены, возвращающим цену к фундаментальной стоимости.

И действительно, одним из ключевых принципов, заложенных во многие финансовые модели, является принцип рациональности экономических агентов. Значительная часть трейдеров большую часть времени ведет себя рационально, то есть пытается оптимизировать свою стратегию, исходя из имеющейся информации. Однако информация, которой они обладают, часто бывает неполной, а агенты финансового рынка могут ошибочно ее интерпретировать. Кроме того, одни инвесторы не уверены в характере и предпочтениях других инвесторов на рынке. Таким образом, процесс принятия решения по сути своей является «шумовым» или «стадным», и, как следствие, неизбежен вероятностный подход при моделировании фондового рынка ввиду наличия неопределенности.

Вследствие этого во многих моделях [3, 4, 6, 7, 9, 11], наряду с рационалистами присутствуют также и шумовые агенты, что позволяет анализировать взаимодействие двух разных и взаимодополняющих друг друга групп трейдеров. Таким образом, в рамках рассматриваемых моделей при долгосрочном поведении рынка стоит ожидать чередования временных интервалов: резкий рост цены, а затем ее падение, возвращающее рынок к фундаментальной стоимости. При этом цена управляется подражанием и стадностью шумовых агентов, а ее динамика является стохастической [7, 12].

Одной из наиболее ранних работ в данном направлении стала «муравьиная модель» Алана Кирмана [9], изначально описывающая поведение общественных насекомых (муравьев). Оказалось, что данная модель применима также и к исследованию стадного поведения в экономических системах. В математическом плане «муравьиная модель» сводится к исследованию соответствующей цепи Маркова.

В настоящей работе будет произведен расчет цены в рамках модели финансового рынка, предложенной в работе [6]. Однако расчеты,

представленные в работе [6], выполнены в рамках упрощающего предположения о мгновенном уравнивании спроса и предложения. При таком подходе был получен ряд теоретических результатов в замкнутой аналитической форме путем применения хорошо разработанного аппарата теории стохастических дифференциальных уравнений (теория уравнения Ланжевена, уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова и т.д.). В настоящей работе данное ограничение снято, и численные расчеты ведутся в соответствии с полной динамической формулировкой закона уравнивания спроса и предложения (закон Вальраса).

2. Стохастическая модель финансового рынка

В упомянутой работе [6] рассматривается виртуальный рынок, состоящий из определенного количества агентов. В зависимости от стратегии поведения, каждый агент может быть отнесен к одной из трех групп: 1) фундаменталисты; 2) оптимистично настроенные шумовые трейдеры; 3) пессимистично настроенные шумовые трейдеры.

В рассматриваемой модели численность фундаменталистов N_f является постоянной величиной. Решения агентов с данной стратегией поведения не зависят от мнения других игроков, они не подвержены стадному поведению. В противоположность фундаменталистам, как уже упоминалось выше, шумовые или стадные агенты имеют такое название из-за свойственной им тенденции подражать большинству. Иногда такая стратегия бывает в достаточной степени оправдана, например, при нехватке информации. Общая численность шумовых агентов неизменна и равна N , при этом число оптимистов и пессимистов, взятых по отдельности, – это флуктуирующие величины, и динамика таких флуктуаций описывается модифицированной стохастической «муравьиной моделью» Кирмана.

В данной модели шумовой агент в некоторый момент времени может быть или оптимистом, ожидающим роста цены в ближайшее время, или

пессимистом, наоборот, предполагающим ее падение. Пусть величина $n \in \{0, 1..N\}$ задает (зависящее от времени) число оптимистов, пессимистов при этом будет $N - n$. В любой момент времени с некоторой вероятностью шумовой агент может поддаться влиянию окружения и сменить свою тактику, в результате чего величина оптимистов n станет равной $n' = n \pm 1$. Тогда, согласно динамике марковского процесса, условная вероятность $\rho(n', t + \Delta t_0 | n, t)$ связана с частотой перехода в единицу времени $\pi(n \rightarrow n')$ при малом значении интервала Δt_0 следующим образом:

$$\rho(n', t + \Delta t_0 | n, t) = \pi(n \rightarrow n') \Delta t_0. \quad (1)$$

Частота перехода в «муравьиной модели» задается следующим образом:

$$\pi(n \rightarrow n') = \begin{cases} \pi(n \rightarrow n + 1) \\ \pi(n \rightarrow n - 1) \end{cases} = \begin{cases} (N - n)(a + bn) \\ n(a + b(N - n)) \end{cases}, \quad (2)$$

где a и b – параметры модели. Величина a определяет вероятность случайного события, заключающегося в том, что агент самопроизвольно изменил свой тип. В работе [9] величина b задается как отношение $b = \frac{\bar{b}}{\bar{b}}$. «Стадный» параметр \bar{b} задает влияние окружения на агента. В работе [6] величина параметра b , характеризующего стадность поведения, является константой. В последнем случае частота перехода (2) описывает ситуацию, когда взаимодействие между агентами не зависит от флуктуаций агентов в альтернативных состояниях, а зависит от общего количества таких агентов. Иными словами, агент может изменить свое состояние из-за случайного события, как и в исходной версии «муравьиной модели» Кирмана, либо он может попасть под влияние группы шумовых агентов, которые придерживаются противоположной стратегии поведения.

Таким образом, основная разница между формулами для частоты перехода в упомянутых моделях заключается в масштабных свойствах параметра, характеризующего стадность поведения. В первой формализации влияние окружения исчезает в пределе $N \rightarrow \infty$, во втором, наоборот, вклад с b остается конечным в пределе большого количества шумовых агентов. Представляет интерес сравнение этих двух формализаций и наблюдение динамики различных сценариев, особенно при увеличении числа агентов N , что и было проделано нами в настоящей работе (результаты расчетов приведены в разделе 4).

3. Моделирование динамики цены актива

Перейдем непосредственно к описанию динамики исследуемого рынка. Как отмечалось ранее, в модели имеется два типа шумовых трейдеров. Предполагается, что оптимисты, ожидающие роста цены на актив, готовы купить определенное дополнительное количество единиц актива T_c , а пессимисты готовятся к спаду цены и продают T_c единиц актива. Таким образом, T_c является мерой среднего объема сделки для индивидуального шумового агента. Мерой среднедневного объема торгов для индивидуального фундаменталиста является величина T_f . Фундаменталисты продают или покупают актив в зависимости от отклонения текущей цены P от своего фундаментального значения P_f .

В дальнейшем удобно перейти к вспомогательной переменной

$$x(t) = \frac{2n(t)}{N} - 1, \quad (3)$$

характеризующей конфигурацию шумовых агентов. Нулевое значение $x(t)$ соответствует равному количеству оптимистов и пессимистов. Положительное или отрицательное значение $x(t)$ свидетельствует о количественном преимуществе одних или других.

Учитывая все вышесказанное, динамику текущей цены актива $p(t)$ можно смоделировать в рамках стандартного вальрасовского механизма уравнивания спроса и предложения, приводящего для рассматриваемой модели к стохастическому дифференциальному уравнению

$$\frac{dP(t)}{dt} = \beta NT_c [x(t) - \gamma \ln P(t)] P(t), \quad (4)$$

где β – скорость приспособления цены; $P(t) = \frac{p(t)}{p_f}$ – безразмерная цена; $\gamma = \frac{N_f T_f}{NT_c}$.

В работе [6] данная математическая модель исследовалась аналитически при условиях $\beta \rightarrow \infty$ и $\gamma = 1$. В настоящей работе указанные ограничения сняты, и уравнение (4) решается численно.

4. Результаты численных расчетов

Для решения стохастического дифференциального уравнения (4) необходимо первоначально смоделировать случайную величину $x(t)$, воспользовавшись уравнением (2) для частот перехода. Переход в одно из состояний контролировался случайной величиной, выдаваемой встроенным генератором случайных чисел программы. Как известно, в стохастических компьютерных расчетах такие числа чаще всего являются псевдослучайными. В расчетах, представленных в настоящей работе, набор соответствующих «псевдослучайных» чисел целенаправленно брался одинаковым для различных стохастических экспериментов, чтобы легче было проследить влияние параметров модели на поведение решений.

В случае исходной модели Кирмана в формуле (2) были выбраны значения параметров $a_k = 0.01$, $\bar{b} = 0.1$, шаг по времени был задан следующим: $\Delta t_0 = 0.001$. На рис. 1(а–б) приведены реализации для $N = 7$, $N = 10$, $N = 200$ и $N = 1000$. Как следует из работы [9], для величины $x(t)$ переход от бимодального распределения к унимодальному происходит

при $N = \frac{b}{a}$. В представленных нами расчетах отношение $\frac{b}{a} = 10$, то есть при $N < 10$ ожидается проявление в реализациях случайной величины особенностей, обусловленных бимодальностью распределения, что, действительно, и наблюдается на рис. 1(а). Далее с ростом N наблюдаются проявления унимодальности распределения (рис. 1(б)).

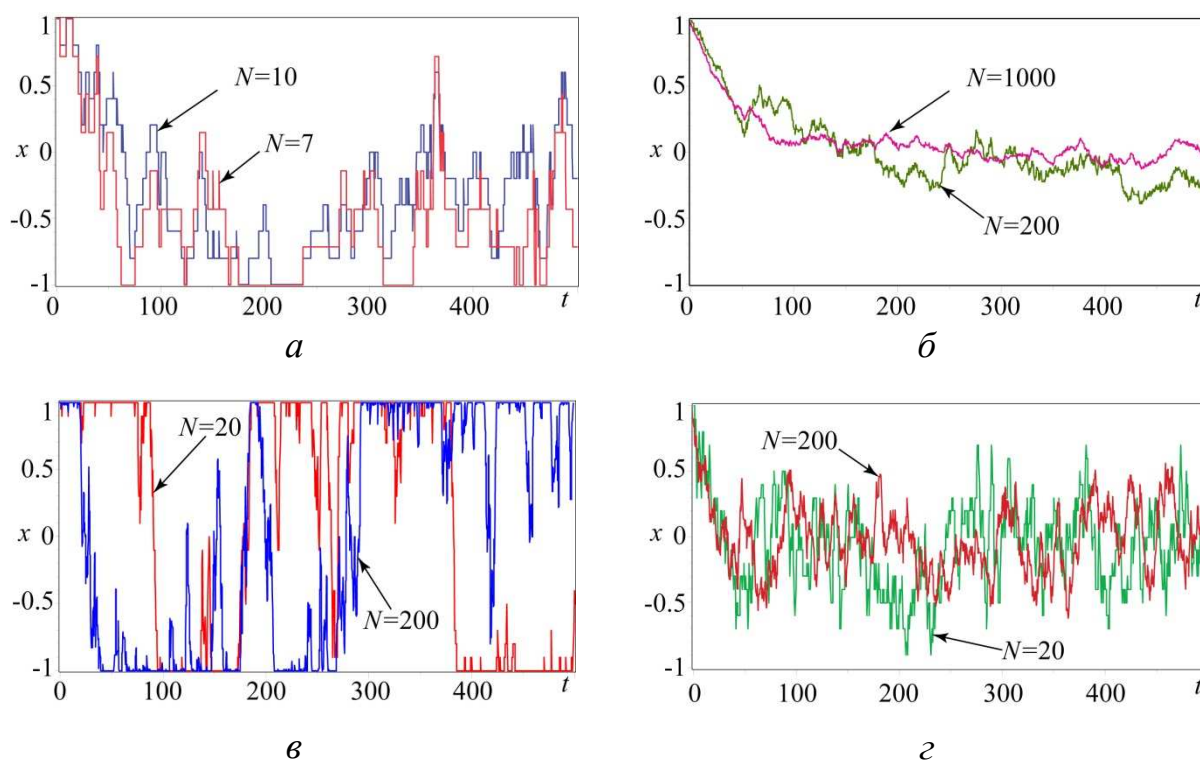


Рис. 1. Реализации случайной величины $x(t)$ в рамках исходной модели Кирмана (а–б) и ее модификации (в–г) для различного числа шумовых агентов N : а) $N = 7$ (красная кривая), $N = 10$ (синяя кривая); б) $N = 200$ (зеленая кривая), $N = 1000$ (бордовая кривая); в) случай бимодального распределения, $N = 20$ (красная кривая), $N = 200$ (синяя кривая); г) случай унимодального распределения, $N = 20$ (зеленая кривая), $N = 200$ (бордовая кривая).

В случае модифицированной модели Кирмана, как показано в работе [6], переход от бимодального к унимодальному распределению

происходит при $\frac{a}{b} = 1$. В связи с этим, для соответствующих численных экспериментов выбраны следующие параметры в формуле (2): $a_{mb} = 0.01$, $b_{mb} = 0.1$ (случай бимодального распределения, $\frac{a_{mb}}{b_{mb}} = 0.1$), $a_{mu} = 0.1$,

$b_{mi} = 0.01$ (случай унимодального распределения, $\frac{a_{mi}}{b_{mi}} = 10$). Шаг по времени равен $\Delta t_0 = 0.0005$. Реализации для $N = 20$ приведены на рис. 1(в, г) для бимодального (красная кривая) и унимодального (зеленая кривая) распределений. Реализация для большего числа агентов $N = 200$ представлена на рис. 1(в, г) для бимодального (синяя кривая) и унимодального (бордовая кривая) распределений.

При сравнении реализаций $x(t)$ на рис. 1(б) и рис. 1(г), соответствующих унимодальному распределению и приведенных для одного и того же числа шумовых агентов $N = 200$, можно отметить, что влияние окружения на индивидуума снижается в случае исходной модели Кирмана (рис. 1(б)) более существенно в сравнении с модифицированной моделью. Как уже отмечалось выше, при $N \rightarrow \infty$ это влияние исчезает полностью. И действительно, как видно из рис. 1(б), при дальнейшем увеличении N реализация $x(t)$ приходит к балансу, то есть число оптимистов и пессимистов уравнивается. С течением времени ситуация изменяется незначительно, что характеризуется малой амплитудой колебаний около нулевого значения $x(t)$.

Получив необходимые реализации случайных функций (3), перейдем к численному решению дифференциального уравнения (4). Были выбраны следующие значения параметров модели: $T_f = 10$, $T_c = 10$, $\gamma = 0.5$, $\beta = 0.01$. В качестве начального условия при численном интегрировании было взято $P(0) = 1$, то есть в начальный момент времени цена равна своему фундаментальному значению. Для приведенных на рис. 1(а–г) реализаций $x(t)$ получены соответствующие им графики динамики цены (рис. 2(а–г)).

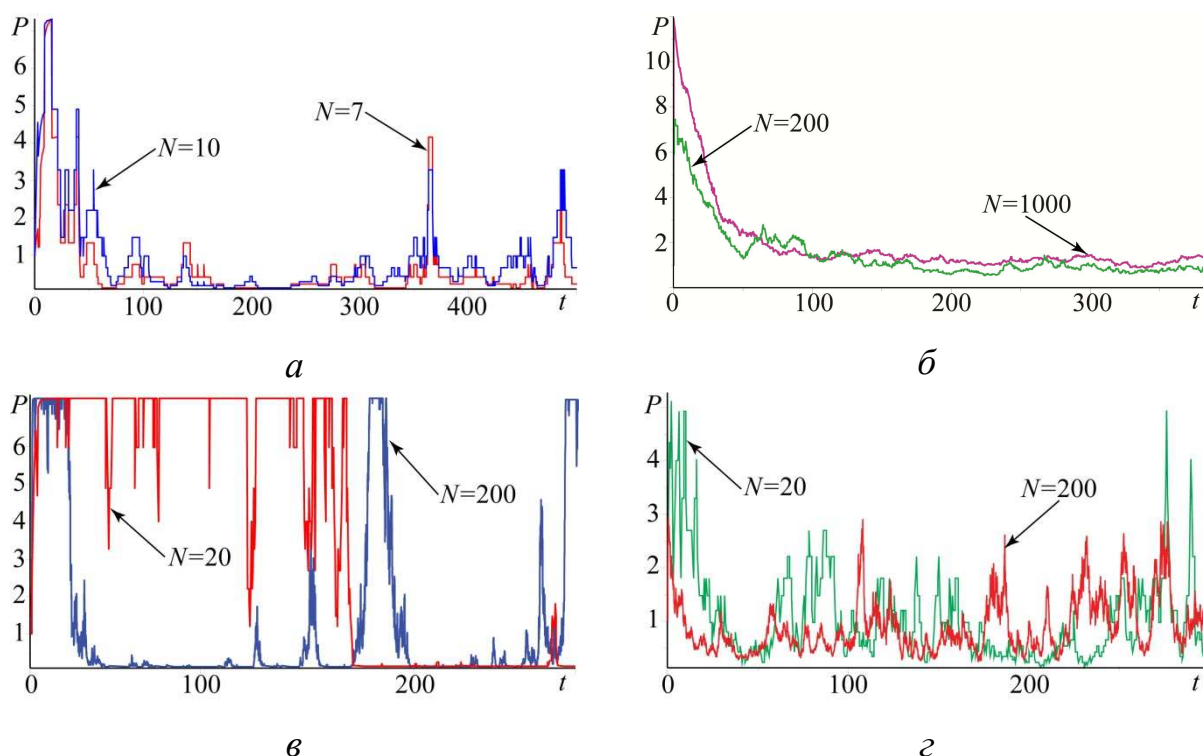


Рис. 2. Графики динамики цены $P(t)$ – решение уравнения (4) для случайной величины $x(t)$ в рамках исходной модели Кирмана (а–б) и ее модификации (в–г) для различного числа шумовых агентов N : а) $N = 7$ (красная кривая), $N = 10$ (синяя кривая); б) $N = 200$ (зеленая кривая), $N = 1000$ (бордовая кривая); в) случай бимодального распределения, $N = 20$ (красная кривая), $N = 200$ (синяя кривая); г) случай унимодального распределения, $N = 20$ (зеленая кривая), $N = 200$ (бордовая кривая).

Как и следовало ожидать, на графиках наблюдается чередование интервалов роста и падения цены. На рис. 2(б) при спаде влияния стадного поведения с ростом числа агентов хорошо прослеживается стремление цены к фундаментальной стоимости. На рис. 2(г) для модифицированной модели Кирмана с ростом числа агентов видно, что амплитуда колебаний безразмерной цены P снижается. Это свидетельствует о том, что стадное влияние хотя и не исчезает полностью, но заметно ослабевает.

5. Заключение

В настоящей работе выполнены расчеты ценовой динамики в рамках модели финансового рынка, предложенной в работе [6] и включающей три типа агентов: фундаменталисты, оптимистичные и пессимистичные шумовые трейдеры. В отличие от цитируемой работы, нами снято

предположение о мгновенном уравнивании спроса и предложения, и численные расчеты проведены в соответствии с полной динамической формулировкой закона уравнивания спроса и предложения (закон Вальраса).

Проведено сравнение двух моделей, задающих случайную величину $x(t)$, характеризующую текущее соотношение оптимистов и пессимистов. Для полученных случайных величин $x(t)$ численно решено дифференциальное уравнение ценовой динамики (4). Построены графики временной зависимости цены, на которых наблюдается чередование интервалов резкого роста и падения цены, а также (при определенном соотношении параметров модели) стремление цены к своему фундаментальному значению.

Настоящая работа представляет собой существенно расширенную и дополненную версию представленного на конференции доклада [5]. Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 15-06-05625-а «Потребительский выбор и “стадное поведение” в микроэкономике: от аналитического описания к реалистичным агент-ориентированным моделям»).

Литература

1. Бахтизин А.Р. Агент-ориентированные модели экономики. М.: ЗАО «Издательство «Экономика». 2008. 279 с.
2. Белов И.Ю. Агентно-ориентированный подход к моделированию пузырей и крахов на виртуальных финансовых рынках. Магистерская диссертация. – СПб. 2013. 63 с.
3. Вороновицкий М.М. Модель стадного поведения клиентов банка // Экономика и математические методы. 2013. Т. 49, № 1. С. 73–87.
4. Вороновицкий М.М. Стадное поведение при байесовском выборе и линейной последовательности взаимодействия // Экономика и математические методы. 2010. Т. 46, № 1. С. 92–103.
5. Лебедева Т.С., Ковалевский Д.В. Стохастическое моделирование динамики цен на финансовых рынках в условиях «стадного поведения» агентов // В сборнике: Вторые чтения памяти профессора Б.Л. Овсевича «Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии»: Материалы Всероссийской конференции. Санкт-Петербург, 26-28 октября 2015 г. – СПб.: Нестор-История, 2015. – 262 с. ISBN 978-5-4469-0702-1.

6. Alfarano S., Lux T., Wagner F. Time variation of higher moments in a financial market with heterogeneous agents: An analytical approach // *Journal of Economic Dynamics & Control*. 2008. V. 32. P. 101–136.
7. Bak P., Paczuski M., Shubik M., Price variations in a stock market with many agents // *Physica A*. 1997. V. 246. P. 430–453
8. Kim G., Markowitz H.M. Investment rules, margins, and market volatility // *Journal of Portfolio Management*. 1989. V. 16. No.1. P. 45–52.
9. Kirman A. Ants, rationality, and recruitment // *The Quarterly Journal of Economics*. 1993. V. 108. No. 1. P. 137–156.
10. Levy M., Levy H., Solomon S.A. Microscopic model of the stock market: cycles, booms, and crashes // *Economic Letters*. 1994. V.45. P. 103–111.
11. Lux T., Marchesi M. Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market // *Nature*. 1999. V. 397. P. 498–500.
12. Maldarella D., Pareschi L. Price dynamics in financial markets: a kinetic approach // *Science and Culture*. 2010. V. 76, P. 448–453.
13. Puchkova A., Kryazhimskiy A., Towards Detection of Early Warning Signals on Financial Crises // *IIASA Interim Report IR-12-001*. 2012.
14. Pyrlik V., Autoregressive conditional duration as a model for financial market crashes prediction // *Physica A*. 2013. V. 392. P. 6041–6051.
15. Samanidou E., Zschischang E., Stauffer D., Lux T., Agent-based models of financial markets // *Reports on Progress in Physics*. 2007. V. 70. P. 409–450.

References

1. Baxtizin A.R. Agent-orientirovannye modeli e'konomiki. M.: ZAO «Izdatel'stvo «E'konomika». 2008. 279 s.
2. Belov I.Ju. Agentno-orientirovannyj podhod k modelirovaniyu puzyrej i krahov na virtual'nyh finansovyh rynkah. Magisterskaja dissertacija. – SPb. 2013. 63 s.
3. Voronovickij M.M. Model' stadnogo povedeniya klientov banka // *E'konomika i matematicheskie metody*. 2013. T. 49, № 1. S. 73–87.
4. Voronovickij M.M. Stadnoe povedenie pri bajesovskom vybore i linejnoj posledovatel'nosti vzaimodejstviya // *E'konomika i matematicheskie metody*. 2010. T. 46, № 1. S. 92–103.
5. Lebedeva T.S., Kovalevskij D.V. Stohasticheskoe modelirovanie dinamiki cen na finansovyh rynkah v uslovijah «stadnogo povedeniya» agentov // V sbornike: Vtorye chteniya pamjati professora B.L. Ovsievicha «Jekonomiko-matematicheskie issledovanija: matematicheskie modeli i informacionnye tehnologii»: Materialy Vserossijskoj konferencii. Sankt-Peterburg, 26-28 oktjabrja 2015 g. – SPb.: Nestor-Istorija, 2015. – 262 s. ISBN 978-5-4469-0702-1.
6. Alfarano S., Lux T., Wagner F. Time variation of higher moments in a financial market with heterogeneous agents: An analytical approach // *Journal of Economic Dynamics & Control*. 2008. V. 32. P. 101–136.
7. Bak P., Paczuski M., Shubik M., Price variations in a stock market with many agents // *Physica A*. 1997. V. 246. P. 430–453
8. Kim G., Markowitz H.M. Investment rules, margins, and market volatility // *Journal of Portfolio Management*. 1989. V. 16. No.1. P. 45–52.
9. Kirman A. Ants, rationality, and recruitment // *The Quarterly Journal of Economics*. 1993. V. 108. No. 1. P. 137–156.
10. Levy M., Levy H., Solomon S.A. Microscopic model of the stock market: cycles, booms, and crashes // *Economic Letters*. 1994. V.45. P. 103–111.

11. Lux T., Marchesi M. Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market // *Nature*. 1999. V. 397. P. 498–500.
12. Maldarella D., Pareschi L. Price dynamics in financial markets: a kinetic approach // *Science and Culture*. 2010. V. 76, P. 448–453.
13. Puchkova A., Kryazhimskiy A., Towards Detection of Early Warning Signals on Financial Crises // *IIASA Interim Report IR-12-001*. 2012.
14. Pyrlik V., Autoregressive conditional duration as a model for financial market crashes prediction // *Physica A*. 2013. V. 392. P. 6041–6051.
15. Samanidou E., Zschischang E., Stauffer D., Lux T., Agent-based models of financial markets // *Reports on Progress in Physics*. 2007. V. 70. P. 409–450.