

УДК 519.17:656.02

UDC 519.17:656.02

01.00.00 Физико-математические науки

Physical-Mathematical sciences

**МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА
ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ ПУТЕЙ В
КРУПНОМАСШТАБНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ
СИСТЕМЕ****MULTICRITERIA PROBLEM OF FINDING
THE OPTIMAL PATHS FOR LARGE-SCALE
TRANSPORT SYSTEM**

Павлов Дмитрий Алексеевич
к.ф.-м.н., доцент
РИНЦ SPIN-код, 8822-5089
dp.logic@gmail.com

Pavlov Dmitriy Alexeevich
Cand.Phys.-Math.Sci., associate professor
RSCI SPIN-code, 8822-5089
dp.logic@gmail.com

Лихобабин Евгений Геннадьевич
магистрант
*Кубанский государственный аграрный универси-
тет, Краснодар, Россия*

Likhobabin Evgeniy Gennadyevich
Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

В статье исследуется многокритериальная задача, возникающая при организации маршрутов в крупномасштабных системах управления транспортом. В качестве математического инструмента для построения модели используются предфрактальные графы. Предфрактальные графы естественным образом отражают структуру устройства связей транспортной системы, отражая ее важные особенности – локальность и дифференциацию. Локальность обеспечивается созданием внутренних маршрутов (городских, внутрирайонных и т.д.). Под дифференциацией понимается разделение маршрутов на внутрирегиональные, межрегиональные и международные. Поставленная задача сводится к покрытию предфрактальных графов простыми пересекающимися по ребрам и вершинам цепями. На множестве всех допустимых покрытий строится векторно-целевая функция с определенными критериями. В понятиях транспортной системы приведенные критерии имеют конкретную содержательную интерпретацию, позволяющие спроектировать транспортные маршруты учитывая особенности системы. В статье построены полиномиальные алгоритмы для нахождения оптимальных по определенным критериям решения. По критериям не оптимизирующим выделенные маршруты приводятся их оценки нижних и верхних границ. По всем приведенным алгоритмам построены и обоснованы оценки вычислительной сложности, подтверждающие преимущество использования методов предфрактальных и фрактальных графов перед классическими методами теории графов

This article explores the multicriteria problems arise in the organization of routes in large-scale transport management system. As a mathematical tool for constructing a model, we were using the prefractal graphs. Prefractal graphs naturally reflect structure of the device of communications of transport system, reflecting its important features – locality and differentiation. Locality is provided with creation of internal routes (city, raionwide, etc.). Differentiation is understood as division of routes on intra regional, interregional and international. The objective is reduced to a covering of prefractal graphs by the simple paths which are crossed on edges and nodes. On the set of feasible solutions, vector criterion function with certain criteria is based. In concepts of transport system, the given criteria have concrete substantial interpretation, the transport routes allowing to design considering features of system. In this article, we construct polynomial algorithms for finding optimal according to certain criteria decision. By the criteria which aren't optimizing the allocated routes their estimates of the lower and upper bounds are given. On all given algorithms the estimates of computing complexity confirming advantage of use of methods of prefractal and fractal graphs before classical methods of the theory of graphs are constructed and proved

Ключевые слова: ФРАКТАЛЬНЫЙ ГРАФ, ПРЕД-
ФРАКТАЛЬНЫЙ ГРАФ, ТЕОРИЯ ГРАФОВ,
МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ,
ПОКРЫТИЯ ГРАФОВ, ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ
АЛГОРИТМ, ТРАНСПОРТНАЯ СИСТЕМА,
ОПТИМАЛЬНЫЙ МАРШРУТ

Keywords: FRACTAL GRAPH, PREFRACTAL
GRAPH, THEORY GRAPH, MULTICRITERION
OPTIMIZATION, COVERING GRAPH, POLYNO-
MIAL ALGORITHM, TRANSPORT SYSTEM, OP-
TIMAL PATH

При проектировании инфраструктуры транспортной системы [3,4] одной из актуальных проблем является задача организации сети пассажирского или грузового транспорта. В процессе проектирования транспортной сети, маршруты перевозок следует находить «особым» образом, учитывая экономические и общественные требования предъявляемые к системе. В качестве модели карты дорог некоторого промышленного объекта, населенного пункта, района или города рационально использовать граф [2]. В этом графе вершинам соответствуют узлы транспортной системы (промышленные объекты, склады, остановки, перекрестки и т.д). Ребрам графа соответствуют отрезки дорог, соединяющих перечисленные узлы транспортной системы.

Рассмотрим сеть дорог в определенном порядке, начиная с масштаба страны и заканчивая определенным населенным пунктом, каждый раз подключая дороги рассматриваемого уровня (масштаба). В масштабе страны будем рассматривать дороги связывающие округа. Далее, в масштабе округа рассмотрим сеть дорог соединяющих субъекты округа (области, республики, края). В масштабе субъектов округа рассмотрим сеть дорог связывающих определенные районы выбранного округа. Аналогично, при рассмотрении транспортной сети в масштабе района нас интересуют только дороги соединяющие населенные пункты этого района. Процесс рассмотрения сети дорог в таком порядке напоминает траекторию построения фрактальных и предфрактальных графов.

Моделью такого рода карты дорог со свойством самоподобия [1] состоящей из «большого» числа составных частей является предфрактальный граф, в общем случае порожденный множеством затравок.

Как в случае, когда в качестве модели схемы дорог применяется «обычный» граф, так и при использовании предфрактального графа, при исследовании сетей пассажирского или грузового транспорта возникает за-

дача построения системы транспортных маршрутов некоторого специального вида, позволяющей попасть из любого узла транспортной системы в любой другой при ограничениях накладываемых на время, длину пути, число пересадок и т.д.

В данной статье предложено формальное описание этой задачи в терминах теории графов [2] и многокритериальной дискретной оптимизации [5-7,10,12,14,15].

Покрытие [5-8,16] предфрактального графа состоящее из цепей, берется в качестве всей системы транспортных маршрутов. Необходимые требования и ограничения, налагаемые на систему маршрутов отражают критерии векторно-целевой функции [5].

Необходимые определения

Оговорим заранее, что недостающие определения теории графов, предфрактальные и фрактальных графов можно найти в работах [2], [1].

Затравкой назовем связный n -вершинный граф $H = (W, Q)$, где W -множество вершин, а Q –множество ребер.

Предфрактальный граф будем обозначать через $G_L = (V_L, E_L)$, где V_L -множество вершин графа, а E_L -множество ребер. Определим его поэтапно, где в построенном на предыдущем этапе графе $G_l = (V_l, E_l)$, $l = 1, 2, \dots, L - 1$ заменяя каждый раз его вершину затравкой $H = (W, Q)$. Ребрами ранга l предфрактального графа G_L , назовем ребра, появившиеся на l -ом $l = \{1, 2, \dots, L\}$ этапе порождения.

Предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ назовем (n, L) -графом, если затравкой этого графа является полный n -вершинный граф.

Предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ является *взвешенным*, если каждому его ребру $e^{(l)} \in E_L$ поставлено в соответствие число $w(e^{(l)}) \in (\theta^{l-1}a, \theta^{l-1}b)$, где $l = \overline{1, L}$ - ранг ребра, $a > 0$ и $\theta < \frac{a}{b}$. В понятиях

транспортной системы под весом понимается расстояние между объектами или затраты, связанные с транспортировкой.

Постановка задачи

Пусть дан взвешенный предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ порожденный затравкой $H = (W, Q)$, где $|W|=n$, $|Q|=q$.

Покрытием графа G_L назовем подграф $x = (V_L, E_x)$, $E_x \subseteq E_L$, построенный из множества простых цепей $\{C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_K\}$, где между двумя любыми вершинами из покрытия имеется простая цепь. Множество всех покрытий x обозначим через X . Покрытие $x = (V_L, E_x)$ - связный подграф графа G_L . Покрытие состоит из простых цепей, пересекающихся по вершинам либо ребрам.

Максимальной назовем кратчайшую цепь, не являющуюся подцепью никакой другой кратчайшей цепи [9,13,16].

В предфрактальном графе G_L простую цепь будем называть *i-смешанной цепью* C^i , если она содержит ребра i различных рангов.

На множестве покрытий $x \in X$ графа $G_L = (V_L, E_L)$ определим векторно-целевые функции:

$$F(X) = \{F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x), F_4(x), F_5(x)), x \in X\} \quad (1)$$

$$F_1(x) = \sum_{e \in E_x} w(e) \rightarrow \min \quad (2)$$

где $\sum_{e \in E_x} w(e)$ – общий вес покрытия x ;

$$F_2(x) = \min_{k=\overline{1,K}} w(C_k) \rightarrow \max \quad (3)$$

где C_k – максимальна цепь, $k = \overline{1,K}$, из покрытия $x \in \{C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_K\}$, а $w(C_k)$ – ее длина (суммарный вес ребер цепи).

$$F_3(x) = N(x) \rightarrow \min \quad (4)$$

где $N(x)$ – число всех максимальных цепей в покрытии x ;

$$F_4(x) = i \rightarrow \min \quad (5)$$

для всякой смешенной цепи C^i из покрытия x .

$$F_5(x) = |\rho_x(u, v) - \rho_{G_L}(u, v)| \rightarrow \min \quad (6)$$

где для любых вершин $u, v \in G_L$ графа $\rho_x(u, v)$ – расстояние в покрытии x , а $\rho_{G_L}(u, v)$ – расстояние на графе G_L ;

Все покрытия $\{x\}$ предфрактального графа G_L образуют множество допустимых решений $X = X(G_L) = \{x\}$ векторно-целевой функции (1) – (6).

В понятиях транспортных систем приведенные критерии векторно-целевой функции (1) имеют определенную содержательную интерпретацию.

Весам ребер предфрактального графа G_L , могут соответствовать определенные затраты и ограничения при движении транспорта по узлам транспортной системы. Критерий (2) учитывает затраты пассажиров и администрации транспортной системы. При эксплуатации расходы должны быть минимальны.

Критерий (3) отражает нахождение маршрутов пассажирского транспорта с наибольшим количеством узлов на своем пути. Оптимальным для этого критерия является покрытие содержащее максимальные цепи.

Чтобы доехать до нужного узла транспортной системы с наименьшим числом пересадок, необходимо уменьшить общее количество маршрутов в системе. На это направлен критерий (4).

Важными особенностями транспортной системы считаются локальность и дифференциация ее маршрутов. Внутрирегиональными (городскими, внутрирайонными) должны быть транспортные маршруты меньшей длины и меньшего веса, тем самым обеспечивая локальность. Таким образом упрощается процесс администрирования транспортной системой на определенном уровне (района, города и т.д.). Межрегиональными

являются маршруты более длинные и с большим весом. Под дифференциацией понимается разделение маршрутов по их функциям на межрегиональные и внутрирегиональные. При пересечении внутрирегиональности и межрегиональности может произойти нарушение дифференциации, т.е. ухудшение в функциональности маршрута. За недопущение таких ситуаций в работе транспортной системы в векторно-целевой функции (1) отвечает критерий (5). Смешанная цепь C_k есть модель маршрута сочетающая в себе обе функции – внутрирегиональную и межрегиональную. Так как ее старые ребра соединяют блоки и подграф-затравки предфрактального графа G_L , которые и соответствуют картам дорог районов, городов и т.д.

При эксплуатации транспортной системы часто требуется добраться до конечного пункта с наименьшим количеством остановок. Критерий (6) отражает эти требования к построению таких маршрутов.

Алгоритм β_1 построения остовного дерева минимального веса

Рассмотрим взвешенный предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, с затравкой $H = (W, Q)$, где $|W|=n$, $|Q|=q$. Алгоритм β_1 находит на графе G_L остовное дерево $T = (V_L, E_T)$ минимального веса [1].

Опишем, вкратце, суть работы алгоритма. Рассмотрим отдельно каждую подграф-затравку $z_s^{(l)}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$ из множества $Z(G_L)$. Поочередно на каждой из $\frac{n^L-1}{n-1}$ подграф-затравке строится остовное дерево минимального веса $T^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{T_s^{(l)}})$. Поиск остовного дерева минимального веса отдельно взятой подграф-затравки находится алгоритмом Прима [2]. Алгоритм Прима применяется в алгоритме β_1 в качестве процедуры. Нахождения остовных деревьев минимального веса всех подграф-затравок $z_s^{(l)}$ позволяет построить остовное дерево минимального веса предфрактального графа G_L .

Для каждого ребра предфрактального графа определен свой “идентифицирующий” номер, однозначно определяющий ребро во всей траектории. В случае необходимости по номеру можно определить принадлежность подграф-затравке и к какому блоку относится выделенное ребро. Таким образом, построение остовного дерева минимального веса для подграф-затравки $z_s^{(l)}$ есть выделение множества ребер на предфрактальном графе G_L .

АЛГОРИТМ β_1

ВХОД: взвешенный предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$.

ВЫХОД: Остовное дерево минимального веса $T = (V_L, E_T)$.

ШАГ 1. Для предфрактального графа G_L построить множество подграф-затравок $Z(G_L) = \{z_s^{(l)}\}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$. Пронумеровать все ребра предфрактального графа G_L в соответствии с построенным множеством $Z(G_L)$.

ШАГ 2. Используя алгоритм Прима, последовательно на всех затравках $z_s^{(l)}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$ из множества $Z(G_L)$, выделить остовные деревья минимального веса $T^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{T_s^{(l)}})$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$.

ШАГ 3. В результате работы шага 2 получается множество из $\frac{n^L - 1}{n - 1}$ остовных деревьев минимального веса $T^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{T_s^{(l)}})$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$. Этим множеством и определяется остовное дерево минимального веса $T = (V_L, E_T)$. ◀

ТЕОРЕМА 1. На предфрактальном (n, L) -графе $G_L = (V_L, E_L)$ алгоритм β_1 выделяет остовное дерево минимального веса $T = (V_L, E_T)$ порожденного затравкой $H = (W, Q)$, где $|W| = n$, $|V_L| = N = n^L$. Вычислительная сложность алгоритма равна $O(Nn^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для выполнения шага 2 требуется $O(n^2)$ операций на каждой подграф-затравке. На всех подграф-затравках будет выполнено $kO(n^2)$ операций, где $k = \frac{n^L-1}{n-1}$.

Тогда, $O(kn^2) = O\left(\frac{n^L-1}{n-1} \cdot n^2\right) = O(n^L \cdot n^2) = O(Nn^2)$. ◀

ПРИМЕЧАНИЕ 1. Вычислительной сложностью алгоритма β_1 на предфрактальном графе G_L в сравнении с вычислительной сложностью алгоритма Прима оценивается неравенством $O(Nn^2) < O(N^2)$. Вычислительная сложности алгоритма Прима в n^{L-2} раз больше вычислительной сложности алгоритма β_1 ◀

ТЕОРЕМА 2. Алгоритм β_1 на предфрактальном (n,L) -графе $G_L = (V_L, E_L)$, с затравкой $H = (W, Q)$, где $|W| = n$, $|V_L| = N = n^L$ строит остовное дерево минимального веса $T = (V_L, E_T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгоритм β_1 на предфрактальном графе G_L строит множество остовных деревьев минимального веса $\{T_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{T_s^{(l)}})\}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$. Докажем, что множество $\{T_s^{(l)}\}$ образует остовное дерево минимального веса $T = (V_L, E_T)$ предфрактального графа G_L .

Выделенные на подграф-затравках $z_s^{(l)}$ остовные деревья $T_s^{(l)}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$, образуют остовный лес на n^{l-1} связных компонентах, блоках $\{B_L^{(l)}\}$ предфрактального графа G_L .

Далее, остовное дерево $T_s^{(L-1)}$, $s = \overline{1, n^{L-2}}$ выделенные на подграф-затравках $z_s^{(L-1)}$, образуют n^{L-2} связных компонент, т.е. блоков $\{B_L^{(2)}\}$, а их количество равно n^{L-2} .

Продолжая аналогичный процесс получим, что остовные деревья выделенные на подграф-затравках $z_s^{(2)}$ вместе с ранее найденными остовными деревьями образуют n связных компонент. Каждая компонента

связности будет представлять остовное дерево блока $\{B_L^{(l-1)}\}$. На последнем этапе остовное дерево подграф-затравки $z_1^{(1)}$ связывает n компонент покрытия предфрактального графа G_L в остовное дерево $T = (V_L, E_T)$ предфрактального графа G_L .

Согласно определению взвешиванного предфрактального графа, вес всякого ребра $(l-1)$ -го ранга $l = \overline{2, L}$, меньше веса любого ребра l -го ранга. Следовательно, выделение остовного дерева минимального веса на подграф-затравках $z_s^{(l)}$ достаточно для получения остовного дерева минимального веса предфрактального графа G_L .

В результате работы алгоритма β_1 , полученный связный остовный подграф $T = (V_L, E_T)$, в силу построения им остовного дерева минимального веса $T_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{T_s^{(l)}})$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$, представляет собой остовное дерево минимального веса $T = (V_L, E_T)$ предфрактального графа G_L . ◀

Алгоритмом β_1 строит остовное дерево минимально веса $T = (V_L, E_T)$ на предфрактальном графе, которое является допустимым решением $x_1 = T = (V_L, E_T) \in X$. Допустимое решение x_1 оптимизирует критерий (2), $F_1(x_1) = \min_{x \in X} F_1(x)$, векторно-целевой функции (1) – (6).

Для остальных критериев (3) – (6) оптимальность покрытия x_1 не очевидна. Построим для некоторых из этих критериев оценки [5].

Для критерия (6) оценим верхнюю границу значений функции $F_5(x_1)$ используя наибольшую цепь $\max_{\{x_1\}} \max_{u, v \in x_1} \rho_{x_1}(u, v)$ среди всех возможных покрытий $\{x_1\}$.

Для каждого n -вершинного графа $G=(V, E)$ среди множества всех его остовных деревьев $\{T = (V, E_T)\}$ остовное дерево с наибольшей диаметрально цепью есть гамильтонова цепь [2]. Длина гамильтоновой цепи равна

$n-1$ [2]. Если рассмотреть предфрактальный граф G_L порожденный n -вершинной затравкой H , то длина его гамильтоновой цепи будет равна $n^L - 1$. Концевые вершины гамильтоновой цепи могут быть смежными, поэтому длина гамильтоновой цепи предфрактального графа с вычетом единицы является верхней границей оценки, $\max_{\{x_1\}} \max_{u,v \in x_1} \rho_{x_1}(u,v) - 1 = n^L - 2$, по критерию (6) векторно-целевой функции (1) – (6).

Пусть предфрактальный граф G_L порожден затравкой H являющейся деревом. Тогда предфрактальный граф является деревом и между любой парой его вершин существует единственная цепь. В этом случае, на предфрактальном дереве G_L алгоритм β_1 выделит покрытие x_1 , которое совпадает с предфрактальным графом G_L . Тогда нижняя граница оценки по критерию (6) векторно-целевой функции (1) – (6) будет равна нулю.

ЛЕММА 1. Если покрытие $x_1 = T = (V_L, E_T)$ выделяемое алгоритмом β_1 на предфрактальном (n, L) -графе $G_L = (V_L, E_L)$, совпадает с гамильтоновой цепью этого предфрактального графа, тогда x_1 является оптимальным по критериям $F_1(x)$ и $F_3(x)$: $F_1^0(x_1) = \min_{x \in X} F_1(x)$, $F_3^0(x_1) = \min_{x \in X} F_3(x)$.

Очевидно, дерево $x_1 = T = (V_L, E_T)$, с двумя висячими вершинами [2], является гамильтоновой цепью. Если у предфрактального графа G_L покрытие x_1 совпадает с его гамильтоновой цепью, тогда $N(x_1) = 1$. Из этого следует, что $N(x_1) \geq 1$ - нижняя граница оценки по критерию (4).

Количество максимальных цепей $N(D)$ любого дерева D определяется числом его висячих вершин, $N(D) = C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}$, где m – число висячих вершин дерева D . Звезда $K_{1,n}$, являющаяся деревом, имеет наибольшее число висячих вершин. У звезды число максимальных цепей равно $N(K_{1,n}) = C_{n-1}^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. В покрытии $x_1 = T = (V_L, E_T)$

предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного n -вершинной звездой-затравкой $H = K_{1,n}$, число максимальных цепей $N(x_1)$ не превосходит $N(x_1) \leq n^{L-1}(n-1)$. Верхняя оценка достижима на предфрактальном графе порожденном звездой-затравкой с пересекающимися старыми ребрами. Число подграф затравок у такого предфрактального графа равно n^{L-1} . Число висячих вершин в каждой из подграф затравке – $n-1$.

Обобщение всех проделанных исследований по поиску оценок для критериев из векторно-целевой функции (1) – (6), лежит в основе доказательства следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Алгоритм β_1 , на предфрактальном (n,L) -графе $G_L = (V_L, E_L)$, с n -вершинной затравкой $H = (W, Q)$, выделяет покрытие $x_1 = T = (V_L, E_T)$ оптимальное по критерию: $F_1^0(x_1) = \min_{x \in X} F_1(x)$, и оцениваемое по критериям: $F_3(x_1) \in [1; n^{L-1}(n-1)]$ и $F_5(x_1) \in [0; n^L - 2]$.

Алгоритм β_2 выделения наибольших максимальных цепей

Алгоритм выделения наибольших максимальных цепей на предфрактальных графах более глубоко исследован в работах [5,10]. Здесь лишь приведем еще раз процедуру его работы и построим оценки для векторно-целевой функции (1-6).

Пусть дан предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, с затравкой $H=(W,Q)$, $|W| = n$. Алгоритм β_2 выделяет на предфрактальном графе покрытие $x_2 = J = (V_L, E_J) = \{C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_K\} \in X$, все цепи которого $C_k = \{v_k, u_k\}$ – простые, $k = \overline{1, K}$.

Алгоритма β_2 использует алгоритм выделения наибольших максимальных цепей на произвольном графе представленный в работах [5,11]. В качестве процедуры, алгоритм β_2 , использует алгоритм выделения

наибольших максимальных цепей на каждой подграф-затравке множества $Z(G_L) \in z_s^{(l)}, l = \overline{1, L}, s = \overline{1, n^{l-1}}$. В результате на предфрактальном графе G_L выделяется подграф $J_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{J_s^{(l)}}) = \{C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_{K_{J_s^{(l)}}}\}$, где цепи $C_k = \{u, v\}$ являются максимальными и наибольшими, среди всех цепей между вершинами $u, v \in J_s^{(l)}$ подграф-затравки $z_s^{(l)}$. Выделяемое на подграф-затравках предфрактального графа G_L множество покрытий $\{J_s^{(l)}\}, l = \overline{1, L}, s = \overline{1, n^{l-1}}$, составляет покрытие $x_2 = J = (V_L, E_J)$.

В работе [5,10] приведено описание алгоритма выделения наибольших максимальных цепей на произвольном графе и построена оценка вычислительной сложности, которая равна $O(n^5)$.

АЛГОРИТМ β_2

ВХОД: предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$.

ВЫХОД: связный остовный подграф $J = (V_L, E_J) = \{C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_K\}$.

ШАГ 1. Построить множество подграф-затравок $Z(G_L) = \{z_s^{(l)}\}, l = \overline{1, L}, s = \overline{1, n^{l-1}}$, для предфрактального графа G_L . Все ребра предфрактального графа G_L пронумеровать относительно построенного множества $Z(G_L)$.

ШАГ 2. Используя алгоритм выделения наибольших максимальных цепей, выделять остовные подграфы $J_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{J_s^{(l)}}) = \{C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_{K_{J_s^{(l)}}}\}$ последовательно, на всех подграф-затравках $z_s^{(l)}, s = \overline{1, n^{l-1}}$ из множества $Z(G_L)$, следуя порядку уменьшения ранга $l = L, L - 1, \dots, 2, 1$. Создать множество цепей $\{C_1^*\} = \{C_{1,1}, C_{1,2}, \dots, C_{1,k}, \dots, C_{1,K_1}\} = \{J_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{J_s^{(l)}})\}$ после нахождения $\{J_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{J_s^{(l)}})\}, s = \overline{1, n^{l-1}}$.

После построения множества цепей $\{C_{L-l+1}^*\} = \{C_{L-l+1,1}, C_{L-l+1,2}, \dots, C_{L-l+1,k}, \dots, C_{L-l+1,K_{L-l+1}}\}$, $l = L, L-1, \dots, 2, 1$, соединить каждую его цепь $C_{L-l+1,k}$ с ребрами цепей подграф-затравок $\{z_s^{(l-1)}\}$. Объединять построенные цепи в множество цепей $\{C_{L-l+1}^*\}$.

ШАГ 3. У цепи $C_k \in J_s^{(l-1)}$ подграф-затравки $z_s^{(l-1)}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$ каждое ребро $e \in C_k = \{v_k, u_k\}$, $k = \overline{1, K_{J_s^{(l-1)}}}$ присоединять к той цепи из множества $\{C_{L-l+1}^*\}$, к концу которой она инцидентна. В множество цепей $\{C_{L-l+2}^*\}$ внести построенную цепь.

В случае, когда ребро e инцидентно своим концом одной или нескольким цепям из $\{C_{L-l+1}^*\}$, тогда внести в множество $\{C_{L-l+2}^*\}$ все полученные при этом цепи.

Если концам двух различных цепей C_{L-l+1,k_1} и C_{L-l+1,k_2} инцидентны обе вершины v_k, u_k ребра e , тогда в множество $\{C_{L-l+2}^*\}$ вносить цепь, образованную цепями $C_{L-l+1,k_1}, C_{L-l+1,k_2}$ и ребром e , только в том случае, когда концы цепей C_{L-l+1,k_1} и C_{L-l+1,k_2} , не инцидентные ребру e , так же не инцидентны концам других цепей из $\{C_{L-l+1}^*\}$. Иначе, вносить в множество $\{C_{L-l+2}^*\}$ цепи, которые получились из нескольких цепей множества $\{C_{L-l+1}^*\}$ и ребер цепей подграф-затравок $(l-1)$ -го ранга.

Если ребро e не является инцидентным никаким цепям из $\{C_{L-l+1}^*\}$, то в множество $\{C_{L-l+2}^*\}$ внести его в качестве отдельной цепи.

ШАГ 4. В результате работы ШАГА 3, после обработки цепей всех подграф-затравок, получится множество цепей $\{C_{L,1}^*\} = \{C_{L,1}, C_{L,2}, \dots, C_{L,k}, \dots, C_{L,K_L}\}$. Из множества $\{C_L^*\}$ изменением нумерации получить множество $\{C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_K\}$, которое определяет искомый остовный подграф $J = (V_L, E_J)$. ◀

ТЕОРЕМА 4. Алгоритм β_2 , выделяющий покрытие $J = (V_L, E_J)$ на предфрактальном (n, L) -графе $G_L = (V_L, E_L)$, порожденном затравкой $H=(W, Q)$, где $|W| = n$, $|V_L| = N = n^L$, имеет вычислительную сложность $O(Nn^5)$.

ПРИМЕЧАНИЕ 2. Сравнив вычислительные сложности алгоритма β_2 на предфрактальном графе G_L и алгоритма выделения наибольших максимальных цепей получим неравенство $O(Nn^5) > O(N^5)$. Вычислительная сложность алгоритма выделения наибольших максимальных цепей превышает в n^{L-5} раз вычислительную сложность алгоритма β_2 . ◀

ТЕОРЕМА 5. Алгоритм β_2 строит покрытие $x_2 = J = (V_L, E_J) = \{C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_K\} \in X$, где C_k – кратчайшие цепи одного ранга, на предфрактальном (n, L) -графе $G_L = (V_L, E_L)$, порожденном затравкой $H=(W, Q)$, где $|W| = n$, $|Q| = q$, с оценкой по критерию: $F_1(x_2) \in [a(n-1) \frac{(\frac{na}{b})^L - 1}{b-1}; qb \frac{(\frac{na}{b})^L - 1}{\frac{na}{b} - 1}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На предфрактальном графе G_L , порожденном затравкой H , алгоритм β_2 строит покрытие $x_2 = J = (V_L, E_J) = \{C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_K\}$ принадлежащее множеству допустимых решений X векторно-целевой функции (1) – (6).

Построим нижнюю оценку. Значение критерия $F_1(x)$ является весом, оно равно сумме весов ребер покрытия $x \in X$. Очевидно, из множества допустимых решений наибольшим весом будет покрытие содержащее все ребра предфрактального графа G_L , т.е. $x = G_L$. Оценим общий вес $w(G_L)$ предфрактального графа G_L . Обозначим через $w(z_s^{(l)})$ - общий вес подграф-затравки $z_s^{(l)} \in Z(G_L)$ ранга l , $l = \overline{1, L}$, где $s = \overline{1, n^{l-1}}$,

тогда $w(G_L) = \sum_l \sum_s w(z_s^{(l)})$. Вес отдельно взятой затравки ранга $l, l = \overline{1, L}$ оценивается $w(z_s^{(l)}) < q(a/b)^{l-1}b$, где $|Q| = q$ – число ребер в затравке H .

На предфрактальном графе G_L сумма весов всех подграф-затравок одного ранга оценена сверху $\sum_s w(z_s^{(l)}) < q(a/b)^{l-1}n^{l-1}$. Вес всего предфрактального графа удовлетворяет неравенству $w(G_L) < \sum_l q(a/b)^{l-1}n^{l-1} < qb \frac{(na/b)^L - 1}{\frac{na}{b} - 1}$.

Построим нижнюю оценку. Покрытием из множества допустимых решений наименьшим по весу должно быть остовное дерево предфрактального графа G_L . Для получения нижней оценки по критерию (2) нужно оценить вес остовного дерева минимального веса $T = (V_L, E_T)$, построенного алгоритмом β_1 на предфрактальном графе G_L . Поскольку алгоритм β_1 строит остовное дерево минимального веса $T = (V_L, E_T)$, чтобы получить $T_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{T_s^{(l)}})$, $l = \overline{1, L}, s = \overline{1, n^{l-1}}$ на всех подграф-затравках $Z(G_L)$, то $w(T) = \sum_l \sum_s w(T_s^{(l)})$, где $w(T_s^{(l)})$ – общий вес остовного дерева минимального веса $T_s^{(l)}$. Согласно определению взвешенного предфрактального графа, каждое ребро подграф-затравки $z_s^{(l)}$ ранга l не может быть меньше чем $(a/b)^{l-1}a$. Тогда, $w(T_s^{(l)}) > (n-1)(a/b)^{l-1}a$, где $(n-1)$ -количество ребер остовного дерева [2,9]. Общий вес остовного дерева минимального веса подграф-затравок одного ранга $\sum_s w(T_s^{(l)}) > a(n-1)(a/b)^{l-1}n^{l-1}$, $l = \overline{1, L}$. Для остовного дерева минимального веса T выполняется:

$$w(T) > \sum_l a(n-1) \left(\frac{a}{b}\right)^{l-1} n^{l-1} > a(n-1) \left(\left(\frac{na}{b}\right)^L - 1\right) / na/b - 1.$$

Таким образом,

$$F_1(x_2) \in [a(n-1) \frac{(\frac{na}{b})^L - 1}{\frac{na}{b} - 1}; qb \frac{(\frac{na}{b})^L - 1}{\frac{na}{b} - 1}]. \blacktriangleleft$$

Заключение

Построенная модель системы организации маршрутов в транспортной системе с использованием предфрактальных графов значительно уменьшает вычислительный процесс нахождения оптимальных маршрутов в сравнении с традиционным способом решения задачи на графах. Сравнительный анализ вычислительной сложности предложенного алгоритма с известным алгоритмом Прима, показывает его превосходство над последним порядка меньше чем в N/n^2 раз.

Что касается использования алгоритма выделения наибольших максимальных цепей на предфрактальном графе в сравнении с использованием его на графе, то превосходство первого алгоритма порядка меньше чем в N^4/n^5 раз.

Литература

1. Кочкаров А.М. Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. - Нижний Архыз: РАН САО.-1998.
2. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. - М.: Мир, 1978.
3. Орлянская Н.П., Нагоев А.В. Проблемы проектирования и внедрения информационной системы учета работы автотранспорта. Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2005. № 9. С. 148-155
4. Орлянская Н.П., Нагоев А.В. Разработка математической модели обработки информационной системы учета автотранспорта. Труды Кубанского государственного аграрного университета. 2007. № 8. С. 26-30.
5. Павлов Д.А. Многокритериальная задача покрытия предфрактального графа простыми цепями// Диссертация на соискание ученой степени кан. ф.-м. н. – Таганрог: ТРГУ, 2004.
6. Павлов Д.А. Многокритериальная задача покрытия предфрактального графа цепями типа τ ($\tau=1,2,3$). Черкесск, КЧГТИ, 2003, Деп. в ВИНТИ, №670-В2003. – С.1-17.
7. Павлов Д.А. Многокритериальная задача покрытия фрактальных и предфрактальных графов простыми цепями. Черкесск, КЧГТА, 2004, Деп. в ВИНТИ, №1248-В2004. – С.1-12.
8. Павлов Д.А. Оценка покрытия предфрактального графа кратчайшими простыми цепями// VI Всероссийский симпозиум «Математическое

- моделирование и компьютерные технологии». Тез. докл. Кисловодск: КИЭП, 2004. – С15-16.
9. Павлов Д.А., Кочкаров А.А. Об одной многокритериальной задаче покрытия минимального веса предфрактального графа простыми пересекающимися цепями. Препринт №200. РАН САО. Нижний Архыз. 2004.-12с.
 10. Павлов Д.А., Кочкаров А.А. Узденов А.А. Об одной многокритериальной задаче выделения наибольших максимальных цепей на предфрактальных графах. Препринт №198. РАН САО. Нижний Архыз. 2004.-27с.
 11. Павлов Д.А., Кочкаров Р.А. Алгоритм с оценками построения покрытий непересекающимися простыми цепями на предфрактальном графе. Препринт №199. РАН САО. Нижний Архыз. 2004.-24с.
 12. Павлов Д.А., Салпагаров С.И. Многокритериальная задача выделения маршрутов на предфрактальном графе// Известия ТРГУ. – Таганрог: ТРГУ, 2004.
 13. Павлов Д.А., Узденов А.А. Разработка и исследование задачи распознавания предфрактального графа с затравкой - простая цепь// В сборнике: Перспективные системы и задачи управления Материалы Второй Всероссийской научно-практической конференции. –Таганрог: ТРГУ, 2007.
 14. Павлов Д.А., Узденов А.А. Алгоритмы определения абсолютных r -центров на предфрактальных графах с затравкой - полный n -вершинным графом. Препринт №201. РАН САО. Нижний Архыз. 2004.-9с.
 15. Узденов А.А., Павлов Д.А. Об одной многокритериальной задаче о r -медианах на предфрактальных графах// Электронный научный журнал "Исследовано в России". — 2007. — Т. 10. —с.1953.
 16. Юшманов С.В. Маршруты в графах и связанные с ними множества вершин. // Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н. – Москва: МГУ, 1982.

References

1. Kochkarov A.M. Raspoznavanie fraktal'nyh grafov. Algoritmicheskij podhod. - Nizhnij Arhyz: RAN SAO.-1998.
2. Kristofides N. Teorija grafov. Algoritmicheskij podhod. - M.: Mir, 1978.
3. Orljanskaja N.P., Nagoev A.V. Problemy proektirovanija i vnedrenija informacionnoj sistemy ucheta raboty avtotransporta. Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2005. № 9. S. 148-155
4. Orljanskaja N.P., Nagoev A.V. Razrabotka matematicheskoj modeli obrabotki informacionnoj sistemy ucheta avtotransporta. Trudy Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2007. № 8. S. 26-30.
5. Pavlov D.A. Mnogokriterial'naja zadacha pokrytija predfraktal'nogo grafa prostymi cepjami// Dissertacija na soiskanie uchenoj stepeni kan. f.-m. n. –Таганрог: ТРГУ, 2004.
6. Pavlov D.A. Mnogokriterial'naja zadacha pokrytija predfraktal'nogo grafa cepjami tipa . Cherkessk, KChGTI, 2003, Dep. v VINITI, №670-V2003. – S.1-17.
7. Pavlov D.A. Mnogokriterial'naja zadacha pokrytija fraktal'nyh i predfraktal'nyh grafov prostymi cepjami. Cherkessk, KChGTA, 2004, Dep. v VINITI, №1248-V2004. – S.1-12.
8. Pavlov D.A. Ocenka pokrytija predfraktal'nogo grafa krachajshimi prostymi cepjami// VI Vserossijskij simpozium «Matematicheskoe modelirovanie i komp'juternye tehnologii». Тез. докл. Кисловодск: КИЭП, 2004. – С15-16.

9. Pavlov D.A., Kochkarov A.A. Ob odnoj mnogokriterial'noj zadachi pokrytija minimal'nogo vesa predfraktal'nogo grafa prostymi peresehajushhimisja cepjami. Preprint №200. RAN SAO . Nizhnij Arhyz. 2004.-12s.
10. Pavlov D.A., Kochkarov A.A. Uzdenov A.A. Ob odnoj mnogokriterial'noj zadache vydelenija naibol'shix maksimal'nyh cepej na predfraktal'nyh grafah. Preprint №198. RAN SAO. Nizhnij Arhyz. 2004.-27s.
11. Pavlov D.A., Kochkarov R.A. Algoritm s ocenkami postroenija pokrytij neperesehajushhimisja prostymi cepjami na predfraktal'nom grafe. Preprint №199. RAN SAO. Nizhnij Arhyz. 2004.-24s.
12. Pavlov D.A., Salpagarov S.I. Mnogokriterial'naja zadacha vydelenija marshrutov na predfraktal'nom grafe// Izvestija TRGU. – Taganrog: TRGU, 2004.
13. Pavlov D.A., Uzdenov A.A. Razrabotka i issledovanie zadachi raspoznavanija predfraktal'nogo grafa s zatravkoj - prostaja cep'// V sbornike: Perspektivnye sistemy i zadachi upravlenija Materialy Vtoroj Vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii. –Taganrog: TRGU, 2007.
14. Pavlov D.A., Uzdenov A.A. Algoritmnyj opredelenija absoljutnyh r-centrov na predfraktal'nyh grafah s zatravkoj - polnyj n-vershinnyj grafom. Preprint №201. RAN SAO. Nizhnij Arhyz. 2004.-9s.
15. Uzdenov A.A., Pavlov D.A. Ob odnoj mnogokriterial'noj zadache o r-medianah na predfraktal'nyh grafah// Jelektronnyj nauchnyj zhurnal "Issledovano v Rossii". — 2007. — T. 10. —s.1953.
16. Jushmanov S.V. Marshruty v grafah i svjazannye s nimi mnozhestva vershin. // Dissertacija na soiskanie uchenoj stepeni k.f.-m.n. – Moskva: MGU, 1982.