

УДК 539.12.01

01.00.00 Физико-математические науки

УСИЛИТЕЛЬ ПОЛЯ ЯНГА-МИЛЛСА

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D., директор
Scopus Author ID: 6603801161
SPIN-код автора: 4945-6530
A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада

В работе представлен проект усилителя поля Янга-Миллса. Модель усилителя представляет собой многослойную сферическую оболочку с возрастающей к центру плотностью. В центре усилителя находится ядро с большой плотностью вещества. Показано, что в такой системе амплитуда волн поля Янга-Миллса возрастает от периферии к центру на несколько порядков. Обсуждается роль поля Янга-Миллса в процессах, происходящих в ядрах галактик, звезд и планет. Представлены данные моделирования по усилению поля Янга-Миллса в недрах нашей планеты, при атомном взрыве и в некоторых специальных устройствах типа вольтова столба. Для описания механизма усиления хромодинамического поля использованы как точные результаты, полученные в теории Янга-Миллса, так и численные модели, развитые на основе усредненных и точных уравнений. Среди точных решений особую роль играет центрально-симметрическая метрика, описывающая вклад поля Янга-Миллса в скорость разбегания галактик. Среди приближенных численных моделей можно отметить восьмикомпонентную скалярную модель развитую нами для моделирования нелинейных цветовых колебаний и хаоса в теории Янга-Миллса. Ранее были исследованы модели пространственно-временных осцилляций поля Янга-Миллса в случае трех и восьми цветов. Результаты численного моделирования показывают, что нелинейное взаимодействие не приводит к пространственному перемешиванию цветов, как это могло бы быть в случае турбулентной диффузии. В зависимости от параметров системы наблюдается либо подавление амплитуды колебаний пяти цветов первыми тремя, либо наоборот – трех первых цветов пятью остальными. При этом кинетическая энергия колебаний либо распределяется поровну между цветовыми компонентами, либо преобладает кинетическая энергия подавляемой группы цветов. В настоящей работе установлено, что усиление хромодинамического поля приводит к резкому росту амплитуды подавляемого цвета, что может приводить к росту энтропии, возбуждению ядерных реакций и распадов частиц

Ключевые слова: НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ,

UDC 539.12.01

Physics and mathematics

YANG-MILLS FIELD AMPLIFIER

Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D., C.E.O.
Scopus Author ID: 6603801161

A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada

The article presents a project of the Yang-Mills amplifier. Amplifier model is a multilayer spherical shell with increasing density towards the center. In the center of the amplifier is the core of high-density material. It is shown that in such a system, the amplitude of the Yang-Mills waves rises from the periphery to the center of several orders of magnitude. The role of the Yang-Mills field in the processes occurring in the nuclei of galaxies, stars and planets is discussed. The data modeling to strengthen the Yang-Mills field in the bowels of the planet, with an atomic explosion, and in some special devices such as the voltaic pile. To describe the mechanism of amplification chromodynamics field used as accurate results in Yang-Mills theory and numerical models developed based on an average and the exact equations as well. Among the exact solutions of the special role played by the central-symmetric metric describing the contribution of the Yang-Mills field in the speed of recession of galaxies. Among the approximate numerical models can be noted the eight-scalar model we have developed for the simulation of non-linear color oscillations and chaos in the Yang-Mills theory. Earlier models were investigated spatio-temporal oscillations of the Yang-Mills theory in the case of three and eight colors. The results of numerical simulation show that the nonlinear interaction does not lead to a spatial mixing of colors as it might be in the case of turbulent diffusion. Depending on the system parameters there is a suppression of the amplitude of the oscillations the first three by five colors or vice versa. The kinetic energy fluctuations or shared equally between the color components, or dominated by the kinetic energy of repressed groups of colors. In the present study, we found that amplification chromodynamic field leads to a sharp increase in the amplitude of the suppressed color, which can lead to an increase in entropy, excitation of nuclear reactions and decays particles

Keywords: QCD, NONLINEAR OSCILLATIONS,

Введение

В настоящее время классическое калибровочное поле Янга-Миллса [1] рассматривается преимущественно в спекулятивном аспекте [2], либо как основа для квантования в моделях квантовой хромодинамики [3-4], либо в связи с гравитацией и электромагнетизмом [2, 5-9]. Путем усреднения уравнений квантовой хромодинамики приходим к модели глюонного конденсата [10-13], в рамках которой были рассмотрены задачи о спектре масс адронов и термодинамики глюонов [14-15], а так же об устойчивости волн в таких системах в связи с геометрической турбулентностью [16-18].

Хорошо известно, что теория Янга-Миллса описывает нелинейную динамическую систему, в которой осцилляции цвета демонстрируют хаотическое поведение [19-24]. Возникновение хаоса в динамической системе, описывающей осцилляции цвета, может иметь определенные макроскопические следствия, например, в форме геометрической турбулентности [17-18].

В работе [17] представлена модель пространственно-временных осцилляций поля Янга-Миллса в случае трех и восьми цветов. Результаты численного моделирования показывают, что нелинейное взаимодействие не приводит к пространственному перемешиванию цветов, как это могло бы быть в случае турбулентной диффузии. В зависимости от параметров системы наблюдается либо подавление амплитуды колебаний пяти цветов первыми тремя, либо наоборот – трех первых цветов пятью остальными. При этом кинетическая энергия колебаний либо распределяется поровну между цветовыми компонентами, либо преобладает кинетическая энергия подавляемой группы цветов.

В настоящей работе представлен проект усилителя поля Янга-Миллса. Модель усилителя представляет собой многослойную сферическую оболочку с возрастающей к центру плотностью. В центре усилителя находится ядро с большой плотностью вещества. Показано, что в такой системе амплитуда волн поля Янга-Миллса возрастает от периферии к центру на несколько порядков. Обсуждается роль поля Янга-Миллса в процессах, происходящих в ядрах галактик, звезд и планет. Представлены данные моделирования по усилению поля Янга-Миллса в недрах нашей планеты, при атомном взрыве и в некоторых специальных устройствах типа столба Вольта.

Для описания механизма усиления хромодинамического поля использованы как точные результаты, полученные в теории Янга-Миллса, так и численные модели, развитые на основе усредненных и точных уравнений. Среди точных решений особую роль играет центрально-симметрическая метрика [9], описывающая вклад поля Янга-Миллса в скорость разбегания галактик. Среди приближенных численных моделей можно отметить восьми компонентную скалярную модель развитую нами для моделирования нелинейных цветовых колебаний и хаоса в теории Янга-Миллса [17].

Уравнения Янга-Миллса в произвольных системах отсчета

Теория Янга-Миллса [1] была предложена для объяснения сохранения изотопического спина. Согласно [1], изотопическому спину сопоставляется калибровочное поле, связанное с изотопическим спином, аналогично тому, как электромагнитное поле связано с электрическим зарядом. Дальнейшее развитие теории и концепции цвета [3] привело к созданию квантовой хромодинамики, в которой поле Янга-Миллса представляется как динамическая система, состоящая из восьми взаимодействующих цветовых полей [4].

В работах [16-17, 25] мы рассмотрели уравнения Янга-Миллса в произвольных системах отсчета, допускаемых принципом относительности Эйнштейна. Преобразование уравнений Янга-Миллса к подвижным осям осуществляется по стандартной схеме [2, 16-17, 25]. Рассмотрим динамическую систему, включающую метрический тензор $g_{\mu\nu}$, поле Янга-Миллса $A_{\alpha\mu}$ и поле φ , которое преобразуется как тензор при координатных преобразованиях и реализует матричное представление поля Янга-Миллса. Лагранжиан системы имеет вид

$$\begin{aligned} S &= S_g + S_A + S_\varphi \\ S_g &= -\int R g^{1/2} dx - \Lambda \int g^{1/2} dx \\ S_A &= -\frac{1}{4} \int g^{1/2} F_{\alpha\mu\nu} F_\alpha^{\mu\nu} dx \\ S_\varphi &= -\frac{1}{2} \int g^{1/2} (\tilde{\varphi}_{\bullet\mu} \varphi^{\bullet\mu} + m^2 \tilde{\varphi} \varphi) dx \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и ниже полагаем $R = g^{ik} R_{ik}$, R_{ik} - тензор Риччи; Λ - космологическая постоянная; $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ - тензор Римана, Γ_{kl}^i - символы Кристоффеля второго рода; $\delta F_{\alpha\mu\nu} = \delta A_{\alpha\nu\bullet\mu} - \delta A_{\alpha\mu\bullet\nu}$, точкой обозначено ковариантное дифференцирование:

$$\varphi_{\bullet\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} + \Omega_\mu \varphi, \quad \Omega_\mu = G_\alpha A_\mu^\alpha + G_\sigma^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \quad (2)$$

A_μ^α, G_α - компоненты поля Янга-Миллса и генераторы группы соответственно. Как известно, в этом случае выполняются коммутационные соотношения

$$\varphi_{\bullet\mu\nu} - \varphi_{\bullet\nu\mu} = -(G_\alpha F_{\mu\nu}^\alpha + G_\sigma^\tau R_{\mu\nu\sigma}^\tau) \varphi \quad (3)$$

Уравнения поля, которые соответствуют каждому из действий (1) с индексом имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{S}_g}{\delta g_{\mu\nu}} &= g^{1/2} (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) - \frac{1}{2} \Lambda g^{1/2} g^{\mu\nu} = 0 \\ \frac{\delta \mathcal{S}_A}{\delta A_{\alpha\mu}} &= -g^{1/2} F_{\alpha\bullet\nu}^{\mu\nu} = 0 \\ \frac{\delta \mathcal{S}_\varphi}{\delta \tilde{\varphi}} &= g^{1/2} (\varphi_{\bullet\mu}^\mu - m^2 \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

При совместном действии гравитационного поля, поля Янга-Миллса и скалярного поля имеем

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta g_{\mu\nu}} &= g^{1/2} (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) - \frac{1}{2} \Lambda g^{1/2} g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} T^{\mu\nu} = 0 \\ \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta A_{\alpha\mu}} &= -g^{1/2} F_{\alpha\bullet\nu}^{\mu\nu} + J_\alpha^\mu = 0, \\ \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \tilde{\varphi}} &= g^{1/2} (\varphi_{\bullet\mu}^\mu - m^2 \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь тензор плотности энергии-импульса и плотность тока Янга-Миллса определяются соответственно как

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= g^{1/2} \left(F_{\alpha\sigma}^\mu F_\alpha^{\nu\sigma} - \frac{1}{4} F_{\alpha\sigma\tau} F_\alpha^{\sigma\tau} \right) + g^{1/2} \tilde{\varphi}^{\bullet\mu} \varphi^{\bullet\nu} - \frac{1}{2} g^{1/2} g^{\mu\nu} (\tilde{\varphi}_{\bullet\sigma} \varphi^{\bullet\sigma} + m^2 \tilde{\varphi} \varphi), \\ J_\alpha^\mu &= g^{1/2} \tilde{\varphi} G_\alpha \varphi^{\bullet\mu}, \\ T_{\bullet\nu}^{\mu\nu} &= 0, \quad J_{\alpha\bullet\mu}^\mu = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Последние два условия на дивергенцию плотности тока и тензора плотности энергии-импульса являются следствием динамических уравнений (5).

Уравнения Янга-Миллса с группой симметрии $SU(2)$

В метрике Минковского и при отсутствии тока уравнения Янга-Миллса с группой симметрии $SU(2)$ принимают особенно простой вид $F_{\alpha\bullet\nu}^{\mu\nu} = 0$, что равносильно

$$\begin{aligned} \partial_\mu F_{\mu\nu}^a + g_{YM} \varepsilon^{abc} A_\mu^b F_{\mu\nu}^c &= 0 \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_{YM} \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь g_{YM} – константа связи, ε^{abc} - единичный антисимметричный тензор третьего ранга.

Динамическая модель [19] следует из (7), если мы положим $A_0^a = 0, A_i^a = O_i^a f^{(a)}(t) / g_{YM}$, где O_i^a - ортогональная матрица. Тогда система уравнений (7) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f^{(a)}}{dt^2} + (\mathbf{f}^2 - f^{(a)2}) f^{(a)} &= 0 \\ \mathbf{f}^2 &= f^{(1)2} + f^{(2)2} + f^{(3)2} \end{aligned} \tag{8}$$

Основные свойства системы уравнений (7) были изучены в работах [19-20] и других. Было установлено наличие областей стохастичности в фазовом пространстве динамической системы (7).. Введем новые обозначения

$$\begin{aligned} x &= f^{(1)}(t), X = \int_0^t f^{(1)}(t) dt, x_2 = \frac{d^2 f^{(1)}}{dt^2} \\ y &= f^{(2)}(t), Y = \int_0^t f^{(2)}(t) dt, y_2 = \frac{d^2 f^{(2)}}{dt^2} \\ z &= f^{(3)}(t), Z = \int_0^t f^{(3)}(t) dt, z_2 = \frac{d^2 f^{(3)}}{dt^2} \end{aligned} \tag{9}$$

Начальные значения задачи зададим в нормированном виде, считая вектор $\{x(0), y(0), z(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)\}$ состоящим только из нулей и единиц. В уравнениях (8), напротив, введем два параметра k_1, k_2 , описывающих интенсивность взаимодействия цветовых полей, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + k_1(y^2 + z^2)x &= 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + k_2(x^2 + z^2)y &= 0 \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + (y^2 + x^2)z &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Обзор результатов, полученных путем численного интегрирования уравнений (9)-(10), содержится в нашей работе [17]. Было установлено, что функции $X(t), Y(t), Z(t)$, если их рассматривать как координаты траектории

частицы, образуют 3D решетку, узлы которой соединены между собой перемычками. При большом увеличении эти перемычки выглядят как бруски прямоугольного сечения, на которые навиты траектории, образующиеся при колебаниях в трех плоскостях – рис. 1.

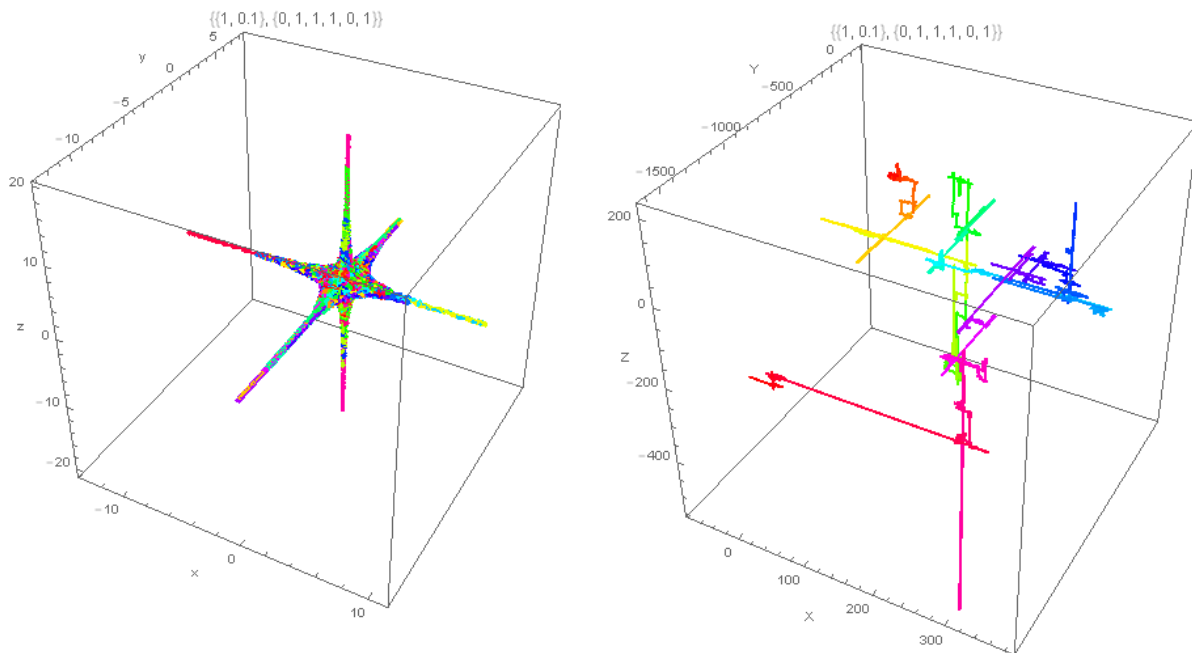


Рис. 1. Динамика полей Янга-Миллса в трехцветной модели: слева узел, справа - фрагмент решетки. Параметры модели и начальные данные указаны на листах в верхней части рисунков в форме $\{\{k_1, k_2\}, \{x(0), y(0), z(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)\}\}$.

В опубликованной недавно работе [24] обсуждается гипотеза происхождения размерности нашего пространства. Предполагается, что пространство заполнено трубками тока конденсата, возникшими на ранних стадиях формирования Вселенной. Было доказано, что узлы решетки, образованной трубками тока устойчивы именно в трехмерном пространстве. Используя результаты [17], мы предлагаем более простой механизм формирования QCD-решетки, в котором основную роль играют структуры,

обладающие $SU(2)$ симметрией, типа приведенной на рис. 1. Такие структуры воссоздаются непрерывно в силу свойств динамической системы (10), что приводит к их распространению во всех направлениях. Пространство такого типа должно непрерывно расширяться, что можно связать с расширением Вселенной. Ниже будет установлена зависимость постоянной Хаббла от плотности энергии поля Янга-Миллса и электромагнитного поля для центрально-симметрической метрики [9].

Уравнения Янга-Миллса с группой симметрии $SU(3)$

В случае $SU(3)$ симметрии уравнения Янга-Миллса приводятся к виду [2, 10-11,17]

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} F_{\mu\nu}^B + g_{YM} f^{BCD} A_{\mu}^C F_{\mu\nu}^D &= 0 \\ F_{\mu\nu}^B &= \partial_{\mu} A_{\nu}^B - \partial_{\nu} A_{\mu}^B + g_{YM} f^{BCD} A_{\mu}^C A_{\nu}^D \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $B, C, D = 1, 2, 3, \dots, 8$ – цветовые индексы (число цветовых полей равно восьми); f^{BCD} – структурные константы калибровочной группы $SU(3)$.

Проблему моделирования можно упростить, рассматривая некоторые средние параметры [10-13]. Путем усреднения лагранжиана системы

$L_{SU(3)} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu}$ находим лагранжиан новой модели и систему динамических уравнений [10]

$$\begin{aligned} \phi_{tt}^a - \nabla^2 \phi^a + [(\chi^m \chi^m) + \lambda_1 (\phi^a \phi^a) - \phi_0^2] \phi^a &= 0 \\ \chi_{tt}^m - \nabla^2 \chi^m + [(\phi^a \phi^a) + \lambda_2 (\chi^m \chi^m) - \chi_0^2] \chi^m &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $a = 1, 2, 3; m = 4, 5, \dots, 8$ – цветовые индексы, по повторяющимся индексам осуществляется суммирование, $\lambda_1, \lambda_2, \phi_0, \chi_0$ – параметры модели.

Рассмотрим задачу о распаде начального состояния в системе (12) в плоскости (t, x) , в ограниченной области пространства $0 \leq x \leq L$. Зададим все функции в начальный момент времени в виде $u_i \exp[-k(x - x_i)^2], i = 1, \dots, 8$, а их производные по времени равными нулю:

$$\phi_i^a(0, x) = 0, \chi_i^m(0, x) = 0, a = 1, 2, 3; m = 4, 5, \dots, 8. \quad (13)$$

Параметры системы зададим в виде [11]:

$$\lambda_1 = 0.1; \lambda_2 = 1; \phi_0 = A_0 = 1.6171579, \chi_0 = B_0 = 1.49273856.$$

Для удобства отображения данных введем обозначения

$$f_a = \phi^a(t, x), f_m = \chi^m(t, x), a = 1, 2, 3; m = 4, 5, \dots, 8.$$

Тогда в начальный момент времени имеем

$$f_i(0, x) = u_i \exp[-k(x - x_i)^2], \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0, i = 1, \dots, 8 \quad (14)$$

Задача (12)-(14) была исследована численными методами в работе [17]. Был обнаружен своеобразный механизм развития турбулентности, при котором есть две взаимодействующих подсистемы, в одной из которых преобладают крупномасштабные и низкочастотные моды колебаний, а в другой – высокочастотные колебания с малой длиной волны. Отметим, что такой механизм развития турбулентности является характерным в случае гидродинамической турбулентности. Однако есть и существенное различие между двумя механизмами турбулентности заключающееся в том, что в системе (12) нет турбулентной диффузии, поэтому цвета не перемешиваются до однородного состояния, но каждый цвет существует индивидуально в любом режиме колебаний.

Хаотическое поведение точных решений уравнений Янга-Миллса

В работе [26] были построены точные решения уравнений Янга-Миллса в случае $SU(2)$ симметрии вида

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\mu(t, \mathbf{x}) &= a_{\mu\nu}(t, \mathbf{x})\mathbf{B}_\nu(u(t, \mathbf{x})) \\ \mathbf{B}_\mu &= a_\mu \mathbf{e}_1 f(u) + d_\mu \mathbf{e}_2 g(u) + b_\mu \mathbf{e}_3 h(u) \\ \mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0)^T, \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T, \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 a_{\mu\nu} = & (a_\mu a_\nu - d_\mu d_\nu) \cosh \theta_0 + (d_\mu a_\nu - a_\mu d_\nu) \sinh \theta_0 + 2(a_\mu + d_\mu)[(\theta_1 \cos \theta_3 + \theta_2 \sin \theta_3)b_\mu - \\
 & - (\theta_1 \sin \theta_3 - \theta_2 \cos \theta_3)c_\nu + (\theta_1^2 + \theta_2^2)e^{-\theta_0}(a_\nu + d_\nu)] + (b_\mu c_\nu - c_\mu b_\nu) \sin \theta_3 \\
 & - (c_\mu c_\nu + b_\mu b_\nu) \cos \theta_3 - 2(\theta_1 b_\mu + \theta_2 c_\mu)e^{-\theta_0}(a_\nu + d_\nu)
 \end{aligned} \tag{16}$$

$a_\nu, b_\nu, c_\nu, d_\nu$ - произвольные параметры, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned}
 a_\mu a^\mu = -b_\mu b^\mu = -c_\mu c^\mu = -d_\mu d^\mu = 1 \\
 a_\mu b^\mu = a_\mu c^\mu = a_\mu d^\mu = b_\mu c^\mu = b_\mu d^\mu = c_\mu d^\mu = 0
 \end{aligned}$$

$u(t, \mathbf{x}), \theta_\mu(t, \mathbf{x})$ - некоторые функции, которые в частном случае подалгебры L_8 можно представит в форме

$$\begin{aligned}
 \theta_0 = \alpha \arctan(bx/cx), \theta_1 = \theta_2 = 0, \theta_3 = -\arctan(bx/cx), \\
 u = (bx)^2 + (cx)^2, bx = b_\mu x^\mu, cx = c_\mu x^\mu
 \end{aligned} \tag{17}$$

При подстановке выражений (15) в уравнения (7), находим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 4uf'' + 4f' + \frac{\alpha^2}{u} f - \frac{2\alpha e_0}{\sqrt{u}} gh - e_0^2(h^2 + g^2)f = 0 \\
 4ug'' + 4g' + \frac{\alpha^2}{u} g + \frac{2\alpha e_0}{\sqrt{u}} fh - e_0^2(h^2 - f^2)g = 0 \\
 4uh'' + 4h' - \frac{1}{u} h + \frac{2\alpha e_0}{\sqrt{u}} fg - e_0^2(g^2 - f^2)h = 0
 \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь $e_0 = g_{YM}$ - константа связи, α - произвольная константа, которая в данной модели играет роль константы связи. Выражения (15)-(17) вместе с уравнениями (18) описывают широкий класс волновых решений уравнений Янга-Миллса в случае $SU(2)$ симметрии.

Начальные данные для системы уравнений (18) зададим в виде

$$\begin{aligned}
 f(0) = f_0, g(0) = g_0, h(0) = h_0 \\
 f'(0) = g'(0) = h'(0) = 0
 \end{aligned} \tag{19}$$

В работе [17] было показано, что если калибровочное поле является решением задачи (18)-(19), то в такой системе наблюдается хаотическое поведение. Отметим, что система уравнений (18) отличается от системы

уравнений (8) наличием параметров и ряда слагаемых, а также наличием особых точек $u \rightarrow 0, \infty$. Без ограничения общности можно положить $e_0 = 1$. Действительно, сделаем в системе уравнений (18) замену $u \rightarrow u/e_0^2$. Тогда параметр e_0 выпадет из системы, тогда как зависимость от параметра α сохраняется при любой перенормировке. Следовательно, параметр α в данной модели играет роль константы связи.

Так, например, при увеличении параметра α система испытывает ряд переходов [17]. Такого рода переходы к хаотическому поведению при увеличении параметра являются характерными для гидродинамической турбулентности. В этом случае, как известно, переход к турбулентности осуществляется при увеличении числа Рейнольдса.

Таким образом, мы указали три системы уравнений, выведенных из теории Янга-Миллса, в которых наблюдается переход к хаотическому поведению. Эти переходы, обусловленные нелинейными колебаниями цвета, зависят от параметров модели – константы связи и начальной амплитуды волн.

Отметим, что общее свойство физических систем, описываемых нелинейными уравнениями в теории Янга-Миллса и в гидродинамике, особенно сильно проявляется в процессах образования кварк-глюонной плазмы и струй адронов, когда поле Янга-Миллса вовлечено в формирование гидродинамического течения. Все это указывает на существование в природе общего механизма формирования особого вида турбулентности – геометрической турбулентности [18].

Проект усилителя поля Янга-Миллса

В настоящее время квантовая хромодинамика применяется преимущественно для моделирования сильного взаимодействия адронов, в

том числе ядерных реакций [27]. Заметим, однако, что в обсуждаемых моделях динамики поля Янга-Миллса - (8), (12) и (18), нет никаких указаний на ограничение по масштабам. Это означает, что можно рассмотреть макроскопический аналог атомного ядра или адрона, предполагая, что такое устройство может быть использовано с целью генерации, усиления и передачи поля Янга-Миллса.

В качестве такого аналога мы рассмотрим, в первую очередь, хорошо известный и изученный в многочисленных экспериментах ядерный взрыв – рис. 2. Как известно, для осуществления ядерного взрыва применяются оружейный уран и плутоний в форме, например, сферических оболочек, которые разгоняются до скорости 2-3 км/с посредством детонации специального взрывчатого вещества [28-29]. При соударении оболочки с ядром возникает ударная волна, в которой происходит сжатие вещества, в результате чего возникают условия для развития цепной ядерной реакции.

Для описания ядерного взрыва используем известные методы моделирования ударных волн, образующихся при соударении тел [30-31]. На рис. 2 представлены данные моделирования ядерного взрыва малой мощности, возникающего при соударении двухслойной сферической оболочки, состоящей из наружного слоя природного урана и внутреннего слоя оружейного плутония с двухслойным ядром, состоящим из наружного слоя оружейного плутония и внутреннего слоя природного урана.

Предполагается, что в центральной части ядра находится источник нейтронов, который включается при его разрушении в ударной волне. Общая масса оружейного плутония составляет 6456.05 г, масса природного урана – 9362.76 г. В момент соударения координаты каждого сферического слоя равны 1.2; 3.5; 4.3; 5.8 см соответственно. Начальная скорость соударения оболочек - 2.2 км/с.

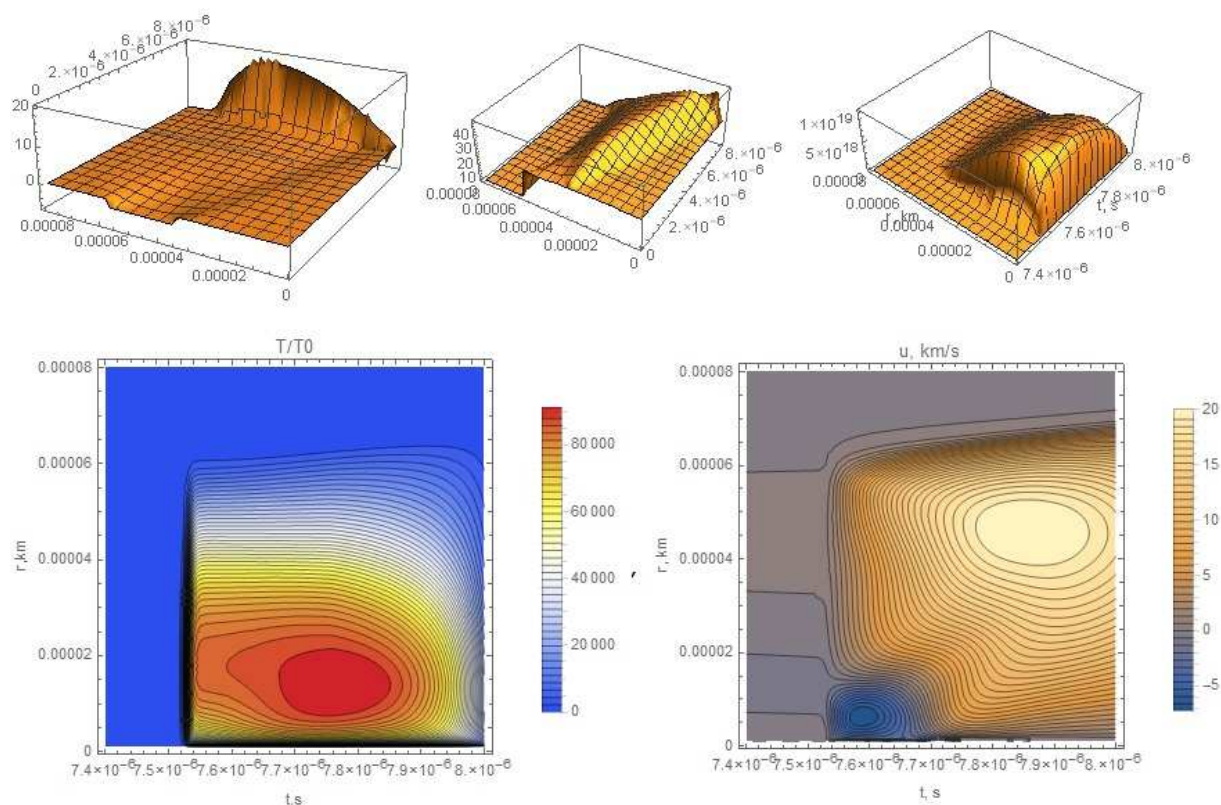


Рис.2. Модель ядерного взрыва малой мощности: верхний ряд рисунков отображает пространственно-временное распределение массовой скорости (км/с), плотности вещества (г/см^3) и плотности нейтронов соответственно; нижний ряд рисунков отображает относительную температуру и массовую скорость.

Как известно, основным источником энергии при ядерном взрыве такого типа является реакция деления ядер плутония с выделением энергии порядка 207.1 МэВ на один распад. Деление обусловлено взаимодействием атомных ядер с нейтронами, которые играют основную роль в цепной реакции. Но ядерные реакции, согласно современной научной парадигме, возникают в результате сильных взаимодействий адронов, в которые

вовлечено хромодинамическое поле. Следовательно, можно предположить, что хромодинамическое поле влияет на процесс ядерного взрыва.

Согласно уравнениям (6) всякое скалярное поле можно рассматривать как источник хромодинамического поля. Таким скалярным полем может выступать любая плотность, например, плотность вещества. Как известно, скорость размножения нейтронов пропорциональна плотности ядерного горючего, поэтому увеличивая плотность можно добиться значительного снижения критической массы. Так, в рассмотренном примере за счет двукратного увеличения локальной плотности плутония при соударении оболочки с ядром удается снизить критическую массу до 6456.05 г, тогда как при нормальных условиях критическая масса составляет 10.5 кг.

Используем тот факт, что в уравнениях (12) есть свободные параметры $\lambda_1, \lambda_2, \phi_0, \chi_0$, которые можно связать с плотностью вещества. Запишем систему уравнений (12) для случая взаимодействия двух скалярных полей [11]

$$\begin{aligned} \phi_{tt} - \nabla^2 \phi + [\chi^2 + \lambda_1(\phi^2 - \phi_0^2 \rho_m)]\phi &= 0 \\ \chi_{tt} - \nabla^2 \chi + [\phi^2 + \lambda_2(\chi^2 - \chi_0^2 \rho_m)]\chi &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь ρ_m – плотность вещества, являющегося источником поля Янга-Миллса. Без ограничения общности можно считать, что при ядерном взрыве эта плотность совпадает с плотностью сферических оболочек – природного урана, оружейного плутония и продуктов детонации. Отметим, что ядерный взрыв является только одним из примеров усилителя поля Янга-Миллса. Однако в природе есть множество других примеров – галактики, звезды, планеты и их спутники.

Рассмотрим вопрос о динамике поля Янга-Миллса в масштабах нашей планеты – рис. 3-5. Плотность источников поля изменяется в широких пределах от 0 на внешней границе атмосферы до около 12.95 г/см³ в ядре

планеты – рис. 3. Начальные данные задачи о распаде начального состояния задаются в виде (14) с параметрами $u_1 = u_2 = 1; x_1 = x_2 = r_0$.

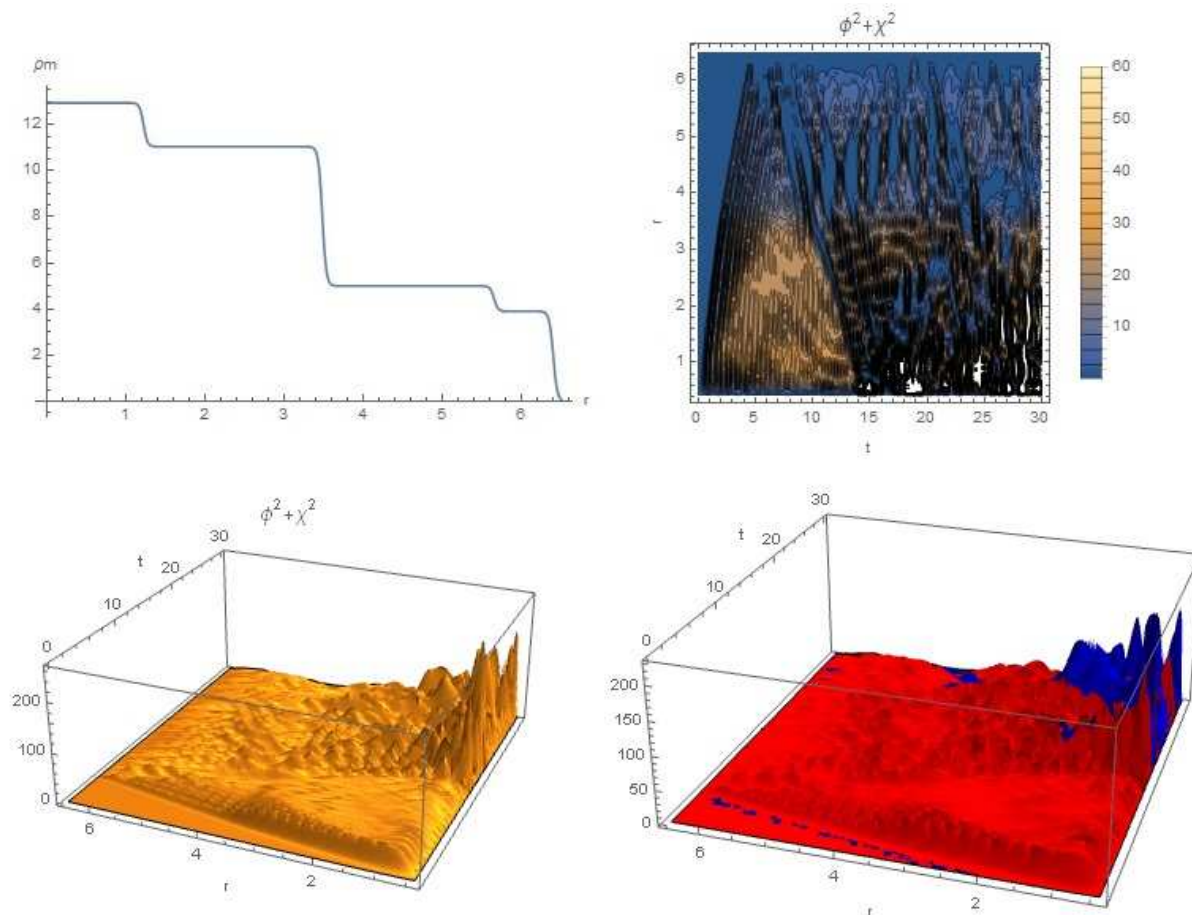


Рис. 3. Динамика нелинейных волн поля Янга-Миллса при распаде начального состояния в ядре планет ($r_0 = 410 \text{ km}$): ρ_m - профиль плотности оболочек Земли (г/см^3) в зависимости от расстояния до центра (тысяч км); $\phi^2 + \chi^2$ - сумма квадратов амплитуд скалярных полей отображает нелинейный процесс усиления поля Янга-Миллса; на нижнем правом рисунке синим и красным цветом отображается ϕ^2, χ^2 соответственно.

Распад начального состояния в ядре планеты на расстоянии $r_0=410$ км от центра приводит к возникновению системы нелинейных волн, которые

распространяются из центра к поверхности земли, отражаются от различных слоев и возвращаются к центру со значительной амплитудой – рис.3. В данном примере сумма квадратов амплитуд $\phi^2 + \chi^2$ превосходит начальное значение более чем в 200 раз. Отметим, что амплитуда подавляемого цвета (синий цвет на нижнем правом рис. 3) со временем возрастает и даже превосходит амплитуду доминирующего цвета. Это означает, что при усилении хромодинамического поля в многослойной оболочке амплитуда каждого цвета может усиливаться, не смотря на ее подавление в однородной среде.

Рассмотрим динамику 8-цветного поля Янга-Миллса в однородной и неоднородной среде соответственно - рис. 4-5.

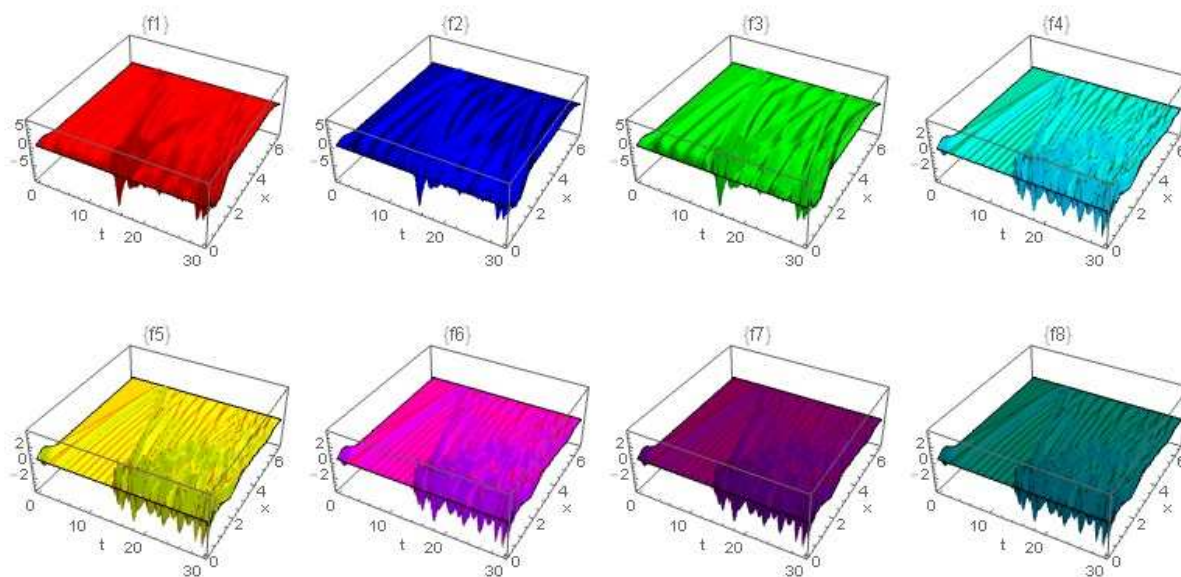


Рис. 4. Распад начального состояние 8-цветного поля Янга-Миллса в однородном сферическом слое.

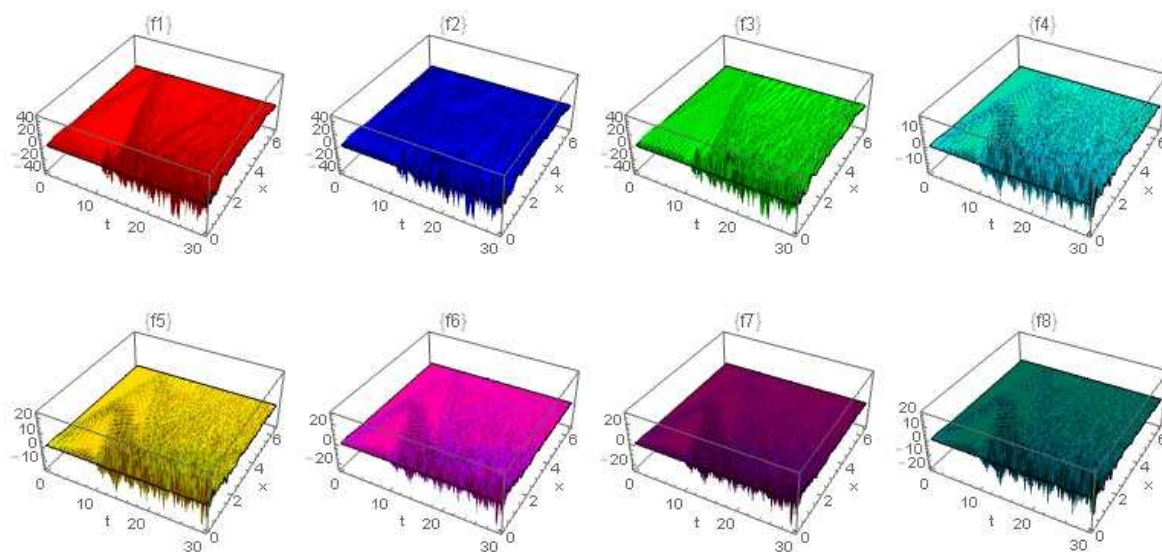


Рис. 5. Распад начального состояние 8-цветного поля Янга-Миллса в многослойной среде с плотностью ρ_m (рис. 3).

Сравнивая данные, приведенные на рис. 4 и 5, видим, что в неоднородной среде происходит значительное усиление амплитуды всех 8 цветов поля Янга-Миллса. Особенно заметно усиление при сравнении суммарной кинетической энергии – рис. 6. На нижнем левом рис. 6 нанесены амплитуды всех 8 цветов $a = 1, 2, 3; m = 4, 5, \dots, 8$. Отметим, что после распада происходит подавление пяти цветов $m = 4, 5, \dots, 8$, поэтому рисунок выглядит как преимущественно зеленый, однако после усиления поля проявляются все цвета, аналогично тому как это происходит в двухцветной комбинации – правый нижний рис. 3. Кинетическая энергия всех мод колебаний возрастает приблизительно на два порядка при усилении поля Янга-Миллса в неоднородной среде – рис. 6.

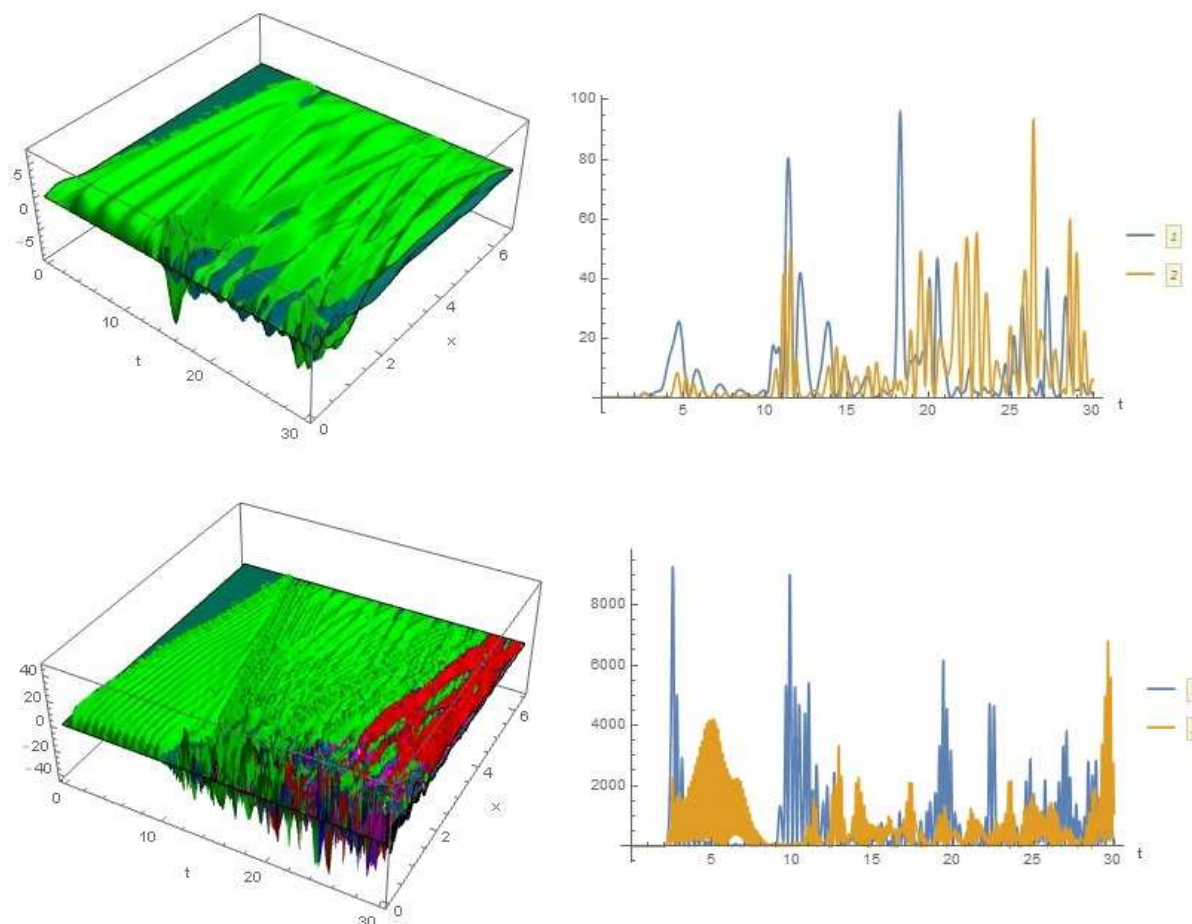


Рис. 6. Сравнение амплитуды и энергии 8-цветного поля Янга-Миллса при распаде начального состояния в однородно среде (вверху) и в неоднородной среде (внизу): 1- кинетическая энергия трех цветов $a = 1, 2, 3$, 2- кинетическая энергия пяти цветов $m = 4, 5, \dots, 8$.

Представляется интересным сравнить полученные результаты с аналогичными данными по динамике поля Янга-Миллса при ядерном взрыве – рис. 7. Отметим, что есть подобие распространения волн поля Янга-Миллса в земле и при ядерном взрыве. Однако при ядерном взрыве за счет значительного градиента плотности, возникающего при ударном сжатии плутония в описанном выше дизайне заряда – рис. 2, энергия поля Янга-

Миллса возрастает почти в миллион раз. При этом преобладает энергия первых трех цветов, которые соответствуют $SU(2)$ симметрии, связанной со слабыми взаимодействиями и распадами частиц. Отметим, что энергия поля достигает максимума за время порядка одной наносекунды, что сравнимо со временем размножения нейтронов в сфере из плутония с массой равной критической [29].

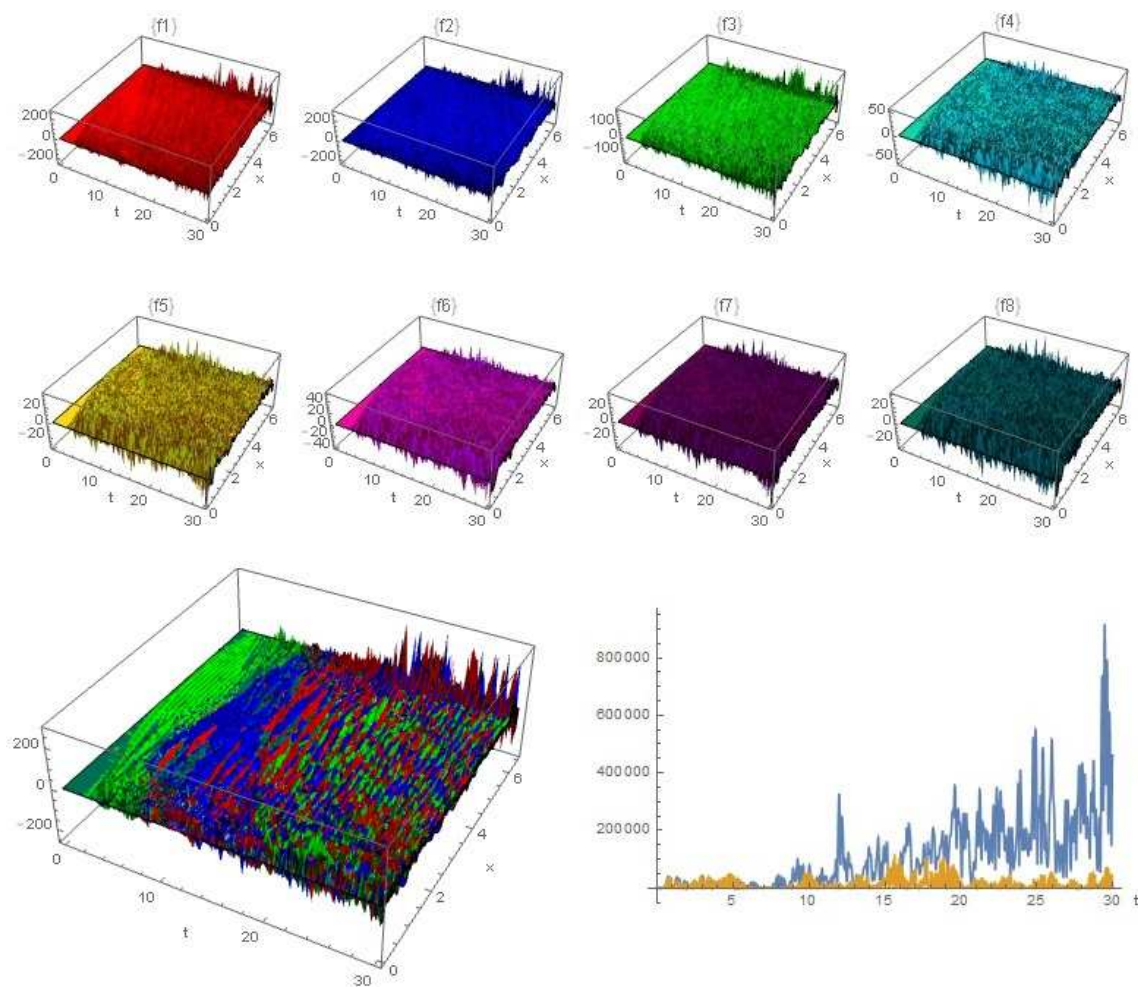


Рис. 7. Распад начального состояние 8-цветного поля Янга-Миллса в многослойной среде с плотностью ρ_m , соответствующей ударному сжатию оболочек при ядерном взрыве - рис. 2.

Наконец, рассмотрим динамику поля Янга-Миллса в техническом устройстве типа вольтова столба – рис. 8. Оригинальное устройство Вольты состоит из чередующихся слоев меди и цинка, разделенных электролитом. В данном случае используется 11 слоев меди и 11 слоев цинка.

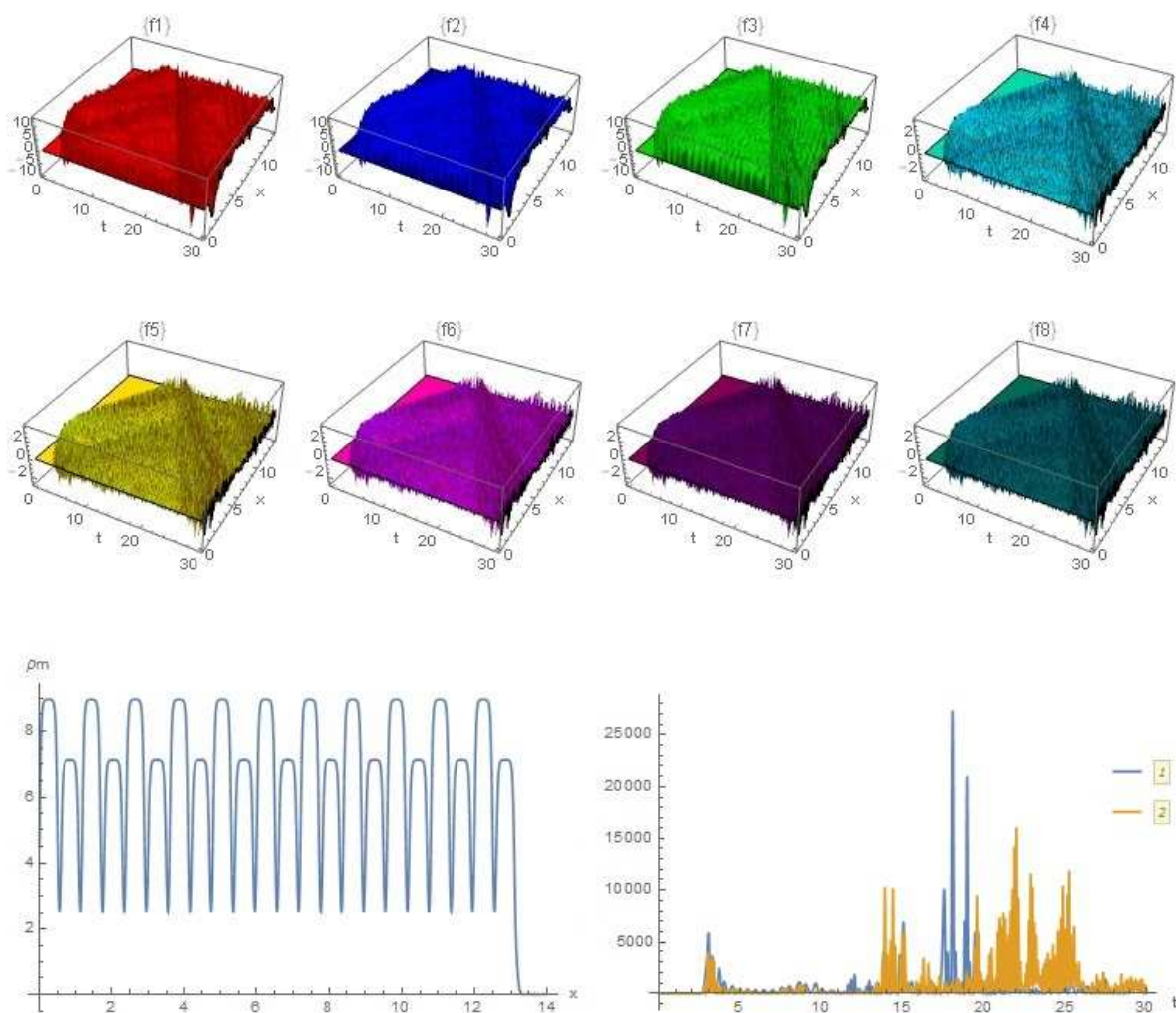


Рис. 8. Распад начального состояние 8-цветного поля Янга-Миллса в многослойной среде с плотностью ρ_m , соответствующей вольтову столбу.

Распад начального состояния в таком устройстве сопровождается большим числом отраженных волн, которые усиливают друг друга вплоть до очень большой величины плотности энергии поля Янга-Миллса. Так, в

рассмотренном примере энергия вырастает более чем в 25000 уже после первого отражения. Отметим, что в таком устройстве энергия сосредоточена в высокочастотных модах колебаний. Не исключено, что энергия поля Янга-Миллса является дополнительным источником электродвижущей силы в столбе Вольта.

Эти результаты указывают на наличие в природе механизма усиления поля Янга-Миллса в галактиках, звездах, планетах, а также в технических устройствах. Очевидно, что для усиления поля необходимо иметь его хотя бы в форме поля с малой амплитудой, типа реликтового излучения. Рассмотрим оценку вклада реликтового поля Янга-Миллса в скорость разбегания галактик.

Центрально-симметрическая метрика в теории Янга-Миллса

В работе [9] было найдено полное решение уравнений Янга-Миллса для центрально-симметрической метрики при наличии электромагнитного поля. Для наших целей представляет интерес метрика:

$$- \psi = \left(\left(K^2 \beta + \alpha - \frac{\beta}{3} \right) r^2 + (K^2 - \beta^2) r - \beta - \frac{1}{3r} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(\left(K^2 \beta + \alpha - \frac{\beta}{3} \right) r^2 + (K^2 - \beta^2) r - \beta - \frac{1}{3r} \right)} - r^2 (d\theta^2 + \sigma^2 d\varphi^2) \quad (21)$$

Здесь α, β - произвольные постоянные, $K^2 = \kappa^2 + 12(b_{12})^2 + 12(b_{34})^2$, κ - гауссова кривизна квадратичной формы $d\theta^2 + \sigma^2(\theta)d\varphi^2$,

$$\frac{d^2 \sigma}{d\theta^2} = -\kappa \sigma.$$

Отметим, что в этих обозначениях уравнения Эйнштейна имеют вид [8-9]

$$b_{ij} + b_{ji} = R_{ij} - \frac{1}{6} R \eta_{ij} \quad (22)$$

η_{ij} , R_{ij} - метрический тензор пространства Минковского сигнатуры (- + + +) и тензор Риччи соответственно, $b_{ij} + b_{ji} - 2(\eta^{ij}b_{ij})\eta_{ij} = T_{ij}$ - тензор энергии-импульса.

В нерелятивистском пределе имеем связь временной компоненты метрического тензора с гравитационным потенциалом

$$\left(K^2\beta + \alpha - \frac{\beta}{3}\right)r^2 + (K^2 - \beta^2)r - \beta - \frac{1}{3r} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \quad (23)$$

Отметим, что при $r \rightarrow \infty$ гравитационный потенциал (23) расходится как r^2 , что соответствует галактическому течению Хаббла [32]:

$$\mathbf{v} = H\mathbf{r} \quad (24)$$

Здесь H - постоянная Хаббла. Скорость течения Хаббла и гравитационный потенциал связаны соотношением

$$\phi = \phi_0 - \frac{\mathbf{v}^2}{2} = \phi_0 - \frac{H^2 r^2}{2} \quad (25)$$

Без ограничения общности положим в выражении (23) $\alpha = \beta/3$, $\beta = -1$. Сравнивая (25) и (23) находим, что

$$H \propto Kc \quad (26)$$

Для согласования размерностей надо предположить, что радиус в уравнении (23) выражается в гравитационных радиусах $r_g = 2Gm/c^2$. Тогда окончательно выражение (26) принимает вид

$$H = \frac{Kc}{r_g} \quad (27)$$

Далее заметим, что параметр $K = \sqrt{\kappa^2 + 12(b_{12})^2 + 12(b_{34})^2}$ зависит от тензора плотности энергии-импульса поля Янга-Миллса, включая плотность энергии-импульса электромагнитного поля, которая в теории [9] описывается

параметрами b_{12}, b_{34} . Следовательно, скорость разбегания галактик в метрике (21) зависит от плотности энергии поля Янга-Миллса.

Это означает, что галактики, звезды и планеты взаимодействуют с реликтовым излучением хромодинамического поля, плотность которого, видимо, сравнима с плотностью реликтового электромагнитного излучения или даже превосходит ее.

Мы, таким образом, показали, что существует механизм усиления поля Янга-Миллса в системах с большим градиентом плотности. Установлено, что при некоторых условиях усиление хромодинамического поля приводит к резкому росту амплитуды подавляемого цвета, что может приводить к росту энтропии [33-36], к возбуждению распадов частиц и ядерных реакций.

Библиографический список

1. Yang N., Mills R.L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance// Phys. Rev., 96, 191, 1954.
2. Девитт Б.С. Динамическая теория групп и полей. – Москва, Наука, 1987.
3. Bogoliubov N.N., Struminsky B.V., Tavkhelidze A.N. On composite model in the theory of elementary particles. JINR publication D-1968, Dubna, 1965.
4. Fritzsche H., Gell-Mann M., Leutwyler H. Advantages of the color octet gluon picture// Phys. Lett. B 47, 365, 1973.
5. Utiyama R. Invariant theoretical interpretation of interaction//Phys. Rev. 101, 1597, 1956.
6. Kibble T.W.B. Lorentz invariance and the gravitational field// J. Math. Phys. 2? 212? 1961.
7. Pie-Ming Ho. Generalized Yang-Mills Theory and Gravity//arXiv:1501.05378v2 [hep-th] 10 Feb 2015.
8. Кривоносов Л.Н., Лукьянов В.А. Связь уравнений Янга-Миллса с уравнениями Эйнштейна и Максвелла// Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics 2009, 2(4), 432-448.
9. Кривоносов Л.Н., Лукьянов В.А. Решение уравнений Янга-Миллса для центрально-симметрической метрики при наличии электромагнитного поля./ Пространство, время и фундаментальные взаимодействия, Вып.3, 2013.
10. Dzhunushaliev V. Scalar model of the glueball// Hadronic J. Suppl. 19, 185, 2004.
11. Dzhunushaliev V. SU(3) glueball gluon condensate//arXiv:1110.1427 [hep-ph].
12. Dzhunushaliev V. Phase transition for gluon field: a qualitative analysis// arXiv:1211.4944v1 [hep-ph]

13. Dzhunushaliev V., Makhmudov A. Scalar model of glueball in nonperturbative quantisation à la Heisenberg// arXiv:1505.07005v1 [hep-ph], 24 May, 2015.

14. Трунев А.П. Спектр масс адронов и термодинамика глюонов// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №07(091). С. 1561 – 1574.

15. Трунев А.П. Моделирование массы адронов и энергии возбужденных состояний атомных ядер в модели глюонного конденсата // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №07(81). С. 545 – 554. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2012/07/pdf/40.pdf>

16. Трунев А.П. О возбуждении электромагнитного излучения, ядерных реакций и распада частиц ускорением// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2015. – №109(05). – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2015/05/pdf/90.pdf>

17. Трунев А.П. Моделирование нелинейных цветовых колебаний в теории Янга-Миллса / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2015. – №06(110). С. 1654 – 1673. – IDA [article ID]: 1101506108. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2015/06/pdf/108.pdf>

18. Трунев А.П. Геометрическая турбулентность и квантовая теория. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 с.

19. Matinyan S.G., Savvidy G.K. and Ter-Arutyunyan-Savvidy N. G. Classical Yang-Mills mechanics. Nonlinear color oscillations// Sov. Phys. JETP, 80, 830-838, 1981; JETP Lett. 34, 590, 1981.

20. Matinyan S.G., E.B. Prokhorenko and G.K. Savvidy. Non-integrability of time-dependent spherically symmetric Yang-Mills equations//Nucl. Phys. B 298, 414, 1988.

21. Biro T.S., Matinyan S.G. and Muller B. Chaos and Gauge Field Theory/World Sci. Lect. Notes Phys. 56, 1, Singapore, 1994.

22. Matinyan S, Muller B. Quantum Fluctuations and Dynamical Chaos: An Effective Potential Approach// October 31, 1996, <http://cds.cern.ch/record/313828/files/9610233.pdf>

23. Matinyan S. Chaos in the Yang-Mills theory and cosmology: quantum aspects// arXiv:hep-th/0612102v1, 11 Dec 2006.

24. Berera A., Buniy R.V., Kephart T.W., Pas H., Rosa J.G. Knotty inflation and the dimensionality of spacetime// arXiv:1508.01458v1 [hep-ph] 6 Aug 2015.

25. Трунев А.П. Уравнения Максвелла и Янга-Миллса в метрике ускоренных и вращающихся систем отсчета в общей теории относительности// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2015. – №108(04).

26. Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Symmetry and Exact Solutions of the Maxwell and $SU(2)$ Yang-Mills Equations//arXiv:hep-th/0405286v1, 31 May 2004.

27. Briseno R.A., Davoudi Z., Luu T.C. Nuclear Reactions from Lattice QCD//arXiv:1406.5673v2 [hep-lat] 25 Nov 2014.

28. Hansen C. Swords of Armageddon: U.S. Nuclear Weapon Development since 1945. – Sunnyvale, California, Chucklea Publications, 1995, 2007.

29. Carey Sublette. Nuclear Weapons Frequently Asked Questions. Version 2.04, 20 Feb 1999.
30. Kiselev, S.P., Ruev, G.A., Trunev, A.P., Fomin, V.M. & Schavaliev, M.S. Shook-wave phenomena in two-component and two-phase flows. - Nauka, Novosibirsk, 261 p., 1992 (in Russian).
31. Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортон В.Е. Ударно-волновые явления в конденсированных средах. – М., «Янус-К», 1996. – 408 с.
32. Трунев А.П. Метрика местного суперкластера галактик и общая теория относительности// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №10(094). С. 893 – 916. – IDA [article ID]: 0941310061. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/61.pdf>
33. Barrow J.D., Levin J. Chaos in the Einstein-Yang-Mills Equations//arXiv:gr-gc/9706065, 20 Jun 1997.
34. Hideaki Iida, Teiji Kunihiro, Akira Ohnishi, Toru T. Takahashi. Time evolution of gluon coherent state and its von Neumann entropy in heavy-ion collisions// arXiv:1410.7309v1, 27 Oct 2014.
35. Baier R., Mueller A.H., Schiff D., Son D.T. Bottom-up thermalisation in heavy ion collisions//Phys. Lett. B 502, 51, 2001, arXiv: hep-ph/0009237.
36. Biro T. S., Gong C. and Muller B. Lyapunov Exponent and Plasmon Damping Rate in Nonabelian Gauge Theories//Phys. Rev. D 52, 1260 (1995) [arXiv:hep-ph/9409392].

References

1. Yang N., Mills R.L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance// Phys. Rev., 96, 191, 1954.
2. Devitt B.S. Dinamicheskaja teorija grupp i polej. – Moskva, Nauka, 1987.
3. Bogoliubov N.N., Struminsky B.V., Tavkhelidze A.N. On composite model in the theory of elementary particles. JINR publication D-1968, Dubna, 1965.
4. Fritzsche H., Gell-Mann M., Leutwyler H. Advantages of the color octet gluon picture// Phys. Lett. B 47, 365, 1973.
5. Utiyama R. Invariant theoretical interpretation of interaction//Phys. Rev. 101, 1597, 1956.
6. Kibble T.W.B. Lorentz invariance and the gravitational field// J. Math. Phys. 2? 212? 1961.
7. Pie-Ming Ho. Generalized Yang-Mills Theory and Gravity//arXiv:1501.05378v2 [hep-th] 10 Feb 2015.
8. Krivososov L.N., Luk'janov V.A. Svjaz' uravnenij Janga-Millsa s uravnenijami Jejnshtejna i Maksvella// Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics 2009, 2(4), 432-448.
9. Krivososov L.N., Luk'janov V.A. Reshenie uravnenij Janga-Millsa dlja central'no-simmetricheskoj metriki pri nalichii jelektromagnitnogo polja./ Prostranstvo, vremja i fundamental'nye vzaimodejstvija, Vyp.3, 2013.
10. Dzhunushaliev V. Scalar model of the glueball// Hadronic J. Suppl. 19, 185, 2004.
11. Dzhunushaliev V. SU(3) glueball gluon condensate//arXiv:1110.1427 [hep-ph].
12. Dzhunushaliev V. Phase transition for gluon field: a qualitative analysis// arXiv:1211.4944v1 [hep-ph]

13. Dzhunushaliev V., Makhmudov A. Scalar model of glueball in nonperturbative quantisation `a la Heisenberg// arXiv:1505.07005v1 [hep-ph], 24 May, 2015.

14. Trunев A.P. Spektr mass adronov i termodinamika gljuonov// Politematicheskij setevoy jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №07(091). S. 1561 – 1574.

15. Trunев A.P. Modelirovanie massy adronov i jenergii vzbuzhdennyh sostojanij atomnyh jader v modeli gljuonnogo kondensata // Politematicheskij setevoy jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2012. – №07(81). S. 545 – 554. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2012/07/pdf/40.pdf>

16. Trunев A.P. O vzbuzhdenii jelektromagnitnogo izluchenija, jadernyh reakcij i raspada chastic uskoreniem// Politematicheskij setevoy jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2015. – №109(05). – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2015/05/pdf/90.pdf>

17. Trunев A.P. Modelirovanie nelinejnyh cvetovyh kolebanij v teorii Janga-Millsa / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoy jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2015. – №06(110). S. 1654 – 1673. – IDA [article ID]: 1101506108. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2015/06/pdf/108.pdf>

18. Trunев A.P. Geometricheskaja turbulentsnost' i kvantovaja teorija. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 s.

19. Matinyan S.G., Savvidy G.K. and Ter-Arutyunyan-Savvidy N. G. Classical Yang-Mills mechanics. Nonlinear color oscillations// Sov. Phys. JETP, 80, 830-838, 1981; JETP Lett. 34, 590, 1981.

20. Matinyan S.G., E.B. Prokhorenko and G.K. Savvidy. Non-integrability of time-dependent spherically symmetric Yang-Mills equations//Nucl. Phys. B 298, 414, 1988.

21. Biro T.S., Matinyan S.G. and Muller B. Chaos and Gauge Field Theory/World Sci. Lect. Notes Phys. 56, 1, Singapore, 1994.

22. Matinyan S, Muller B. Quantum Fluctuations and Dynamical Chaos: An Effective Potential Approach// October 31, 1996, <http://cds.cern.ch/record/313828/files/9610233.pdf>

23. Matinyan S. Chaos in the Yang-Mills theory and cosmology: quantum aspects// arXiv:hep-th/0612102v1, 11 Dec 2006.

24. Berera A., Buniy R.V., Kephart T.W., Pas H., Rosa J.G. Knotty inflation and the dimensionality of spacetime// arXiv:1508.01458v1 [hep-ph] 6 Aug 2015.

25. Trunев A.P. Uravnenija Maksvella i Janga-Millsa v metrike uskorenyh i vrashhajushhihsja sistem otscheta v obshhej teorii odnositel'nosti// Politematicheskij setevoy jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2015. – №108(04).

26. Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Symmetry and Exact Solutions of the Maxwell and SU(2) Yang-Mills Equations//arXiv:hep-th/0405286v1, 31 May 2004.

27. Briseno R.A., Davoudi Z., Luu T.C. Nuclear Reactions from Lattice QCD//arXiv:1406.5673v2 [hep-lat] 25 Nov 2014.

28. Hansen C. Swords of Armageddon: U.S. Nuclear Weapon Development since 1945. – Sunnyvale, California, Chucklea Publications, 1995, 2007.

29. Carey Sublette. Nuclear Weapons Frequently Asked Questions. Version 2.04, 20 Feb 1999.
30. Kiselev, S.P., Ruev, G.A., Trunev, A.P., Fomin, V.M. & Schavaliev, M.S. Shook-wave phenomena in two-component and two-phase flows. - Nauka, Novosibirsk, 261 p., 1992 (in Russian).
31. Kanel' G.I., Razorenov S.V., Utkin A.V., Fortov V.E. Udarno-volnovye javlenija v kondensirovannyh sredah. – M., «Janus-K», 1996. – 408 s.
32. Trunev A.P. Metrika mestnogo superklastera galaktik i obshhaja teorija odnositel'nosti// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №10(094). S. 893 – 916. – IDA [article ID]: 0941310061. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/61.pdf>
33. Barrow J.D., Levin J. Chaos in the Einstein-Yang-Mills Equations//arXiv:gr-gc/9706065, 20 Jun 1997.
34. Hideaki Iida, Teiji Kunihiro, Akira Ohnishi, Toru T. Takahashi. Time evolution of gluon coherent state and its von Neumann entropy in heavy-ion collisions// arXiv:1410.7309v1, 27 Oct 2014.
35. Baier R., Mueller A.H., Schiff D., Son D.T. Bottom-up thermalisation in heavy ion collisions//Phys. Lett. B 502, 51, 2001, arXiv: hep-ph/0009237.
36. Biro T. S., Gong C. and Muller B. Lyapunov Exponent and Plasmon Damping Rate in Nonabelian Gauge Theories//Phys. Rev. D 52, 1260 (1995) [arXiv:hep-ph/9409392].