

УДК 539.3

UDC 539.3

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and mathematical sciences

О ХРУПКОМ РАЗРУШЕНИИ ТВЁРДЫХ ТЕЛ ПРИ ОБРАЗОВАНИИ «УЗКОГО» ИЗОЛИРОВАННОГО ДЕФЕКТА**ABOUT FRAGILE FRACTURE OF SOLIDS IN THE FORMATION OF A "NARROW" ISOLATED DEFECT**

Дунаев Владислав Игоревич
д-р физ.-мат. наук, профессор

Dunaev Vladislav Igorevich
Dr.Sci.Phys. and Math., professor

Георгияди Владимир Георгиевич
аспирант

Georgiyadi Vladimir Georgievich
postgraduate student

Попов Валерий Васильевич
канд. тех. наук, доцент

Popov Valeriy Vasilevich
Cand.Tech.Sci., associate professor

Тугуз Тимур Казбекович
ассистент

Tuguz Timur Kazbekovich
assistant

Кубанский государственный технологический университет, Краснодар, Россия

Kuban State University of Technology, Krasnodar, Russia

В работе получен макроскопический критерий хрупкого разрушения (предельная кривая) при образовании изолированного дефекта в форме «узкой» выточки, когда конформное отображение внешности единичного круга на плоскость с дефектом в форме выточки задаётся отрезком степенного ряда. Показано, что в этом случае предельная кривая имеет вид, идентичный случаю, когда дефект задаётся «узким» эллипсом. При этом трещина так же ориентирована либо вдоль сжимающего напряжения, либо перпендикулярно растягивающему напряжению. Отсюда можно полагать, что форма и геометрические свойства достаточно «узкого» дефекта не влияют на величины критических нагрузок, необходимых для начала его распространения

We obtain a macroscopic criterion of fragile fracture (limit curve) when creating an isolated defect in the form of "narrow" undercut, when conformal mapping of the exterior of a unit circle on the plane with defect in the form of a recess defined by cut fiber-foam series. It is shown that in this case, the limit curve has the form identical to the case when the defect is set to "narrow" ellipse. The same crack oriented along either the compressive stress or tensile perpendicular stress. From here, we can suggest that the shape and geometric properties of a sufficiently "narrow" defect do not affect the values of the critical loads required to start its distribution

Ключевые слова: ХРУПКОЕ РАЗРУШЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ, РАЗВИТИЕ ИЗОЛИРОВАННЫХ ДЕФЕКТОВ

Keywords : BRITTLE FRACTURE MATERIALS, DEVELOPMENT OF ISOLATED DEFECTS

Введение.

В работе [1] рассматривается задача о хрупком разрушении пластины под действием главных напряжений P_1 и P_2 при образовании в ней изолированного дефекта в форме «узкой» выточки с полуосями a , $b(a)$, $b \ll a$. При этом конформное отображение внешности единичного круга на плоскость с дефектом в форме выточки определяется дробно-рациональной функцией. Макроскопический критерий хрупкого разрушения (предельная кривая), а так же ориентация такой формы изолированно-

го дефекта идентичны случаю, рассмотренному в работах [2-3], где в качестве модели дефекта принимается «узкий» эллипс.

В настоящей работе получена предельная кривая при образовании дефекта в форме выточки, когда конформное отображение внешности единичного круга на плоскость с дефектом в форме выточки задаётся отрезком степенного ряда. В этом случае задача о вычислении высвобождающейся внутренней энергии, входящей в условие хрупкого разрушения [2-3] эффективно решается, следуя подходу, изложенному в работе [4]. При этом вычисление высвобождающейся внутренней энергии приводит к более простым выкладкам, чем в случае [1], а предельная кривая имеет вид, идентичный [1-3] и аналогично определяется ориентация трещины. Отсюда можно полагать, что форма и геометрические свойства «достаточно узкого» изолированного дефекта не влияют (в рамках предложенной модели) на величины критических нагрузок, необходимых для его развития.

1. Постановка задачи.

Пусть тело, занимающее односвязную область до образования в нём изолированного дефекта, находится в однородном напряжённо-деформированном состоянии под действием главных напряжений P_1 и P_2 . Будем считать, что при образовании дефекта тело деформируется теми же напряжениями, приложенными вдали от дефекта (теоретически на бесконечности).

Рассмотрим плоскость D , ослабленную криволинейным отверстием с контуром Σ , когда на бесконечности действуют во взаимноперпендикулярных направлениях напряжения P_1 и P_2 , и напряжение P_1 составляет с осью ox угол α . При этом на контуре дефекта Σ внешние напряжения равны нулю. В плоских задачах теории упругости компоненты тензора

напряжений и вектора перемещений определяются двумя функциями $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ комплексного переменного z и их производными [5]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \varphi'(z)] \\ 2\mu(u_1 + iu_2) &= \chi\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \psi(z) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $2\mu = E/(1-\nu)$, $\chi = 3 - 4\nu$ для плоской деформации и $\chi = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для плоского напряжённого состояния, E - модуль упругости, ν - коэффициент Пуассона.

Задача об определении напряжённо-деформированного состояния плоскости D сводится [5] к нахождению функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ (комплексных потенциалов) удовлетворяющих условиям

$$\varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} = 0, z \in \Sigma \quad (1.2)$$

или в сопряжённой форме

$$\overline{\varphi_1(z)} + \bar{z}\varphi_1'(z) + \psi_1(z), z \in \Sigma \quad (1.3)$$

и функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ имеют вид [3]:

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \Gamma z + \varphi^0(z) \\ \psi_1(z) &= \Gamma' z + \psi^0(z) \end{aligned} \quad (1.4)$$

здесь $\Gamma = \frac{1}{4}(P_1 + P_2)$, $\Gamma' = -\frac{1}{2}(P_1 - P_2)e^{-2i\alpha}$, $\varphi^0(z)$, $\psi^0(z)$ - голоморфные в области D функции, включая и бесконечно удалённую точку.

2. Вычисление комплексных потенциалов.

Рассмотрим случай когда конформное отображение является отрезком степенного ряда. Тогда

$$\omega(\xi) = R \left[\xi + \sum_{l=1}^N c_l \xi^{1-l} \right] \quad (2.1)$$

Здесь R -параметр, независящий от переменной ξ .

Если на контуре Σ имеются угловые точки возврата, в решении возникает особенность, которую можно целиком отнести к функции $\psi(\xi)$ [6-7]. (Функция $\psi(\xi)$ имеет соответствующие угловым точкам контура Σ полюса 1-го порядка в точках единичной окружности $|\xi|=1$). Поскольку функция $\omega(\xi)$ определена выражением (1.5), комплексные потенциалы $\varphi_1(\xi)$ и $\psi_1(\xi)$, задаваемые равенством (1.4) можно представить в виде [6-7]:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= R\Gamma\xi + \sum_{l=1}^N a_l \xi^{1-l} \\ \psi_1(\xi) &= R\Gamma'\xi + \sum_{l=1}^{\infty} b_l \xi^{1-l} \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= R\Gamma\xi + \varphi^0(\xi) \\ \psi_1(\xi) &= R\Gamma'\xi + \psi^0(\xi) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Из граничного условия (2.2) следует равенство

$$\psi_1(\sigma)\omega'(\sigma) = -\overline{\varphi_1(\sigma)}\omega'(\sigma) - \overline{\omega(\sigma)}\varphi_1'(\sigma) \tag{2.4}$$

Подставляя в равенство (2.4) выражение (2.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых положительных степенях σ в обеих частях равенства, с учётом условия $\psi_1^0(\infty)=0$ ($b_1=0$) [5], получаем систему линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов a_l , определяющих функцию $\varphi_1(\xi)$

$$\bar{a}_p + \sum_{l=1}^{N-p} (1-l)c_l \bar{a}_{l+p} + \sum_{l=1}^{N-p} (1-l)\bar{c}_{l+p} a_l + R\Gamma\bar{c}_p = D_p \tag{2.5}$$

Здесь $D_p = \begin{cases} 0, & p \neq 2 \\ -R\Gamma' & p = 2 \end{cases} \quad p = 1, \dots, N$

Функцию $\psi_1(\xi)$ можно найти и не прибегая к сравнению коэффициентов перед одинаковыми степенями σ (см., например, [7]).

Умножая обе части равенства (2.5) на $\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\sigma - \xi}$, где ξ точка вне единичной окружности ω и интегрируя это соотношение по ω получаем:

$$\omega'(\xi)\psi_1(\xi) = -\varphi_1\left(\frac{1}{\xi}\right)\omega'(\xi) - \omega\left(\frac{1}{\xi}\right)\varphi_1'(\xi)$$

откуда

$$\psi_1(\xi) = -\varphi_1\left(\frac{1}{\xi}\right) - \frac{\omega(\xi)}{\omega'(\xi)}\varphi_1'(\xi)$$

3. Вычисление интегралов внутренней энергии.

Покажем, что полученное решение может быть использовано для эффективного вычисления интегралов внутренней энергии

$$W = U - \gamma\Sigma = \frac{1}{2} \oint_{\Sigma} \sigma_{ij}^{(0)} u_i^{(1)} n_j ds + \alpha_0 T_0 k_1 \oint_{\Sigma} u_i^{(1)} \delta_{ij} n_j ds - \gamma\Sigma, \quad i, j, = 1, 2 \quad (3.1)$$

Входящих в энергетическое условие хрупкого разрушения [1-3]

$$\frac{dW}{da} = 0 \quad (3.2)$$

В выражении (3.1) $W = U - \gamma\Sigma$ - полная энергия тела при образовании в нём новой поверхности Σ (и площади Σ), $U = U^{(0)} - U^{(1)}$ - высвобождающаяся внутренняя энергия, $U^{(0)}$ и $U^{(1)}$ - внутренняя энергия тела без дефекта и с дефектом соответственно, $\gamma\Sigma$ - внутренняя энергия, затраченная на образование новой поверхности дефекта Σ , $\sigma_{ij}^{(0)}$ - компоненты тензора напряжений в пластине без дефекта, n_j - компоненты вектора внешней нормали к области, ограниченной контуром Σ , $u_i^{(1)}$ - компоненты вектора напряжения в пластине с дефектом, α_0 - линейный коэффициент теплового расширения, T_0 - абсолютная температура, δ_{ij} - символ Кронекера,

$k_1 = E/(1-\nu)$ - для плоского напряжённого состояния, $k_1 = E/(1-2\nu)$ -для плоской деформации, E - модуль упругости, ν - коэффициент Пуассона.

Первое слагаемое в выражении (3.1) представляет потенциальную составляющую, а второе энтропийную составляющую высвобождающейся внутренней энергии.

Используя равенства (1.1) и граничное условие (1.2), (1.3) комплексное представление интегралов (3.1) имеет вид [1-3]

$$U = -\frac{\chi+1}{4\mu} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{i} \oint_{\Sigma} (\varphi_1(z) [\bar{z} \varphi_0''(z) + \psi_0'(z)] - \overline{\varphi_1(z)} [\varphi_0'(z) + \overline{\varphi_0'(z)}]) dz \right\} - \frac{\alpha_0 T_0 k_1 (\chi+1)}{2\mu} \operatorname{Re} \left\{ i \oint_{\Sigma} \overline{\varphi_1(z)} dz \right\} \quad (3.3)$$

С учётом функций $\varphi_0(z) = \Gamma z$, $\psi_0(z) = \Gamma' z$, определяющих однородное напряжённо-деформированное состояние пластинки без дефекта, из выражения (3.3) получим

$$U = -\frac{\chi+1}{4\mu} \operatorname{Re} \left\{ i \oint_{\Sigma} (2\Gamma \overline{\varphi_1(z)} - \Gamma' \varphi_1(z)) dz \right\} - \frac{\alpha_0 T_0 k_1 (\chi+1)}{2\mu} \operatorname{Re} \left\{ i \oint_{\Sigma} \overline{\varphi_1(z)} dz \right\} \quad (3.4)$$

Заметим, что для вычисления высвобождающейся внутренней энергии U по формуле (3.4) достаточно определить функцию $\varphi_1(z)$ из решения задачи о бесконечной плоскости, ослабленной отверстием, когда на бесконечности заданы напряжения P_1 и P_2 , а контур отверстия свободен от внешних напряжений.

Пусть функция $z = \omega(\xi)$ - конформное отображает внешность единичного круга Ω на внешность контура Σ . Переходя в интегралах (3.4) к новой переменной, получаем:

$$U = -\frac{\chi+1}{4\mu} \operatorname{Re} \left\{ i \oint_{\Omega} (2\Gamma \overline{\varphi_1(\sigma)} - \Gamma' \varphi_1(\sigma)) \omega'(\sigma) d\sigma \right\} - \frac{\alpha_0 T_0 k_1 (\chi+1)}{2\mu} \operatorname{Re} \left\{ i \oint_{\Omega} \overline{\varphi_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma \right\} \quad (3.5)$$

Здесь $\sigma = e^{i\Theta}$, $0 \leq \Theta \leq 2\pi$ - производная точка единичной окружности Ω . Если отображение $z = \omega(\xi)$ задаётся отрезком степенного ряда (2.1) то с учётом выражения (2.4) имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\sigma) &= R\Gamma\sigma + \sum_{l=1}^N a_l \sigma^{1-l} \\ \overline{\varphi_1(\sigma)} &= R\Gamma \frac{1}{\sigma} + \sum_{l=1}^N \bar{a}_l \sigma^{l-1} \\ \omega'(\sigma) &= R \left[1 - \sum_{l=1}^{N-1} l c_{l+1} \sigma^{-(l+1)} \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из выражений (3.6) следует, что подынтегральные функции в интегралах (3.5) регулярны в области $|\sigma| \leq 1$, как функции комплексной переменной σ , за исключением полюса в точке $\sigma = 0$. Поэтому интегралы (3.5) могут быть вычислены при помощи вычетов. Подставляя равенства (3.6) в выражение (3.5) и, вычисляя интегралы внутренней энергии, получаем:

$$U = -\frac{(\chi+1)\pi}{2\mu} \operatorname{Re} \left\{ \Gamma'R(a_2 - R\Gamma c_2) - 2\Gamma R \left(R\Gamma - \sum_{l=1}^{N-1} l \bar{a}_{l+1} c_{l+1} \right) \right\} - \frac{\alpha_0 T_0 k_1 (\chi+1)\pi}{\mu} \operatorname{Re} \left\{ R \left(\sum_{l=1}^{N-1} l \bar{a}_{l+1} c_{l+1} - R\Gamma \right) \right\} \quad (3.7)$$

Коэффициенты a_l , определяющие функцию $\varphi_1(\sigma)$, входящие в выражение для внутренней энергии (3.7) находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений (2.6).

Пусть параметрическое уравнение контура Σ имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= R \left[(2-t)\cos\theta + \frac{t}{3}\cos 3\theta \right] \\ y &= R \left[t\sin\theta - \frac{t}{3}\sin 3\theta \right] \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $0 \leq \theta \leq 2\pi$; $t = \frac{3\varepsilon}{2+\varepsilon}$; $R = \frac{a}{4}(2+\varepsilon)$; $\varepsilon = \frac{b}{a}$;

a, b – характерные размеры дефекта.

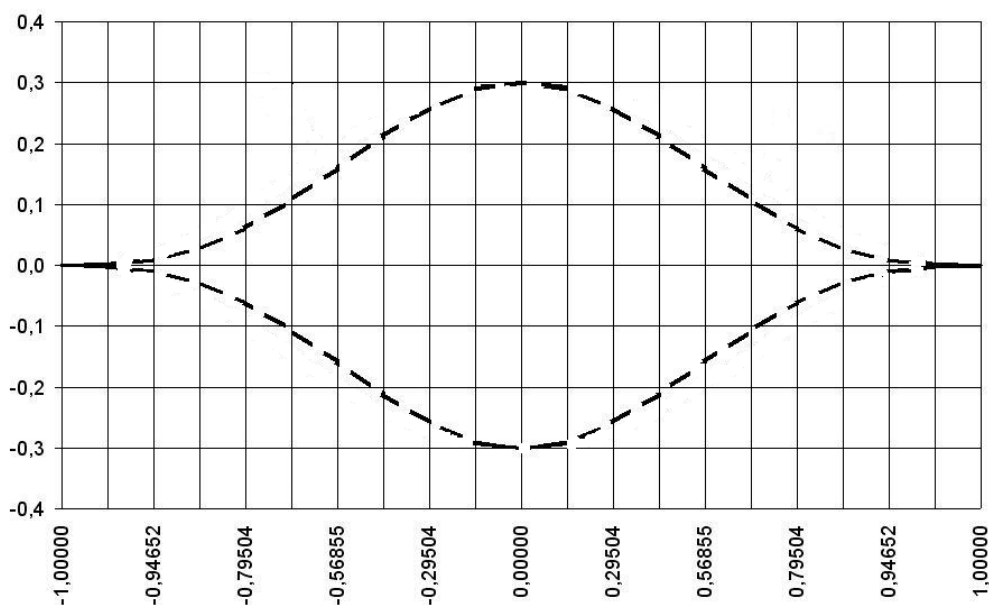


Рис.1

Функция, конформно отображающая внешность единичной окружности на внешность контура (3.8) имеет вид:

$$\omega = R \left[\xi + (1-t)\frac{1}{\xi} + \frac{t}{3}\frac{1}{\xi^3} \right] \tag{3.9}$$

Поскольку выражение (3.9) является отрезком степенного ряда, коэффициенты a_l для функции

$$\varphi_1(\xi) = R\Gamma\xi + \sum_{l=1}^N a_l \xi^{1-l}$$

находятся из решения системы (2.5). С учётом выражения (3.9)

$$c_1 = 0, c_2 = 1 - t, c_3 = 0, c_4 = \frac{t}{3} \quad (3.10)$$

Решая систему (2.5) находим

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= -\frac{R}{9-t^2} [3t\Gamma' + 9\overline{\Gamma'} + (1-t)(3+t)^2 \Gamma] \\ a_3 &= 0 \\ a_4 &= -\frac{Rt}{3} \Gamma \end{aligned} \quad (3.11)$$

Подставляя выражения (3.10), (3.11) в формулу (3.7) получим:

$$\begin{aligned} U &= U(a, \varepsilon(a), \alpha(a)) = \\ &= \frac{(\chi+1)\pi}{512\mu} \frac{a^2}{1+\varepsilon} \left\{ P_1^2 [2(2+\varepsilon)^4 - 2\varepsilon(2+\varepsilon)^3 + 6\varepsilon^3(2+\varepsilon) + 3\varepsilon^4 - \right. \\ &\quad \left. - 8(1-\varepsilon^2)(2+\varepsilon)^2 \cos 2\alpha + \varepsilon(2+\varepsilon)^4 \cos 4\alpha] - \right. \\ &\quad \left. - 2P_1P_2 [2\varepsilon(2+\varepsilon)^3 - 6\varepsilon^3(2+\varepsilon) - 3\varepsilon^4 + \varepsilon(2+\varepsilon)^3 \cos 4\alpha] \right. \\ &\quad \left. + P_2^2 [2(2+\varepsilon)^4 - 2\varepsilon(2+\varepsilon)^3 + 6\varepsilon^3(2+\varepsilon) + 3\varepsilon^4 + \right. \\ &\quad \left. + 8(1-\varepsilon^2)(2+\varepsilon)^2 \cos 2\alpha + \varepsilon(2+\varepsilon)^4 \cos 4\alpha] \right\} + \\ &\quad + \frac{\alpha_0 T_0 k_1 (\chi+1)\pi}{128\mu} \frac{a^2}{1+\varepsilon} \left\{ P_1 [(2+\varepsilon)^4 - 2\varepsilon(2+\varepsilon)^3 + 7\varepsilon^3(2+\varepsilon) + \right. \\ &\quad \left. + 3\varepsilon^4 - 4(1-\varepsilon^2)(2+\varepsilon)^2 \cos 2\alpha] + \right. \\ &\quad \left. + P_2 [(2+\varepsilon)^4 - 2\varepsilon(2+\varepsilon)^3 + 7\varepsilon^3(2+\varepsilon) + 3\varepsilon^4 + 4(1-\varepsilon^2)(2+\varepsilon)^2 \cos 2\alpha] \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Пологая в равенстве (3.12) $\varepsilon = 1$, получаем выражение (3.7) для высвобождающейся внутренней энергии при образовании изолированного внутреннего дефекта в виде математического разреза [1-3].

Очевидно, что в этом случае высвобождающаяся внутренняя энергия вычисляется значительно проще, чем в случае [1], и выражение (3.12) по сравнению с аналогичным выражением [1] имеет более простой вид.

4. Макроскопический критерий хрупкого разрушения при образовании изолированного дефекта в виде выточки.

Состояние тела, при котором распространение дефекта (трещины) возможно, называется предельным состоянием равновесия, а условие наступления такого предельного состояния называют макроскопическим критерием разрушения. В случае однократного статического нагружения это энергетическое условие (3.2). При дополнительных предположениях о форме и расположении дефекта из условия (3.2) следует макроскопический критерий хрупкого разрушения в виде:

$$F(P_1, P_2, E, \nu, T_0, \alpha_0, a_*) = 0 \quad (4.1)$$

который представляет предельную кривую в пространстве главных напряжений P_1 и P_2 , определяющую все те комбинации пределов прочности, при которых возможно распространение дефекта с характеризующим его размером a_* .

Дифференцируя выражения (3.12) по a в соответствии с условием (3.2) при $\varepsilon^2 \ll 1$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{da} = & \frac{(\chi+1)\pi}{64\mu} a \left\{ P_1^2 \left[\frac{2((4-9\varepsilon)+b'(1+3\varepsilon))}{1+2\varepsilon} + \frac{\varepsilon+b'(1+3\varepsilon)}{1+2\varepsilon} \cos 4\alpha - \right. \right. \\ & \left. \left. - 4a \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon} \alpha' \sin 4\alpha - 2((4-3b'\varepsilon)\cos 2\alpha - 4a\alpha' \sin 2\alpha) \right] - \right. \\ & - 2P_1P_2 \left[\frac{2(\varepsilon+b'(1+3\varepsilon))}{1+2\varepsilon} + \frac{\varepsilon+b'(1+3\varepsilon)}{1+2\varepsilon} \cos 4\alpha - 4a \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon} \alpha' \sin 4\alpha \right] + \\ & + P_2^2 \left[\frac{2((4-9\varepsilon)+b'(1+3\varepsilon))}{1+2\varepsilon} + \frac{\varepsilon+b'(1+3\varepsilon)}{1+2\varepsilon} \cos 4\alpha - \right. \\ & \left. \left. - 4a \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon} \alpha' \sin 4\alpha + 2((4-3b'\varepsilon)\cos 2\alpha - 4a\alpha' \sin 2\alpha) \right] \right\} + \quad (4.2) \end{aligned}$$

$$+ \frac{\alpha_0 T_0 k_1 (\chi + 1) \pi}{16\mu} a \{ P_1 [4 - (4 - 3b'\varepsilon) \cos 2\alpha + 4a\alpha' \sin 2\alpha] + P_2 [4 - (4 - 3b'\varepsilon) \cos 2\alpha + 4a\alpha' \sin 2\alpha] \} - \frac{d}{da} (\gamma(a) \Sigma(a)) = 0$$

В силу изотропии [1-3] необходимо потребовать выполнение условия

$$\alpha' a \sin 2\alpha = \left(1 - \frac{3}{4} \varepsilon b' \right) \cos 2\alpha \tag{4.3}$$

С учётом равенства (4.3) после преобразований запишем условие (4.2) в виде:

$$P_1^2 + P_2^2 - 2 \frac{2(\varepsilon + b'(1 + 3\varepsilon)) + (\varepsilon + b'(1 + 3\varepsilon)) \cos 4\alpha - 4a\varepsilon \sin 4\alpha\alpha'}{2((4 - 9\varepsilon) + b'(1 + 3\varepsilon)) + (\varepsilon + b'(1 + 3\varepsilon)) \cos 4\alpha - 4a\varepsilon \sin 4\alpha\alpha'} P_1 P_2 + \frac{1 + 2\varepsilon}{2((4 - 9\varepsilon) + b'(1 + 3\varepsilon)) + (\varepsilon + b'(1 + 3\varepsilon)) \cos 4\alpha - 4a\varepsilon \sin 4\alpha\alpha'} \times \left(16\alpha_0 T_0 k_1 (P_1 + P_2) - \frac{256\mu}{(\chi + 1)\pi} \frac{\gamma}{a} \right) = 0 \tag{4.4}$$

здесь $\Sigma(a) \cong 4a$; $\gamma(a) \equiv \gamma = const$.

Тогда при $a = a_* = const$ из выражений (4.4) получим макроскопический критерий хрупкого разрушения (1.1) (предельную кривую) в пространстве главных напряжений P_1 и P_2 при однократном статическом нагружении:

$$P_1^2 + P_2^2 - 2\nu_* P_1 P_2 + \left(1 - \nu_* + \frac{36\varepsilon}{2((4 - 9\varepsilon) + b'(1 + 3\varepsilon)) + (\varepsilon + b'(1 + 3\varepsilon)) \cos 4\alpha - 4a\varepsilon \sin 4\alpha\alpha'} \Big|_{a=a_*} \right) \times \left(2\alpha_0 T_0 k_1 (P_1 + P_2) - \frac{32\mu}{(\chi + 1)\pi} \frac{\gamma}{a_*} \right) = 0 \tag{4.5}$$

здесь обозначено

$$\nu(a) = \frac{2(\varepsilon + b'(1 + 3\varepsilon)) + (\varepsilon + b'(1 + 3\varepsilon))\cos 4\alpha - 4a\varepsilon \sin 4\alpha\alpha'}{2((4 - 9\varepsilon) + b'(1 + 3\varepsilon)) + (\varepsilon + b'(1 + 3\varepsilon))\cos 4\alpha - 4a\varepsilon \sin 4\alpha\alpha'}$$

$$\nu_* = \nu(a_*)$$

Условие (4.3) при $b'\varepsilon \ll 1$ имеет вид

$$\alpha'a \sin 2\alpha = \cos 2\alpha \tag{4.6}$$

Выражение (4.6) совпадает условием, полученным в работах [1-3]. Из равенства (4.6) следует, что независимо от комбинации критических напряжений P_1 и P_2 , соответствующих точкам, лежащим на кривой разрушения (4.5) трещина всегда будет ориентирована или перпендикулярно к линии действия растягивающего напряжения или вдоль сжимающего напряжения, т.е. величина $\alpha(a_*)$ всегда принимает одно из двух значений либо 0, либо $\frac{\pi}{2}$ [1-3].

Оценим выражение

$$\frac{36\varepsilon}{2((4 - 9\varepsilon) + b'(1 + 3\varepsilon)) + (\varepsilon + b'(1 + 3\varepsilon))\cos 4\alpha - 4a\varepsilon \sin 4\alpha\alpha'} \tag{4.7}$$

При $a = a_*$ выражение (4.7) имеет вид

$$\frac{36\varepsilon}{8 - 17\varepsilon + 3b' + 9b'\varepsilon}$$

Пусть $b' \geq 0$, т.е. трещина раскрывается при развитии. Выражение

$$8 - 17\varepsilon + 3b' + 9b'\varepsilon \geq 0 \text{ при } \varepsilon < \frac{8}{17}.$$

Тогда

$$0 \leq \frac{36\varepsilon}{8 - 17\varepsilon + 3b' + 9b'\varepsilon} \leq \frac{36\varepsilon}{8 - 17\varepsilon} \tag{4.8}$$

В силу оценки (4.8) критерий (4.5) с точностью до величин порядка ε имеет вид:

$$P_1^2 + P_2^2 - 2\nu_* P_1 P_2 + 2\alpha_0 T_0 k_1 (1 - \nu_*) (P_1 + P_2) - \frac{32\mu(1 - \nu_*)}{(\chi + 1)\pi} \frac{\gamma}{a_*} \tag{4.9}$$

Из выражения (4.5) находим, что при $\varepsilon < \frac{8}{17}$, $0 \leq \nu_* \leq 1$.

При одних и тех же значениях величины ν_* выражение (4.9) совпадает с критерием, полученным в работах [1-3].

При таком предположении геометрические свойства и форма «достаточно узкого» дефекта не влияют на величины критических нагрузок, необходимых для начала его развития.

Литература

1. Дунаев В.И., Георгияди В.Г., Молдаванов С.Ю., Лозовой С.Б. Макроскопический критерий хрупкого разрушения при образовании изолированной раскрывающейся трещины. // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2013 №3. С. 38-45.
2. Дунаев И.М., Дунаев В.И. Об энергетическом условии разрушения твёрдых тел. // Доклады РАН. 2000 Т.372. №1. С. 43-45.
3. Дунаев И.М., Дунаев В.И. Энергетическое условие разрушения твёрдых тел. // Механика твёрдого тела. М.: 2003. №6. с. 69-81.
4. Дунаев В.И. Об одном методе вычисления высвобождающейся внутренней энергии при образовании изолированного дефекта. // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2008 №1. С. 14-19.
5. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
6. Белоносов С.М. Основные плоские статические задачи для односвязных и двухсвязных областей. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. 231 с.
7. Каминский А.А. Хрупкое разрушение вблизи отверстий. Киев: Наукова думка, 1982. 157 с.

References

1. Dunaev V.I., Georgijadi V.G., Moldavanov S.Ju., Lozovoj S.B. Makroskopicheskiy kriterij hrupkogo razrushenija pri obrazovanii izolirovannoj raskryvajushhejsja treshhiny. // Jekologicheskij vestnik nauchnyh centrov ChJeS. 2013 №3. S. 38-45.
2. Dunaev I.M., Dunaev V.I. Ob jenergeticheskom uslovii razrushenija tvjordyh tel. // Doklady RAN. 2000 T.372. №1. S. 43-45.
3. Dunaev I.M., Dunaev V.I. Jenergeticheskoe uslovie razrushenija tvjordyh tel. // Mehanika tvjordogo tela. M.: 2003. №6. s. 69-81.
4. Dunaev V.I. Ob odnom metode vychislenija vysvobozhdajushhejsja vnutrennej jenergii pri obrazovanii izolirovannogo defekta. // Jekologicheskij vestnik nauchnyh centrov ChJeS. 2008 №1. S. 14-19.
5. Mushelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti. M.: Nauka, 1966. 707 s.
6. Belonosov S.M. Osnovnye ploskie staticheskie zadachi dlja odnosvjaznyh i dvuhsvjaznyh oblastej. Novosibirsk: Izd-vo SO AN SSSR, 1962. 231 s.
7. Kaminskij A.A. Hrupkoe razrushenie vblizi otverstij. Kiev: Naukova dumka, 1982. 157 s.