

УДК 620:631.365.22

UDC620:631.365.22

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА В ЗЕРНЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОЛЯ СВЧ

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF HEAT TRANSFER IN GRAIN FIELD UNDER THE INFLUENCE OF MICROWAVE

Васильев Алексей Алексеевич

Vasilyev Alexey Alexeevich

Будников Дмитрий Александрович
к.т.н.

Budnikov Dmitriy Alexandrovich
Cand.Tech.Sci.

Васильев Алексей Николаевич
д.т.н., профессор
Всероссийский научно-исследовательский институт электрификации сельского хозяйства, Москва, Россия
109456, Москва, 1-ый Вешняковский проезд, д.2.
viesh@dol.ru

Vasilyev Alexey Nikolaevich
Dr.Sci.Tech., professor
All-Russian Research Institute Electrification of Agriculture, Moscow, Russia
109456, Moscow, 1stVeshnyakovskiy lane, 2
viesh@dol.ru

В статье показана постановка краевых задач теплообмена в единичной зерновке при воздействии поля СВЧ. Зерновка имеет неравномерное распределение влаги по объёму. Приведена последовательность решения краевых задач

The article shows the setting of boundary value problems in heat exchange unit when exposed caryopsis microwave field. Weevil is the uneven distribution of moisture by volume. We have also found a sequence of solutions of boundary value problems

Ключевые слова: ЗЕРНОВКА, СВЧ НАГРЕВ, УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ, НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ, ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА, ИЗОБРАЖЕНИЕ СВЁРТКИ

Keywords: POLLINATED, MICROWAVE HEATING, HEAT EQUATIONS, BOUNDARY VALUE PROBLEMS, BOUNDARY CONDITIONS, INITIAL CONDITIONS, LAPLACE TRANSFORM, IMAGE OF CONVOLUTION.

Введение

В отличие от конвективного нагрева при нагреве под действием поля СВЧ наибольшую температуру имеют те части зерновки, которые более увлажнены. За счёт интенсивного нагрева наиболее влажных зон зерновки в них повышается давление паров воды [1], происходит перемещение влаги в менее нагретые участки зерновки. Поэтому для описания СВЧ нагрева необходимо учитывать распределение влаги внутри зерновки.

Обеззараживания с применением поля СВЧ может проводиться как для свежубранного зерна, так и зерна после хранения. Некоторые технологии обеззараживания требуют предварительного увлажнения зерна. В этом случае распределение влаги по зерновке может иметь определяющее значение на процесс нагрева зерновки в поле СВЧ. Поэтому получение математических зависимостей изменения температуры в частях зерновки, в зависимости от их влажности, при воздействии поля СВЧ является актуальной задачей исследования, решение которой позволит совершенствовать технологию обеззараживания зерна.

1. Постановка задачи

Система дифференциальных уравнений тепло - и влагообмена при СВЧ воздействии имеет вид [2]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{r' \varepsilon}{c} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{Q_v}{c \rho_0}; & (1) \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} = a_m \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + a_m \delta_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \tau}; & (2) \\ \frac{\partial P}{\partial \tau} = a_p \frac{\partial P^2}{\partial R^2} + \frac{\varepsilon}{c_v} \frac{\partial u}{\partial \tau}. & (3) \end{cases}$$

где a – коэффициент температуропроводности, м²/с;

ε – коэффициент фазового превращения жидкость – пар;

c – удельная теплоемкость зерна, кДж/кг°С;

r' – удельная теплота парообразования, кДж/кг;

Q_v – удельная мощность, рассеиваемая в диэлектрике при воздействии СВЧ поля, Вт/м³;

ρ_0 – плотность сухого вещества зерна, кг/м³;

a_{m2} – коэффициент диффузии жидкости, м²/с;

δ_2 – относительный коэффициент термодиффузии;

P – избыточное давление в образце, Па;

c_v – емкость тела по отношению к влажному воздуху,

$$c_v = \frac{1}{P_H}, \frac{1}{P_a};$$

P_H – давление пара материала при данном влагосодержании, Па;

θ – температура зерновки, °С;

a_p – коэффициент конвективной диффузии пара, м²/с.

При СВЧ обработке зерна с целью его обеззараживания основной задачей является температурное воздействие на зерно. В процессе обработки не ставится задача снижения влажности зерна, поэтому не предусматривается продувание зернового слоя воздухом. Поскольку обработку зерна проводят в плотном слое, то можно считать, что влага, выделяемая в межзерновое пространство при СВЧ воздействии, там и остается, а затем зерном и поглощается. Поскольку влажность всех зерновок одинакова, то между ними влагообмена не происходит. Поэтому примем допущение, что в процессе СВЧ обработки влагообмена зерновки с окружающей средой не происходит. Следовательно, в уравнениях (1), (2), (3) можно принять скорость изменения влажности равной нулю $\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$.

Тогда система уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{Q_v}{c \rho_o}; & (4) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} = \delta_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2}; & (5) \\ \frac{\partial P}{\partial \tau} = a_p \frac{\partial P^2}{\partial R^2}. & (6) \end{cases}$$

Уравнение (4) показывает, что скорость изменения температуры зерновки зависит от скорости изменения градиента температуры в ней и от удельной мощности, выделяемой в зерновке, которая в свою очередь зависит от диэлектрической проницаемости зерновки. Поскольку влажность зерновки по объему распределена неравномерно, то и скорость нагрева различных участков зерновки будет неодинакова.

Уравнение (5) показывает, что скорость изменения градиента температуры пропорциональна скорости изменения градиента влагосодержания. Уравнение (6) показывает, что скорость изменения давления паров влаги в зерновке пропорциональна скорости изменения градиента давления. В наших расчетах это уравнение не понадобится.

Если в уравнении (4) слагаемое $(\partial^2 \theta) / (\partial R^2)$ заменить его значением из уравнения (5), то получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = -\frac{\alpha}{\delta_2} \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{Q_v}{c p_o}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{Q_v}{c p_o} \quad (4)$$

Данная система уравнений описывает зависимость скорости изменения температуры зерновки от скоростей изменения градиентов температуры и влажности.

Уравнение (4) представляет собой уравнение теплопроводности, описывающее изменение температуры в каждой точке объекта при подведении энергии извне [3].

Уравнение теплопроводности в задачах математической физики относится к задачам параболического типа [4]. Чтобы с помощью уравнения теплопроводности описать динамику температурного поля в теле, необходимо знать распределение температуры в начальный момент времени, т.е. задать начальные условия. Кроме того, требуется знать тепловой режим на поверхности тела, т.е. задать граничные условия во всех точках поверхности тела в любой момент времени.

Учитывая малые размеры зерновки, в математической модели будет достаточно описание процесса нагрева зерновки в трех зонах: центральной, средней и внешней. Тогда для упрощения задачи примем, что зерновка имеет форму шара и разделена на три зоны, влажность в которых распределена равномерно (Рисунок 1).

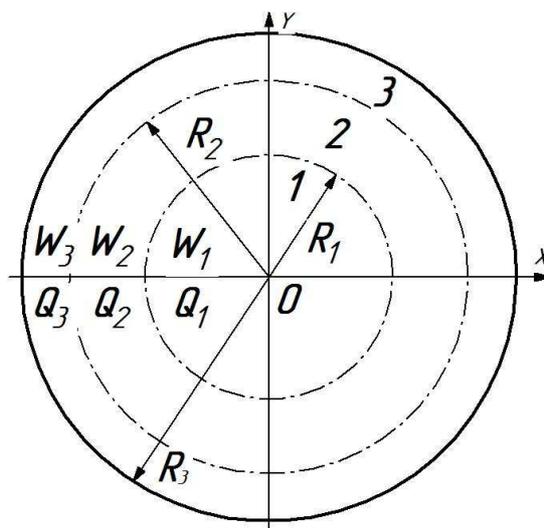


Рисунок 1. Условное представление зерновки и деление её на три зоны по влажности.

Поскольку мы разделили зерновку на три зоны в соответствии с влагосодержанием, то и в математических моделях процесса изменения температуры при СВЧ воздействии должны содержаться принятые условия. Это должно найти отражение в записи граничных условий. Граничные условия в задачах теплопроводности могут быть заданы различными способами [5]. *Граничные условия первого рода*, когда в каждой точке поверхности тела задают температуру. *Граничные условия второго рода*, когда на поверхности тела задают тепловой поток. *Граничные условия третьего рода*, когда описывают тепловой режим на поверхности тела, соответствующий конвективному теплообмену по закону Ньютона с окружающей внешней средой. *Граничные условия четвертого рода*, когда при описании температурных полей в многослойных телах и оболочках на поверхности контакта двух тел используют граничные условия сопряжения. Для идеального теплового контакта эти условия означают равенство температур и тепловых потоков на контактной поверхности.

Из приведенного описания граничных условий для зерновки следует, что в постановке задачи теплообмена используются несколько способов задания граничных условий. Так для круга, внутреннего кольца и внутренней поверхности внешнего кольца используют граничные условия четвертого рода.

Для внешнего кольца, у которого осуществляется конвективный теплообмен с внешней средой, используются граничные условия третьего рода.

Ранее было принято допущение, что в каждой из трех зон зерновка имеет одинаковые теплотехнические свойства в пределах зоны. Следова-

тельно, если из зерновки вдоль ее центральной оси выделить круглый цилиндр, то изменение температуры в участках данного стержня будут аналогичны изменениям температуры в любой точке колец.

С учетом данной симметрии задача теплопроводности для зерновки может быть сведена к решению задачи теплопроводности для стержня. Поскольку температура вокруг стержня всегда будет равна температуре внутри стержня, поэтому теплообмена с боковой поверхности стержня осуществляться не будет. Следовательно, задача аналогична задаче для стержня с изолированной поверхностью.

Запишем краевую задачу с начальными и граничными условиями. За начало координат примем левую крайнюю точку центрального круга по оси x (Рисунок 2). Формулировка краевой задачи для первого участка стержня будет следующей. Получить уравнение изменения температуры в стержне длиной $2R_1$, с теплоизолированной боковой поверхностью, если начальная температура стержня равна θ_0 . Внутри стержня имеется равномерно распределенный источник энергии Q_{v1} . На левом ($x = 0$) и правом ($x = 2R$) краях стержня температура изменяется по закону

$$\theta_{гр1}(\tau) = \frac{\theta_1(\tau) + \theta_2(\tau)}{2},$$

где $\theta_{гр1}(\tau)$ - температура на границе между первой и второй зонами зерновки;

$\theta_1(\tau)$ - изменение температуры в первой зоне зерновки;

$\theta_2(\tau)$ - изменение температуры во второй зоне зерновки.

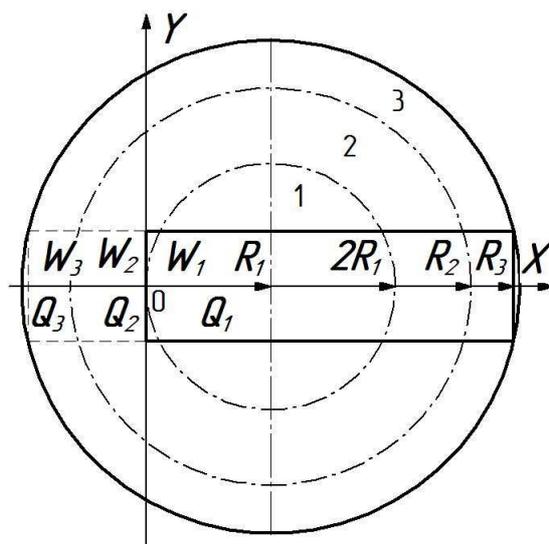


Рисунок 2. «Извлеченный» из зерновки вдоль центральной оси цилиндр.

Краевая задача для первого участка стержня будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = \alpha_1^2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{Q_{v1}}{\rho_1 c_1}, 0 < x < 2R_1, 0 < \tau < +\infty; \\ \theta_1(x, 0) = \theta_{01}, 0 < x < 2R_1; \\ \theta_1(0, \tau) = \theta_1(2R_1, \tau) = \frac{\theta_1(\tau) + \theta_2(\tau)}{2} = \theta_{гр1}(\tau). \end{cases} \quad (8)$$

где α_1 – коэффициент температуропроводности центральной части (шара/зерновки m^2/c);

ρ_1 – плотность центрального участка зерновки, kg/m^3 ;

c_1 – удельная теплоемкость центрального участка зерновки, $kJ/kg \cdot K$;

Q_{v1} – удельная мощность, выделяемая в центральном участке зерновки при действии СВЧ поля, W/m^3 ;

θ_{01} – начальная температура центральной части зерновки, $^{\circ}C$.

Для второго участка стержня краевая задача будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} + \frac{Q_{v2}}{\rho_2 c_2}, 2R_1 < x < R_2, 0 < \tau < +\infty; \\ \theta_2(x, 0) = \theta_{02}, 2R_1 < x < R_2; \\ \theta_2(2R_1, \tau) = \theta_{rp1}(\tau), \theta_2(R_2, \tau) = \theta_{rp2}(\tau), 0 < \tau < +\infty. \end{cases} \quad (9)$$

где a_2 – коэффициент температуропроводности средней части зерновки

m^2/c ;

ρ_2 – плотность среднего участка зерновки, kg/m^3 ;

c_2 – удельная теплоемкость среднего участка зерновки, $kJ/kg \cdot K$;

Q_{v2} – удельная мощность выделяемая в среднем участке зерновки при действии СВЧ поля, W/m^3 ;

θ_{02} – начальная температура средней части зерновки, $^{\circ}C$.

Для третьего участка зерновки с учетом того, что с правого конца происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона, краевая задача будет иметь следующий вид.

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_3}{\partial \tau} = a_3 \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial x^2} + \frac{Q_{v3}}{\rho_3 c_3}, R_2 < x < R_3, 0 < \tau < +\infty; \\ \theta_3(x, 0) = \theta_{03}, R_2 < x < R_3; \\ \theta_3(R_2, \tau) = \theta_{rp2}(\tau), \theta_3(R_3, \tau) = h[\theta_3(R_3, \tau) - T_{m3}(\tau)], 0 < \tau < +\infty. \end{cases} \quad (10)$$

где a_3 – коэффициент температуропроводности внешней части зерновки

m^2/c ;

ρ_3 – плотность среднего участка зерновки, kg/m^3 ;

c_3 – удельная теплоемкость внешнего участка зерновки, $kJ/kg \cdot K$;

Q_{v3} – удельная мощность, выделяемая во внешнем участке зерновки при действии СВЧ поля, W/m^3 ;

θ_{03} – начальная температура внешней части зерновки, $^{\circ}C$;

$h = \alpha/\lambda, 1/m$,

α - коэффициент теплообмена между поверхностью стержня и окружающей средой, температура которой равна $T_{мз}(\tau)$, Вт/м²·К,

λ – коэффициент внутренней теплопроводности участка зерновки, Вт/м·К.,

$T_{мз}(\tau)$ – температура межзернового пространства, °С.

2. Решение краевых задач

Для решения краевых задач используем метод интегрального преобразования Лапласа. Преобразование частных производных осуществляется по такому правилу [6]: если $\theta = \theta(x, \tau)$ и преобразование Лапласа проводится по переменной τ ($\tau \geq 0$), то, обозначив $L[\theta(x, \tau)] \equiv \Theta(x, p) = \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} \theta(x, \tau) d\tau$, можно (интегрированием по частям) установить соотношение

$$L\left[\frac{\partial \theta}{\partial \tau}\right] = p\Theta(x, p) - \theta(x, 0);$$

$$L\left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2}\right] = p^2\Theta(x, p) - p\theta(x, 0) - \frac{\partial \theta}{\partial \tau}(x, 0);$$

$$L\left[\frac{\partial \theta}{\partial x}\right] = \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, p), \quad \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x, p).$$

где L – оператор Лапласа;

$\Theta(x, p)$ – переменная θ после выполнения прямого преобразования Лапласа по времени (τ).

Для упрощения процедуры записывания выражений в дальнейшем вместо символа частных производных будем использовать индекс переменной, по которой взята производная. Например:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \theta_{\tau}; \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} = \theta_{\tau\tau}$$

Приступим к решению первой краевой задачи

$$\begin{cases} \theta_\tau = \alpha^2 \theta_{xx} + P_{уд1}, 0 < x < 2R_1, 0 < \tau < +\infty; \\ \theta(x, 0) = \theta_{01}, 0 < x < 2R_1; \\ \theta_1(0, \tau) = \theta_1(2R_1, \tau) = \theta_{гр1}(\tau), \end{cases} \quad (11)$$

где $P_{уд1} = \frac{Q_{уд1}}{F_1 c_1}$, $\theta = \theta_1$.

Для решения этой задачи воспользуемся преобразованием Лапласа по переменной τ . Учитывая свойства этого преобразования [6] имеем:

$$\begin{aligned} \theta(x, \tau) \doteq \Theta(x, p), \theta_\tau(x, \tau) \doteq p\Theta(x, p) - \theta(x, 0); \\ \theta_x(x, \tau) \doteq \Theta_x(x, p), \theta_{xx}(x, \tau) \doteq \Theta_{xx}(x, p). \end{aligned}$$

Из задачи (11) следует, что

$$L[\theta_\tau] = \alpha^2 L[\theta_{xx}] + P_{уд1},$$

с учетом $\theta(x, 0) = \theta_{01}$ получаем

$$\alpha^2 \Theta_{xx}(x, p) - p\Theta(x, p) + \theta_{01} + \frac{1}{p} P_{уд1} = 0.$$

В результате имеем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка по переменной x (в этом уравнении p играет роль параметра). Начальное условие $\theta(x, 0)$ уже вошло в уравнение, что является положительным моментом такого способа решения уравнений с частными производными.

Применяем преобразование Лапласа к граничным условиям. Обозначим $\theta_{гр1}(\tau)$ как $G(\tau)$, тогда $L[G(\tau)] \doteq G(p)$, а $L[\theta_x(0, \tau)] = \Theta(0, p)$

После выполнения преобразования Лапласа краевая задача запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \alpha^2 \Theta_{xx}(x, p) - p\Theta(x, p) + P_{уд1} + \theta_{01} = 0, 0 < x < 2R_1 \\ \Theta(0, p) = G_1(p), \Theta(2R_1, p) = G_1(p), 0 < \tau < +\infty \end{cases} \quad (12)$$

Решение дифференциального уравнения, с учетом граничных условий $\Theta(0, p)$ и $\Theta(2R_1, p)$ проводим с помощью пакета прикладных программ MATLAB [7].

Решение имеет следующий вид:

$$\Theta_1(x, p) = \frac{F_{y_{д1}} + \Theta_{01} p}{p^2} + \frac{e^{\frac{\sqrt{px}}{a}} (F_{y_{д1}} + \Theta_{01} p - G_1(p) p^2 - F_{y_{д1}} e^{-\frac{\sqrt{px}}{a}} - \Theta_{01} p e^{-\frac{\sqrt{px}}{a}} + G_1(p) p^2 e^{-\frac{\sqrt{px}}{a}})}{p^2 (e^{-\frac{\sqrt{px}}{a}} - e^{\frac{\sqrt{px}}{a}})} - \frac{e^{-\frac{\sqrt{px}}{a}} (F_{y_{д1}} + \Theta_{01} p - G_1(p) p^2 - F_{y_{д1}} e^{\frac{\sqrt{px}}{a}} - \Theta_{01} p e^{\frac{\sqrt{px}}{a}} + G_1(p) p^2 e^{\frac{\sqrt{px}}{a}})}{p^2 (e^{\frac{\sqrt{px}}{a}} - e^{-\frac{\sqrt{px}}{a}})} \quad (13)$$

После выполнения преобразований получим следующее выражение:

$$\Theta_1(x, p) = \frac{F_{y_{д1}} + \Theta_{01} p}{p^2} + \frac{e^{\frac{\sqrt{px}}{a}} - e^{-\frac{\sqrt{px}}{a}}}{\sqrt{px} - \sqrt{px}} \cdot \frac{F_{y_{д1}} - \Theta_{01} p}{p^2} + \frac{e^{\frac{\sqrt{px}}{a}} - e^{-\frac{\sqrt{px}}{a}}}{\sqrt{px} - \sqrt{px}} \cdot \frac{G_1(p) p^2}{p^2} + \frac{e^{\frac{\sqrt{p}(2R_1 - x)}{a}} - e^{-\frac{\sqrt{p}(2R_1 - x)}{a}}}{\sqrt{p}(2R_1 - x) - \sqrt{p}(2R_1 - x)} \cdot \frac{F_{y_{д1}} + \Theta_{01} p}{p^2} + \frac{e^{-\frac{\sqrt{p}(2R_1 - x)}{a}} - e^{\frac{\sqrt{p}(2R_1 - x)}{a}}}{\sqrt{p}(2R_1 - x) - \sqrt{p}(2R_1 - x)} \cdot \frac{F_{y_{д1}} - \Theta_{01} p}{p^2} + \frac{e^{\frac{\sqrt{p}(2R_1 - x)}{a}} - e^{-\frac{\sqrt{p}(2R_1 - x)}{a}}}{\sqrt{p}(2R_1 - x) - \sqrt{p}(2R_1 - x)} \cdot \frac{G_2(p) p^2}{p^2} \quad (14)$$

Выполним преобразования левых сомножителей каждого из слагаемых выражения (14):

$$\frac{e^{\frac{\sqrt{px}}{a}} - e^{-\frac{\sqrt{px}}{a}}}{\sqrt{px} - \sqrt{px}} = \frac{2 \operatorname{Sh}(\sqrt{\frac{px}{a}})}{-2 \operatorname{Sh}(\sqrt{\frac{2R_1}{a}})} = -\frac{\operatorname{Sh}(\sqrt{\frac{px}{a}})}{\operatorname{Sh}(\sqrt{\frac{2R_1}{a}})} \quad (14.1)$$

$$\frac{e^{\frac{\sqrt{px}}{a}} - e^{-\frac{\sqrt{px}}{a}}}{\sqrt{px} - \sqrt{px}} = \frac{-2 \operatorname{Sh}(\sqrt{\frac{px}{a}})}{-2 \operatorname{Sh}(\sqrt{\frac{2R_1}{a}})} = \frac{\operatorname{Sh}(\sqrt{\frac{px}{a}})}{\operatorname{Sh}(\sqrt{\frac{2R_1}{a}})} \quad (14.2)$$

$$\frac{e^{\frac{\sqrt{p}(2R_1 - x)}{a}} - e^{-\frac{\sqrt{p}(2R_1 - x)}{a}}}{\sqrt{p}(2R_1 - x) - \sqrt{p}(2R_1 - x)} = \frac{2 \operatorname{Sh}(\sqrt{\frac{p(2R_1 - x)}{a}})}{-2 \operatorname{Sh}(\sqrt{\frac{2R_1}{a}})} = -\frac{\operatorname{Sh}(\sqrt{\frac{p(2R_1 - x)}{a}})}{\operatorname{Sh}(\sqrt{\frac{2R_1}{a}})} \quad (14.3)$$

$$\frac{e^{-\frac{\sqrt{p}(2R_1 - x)}{a}} - e^{\frac{\sqrt{p}(2R_1 - x)}{a}}}{\sqrt{p}(2R_1 - x) - \sqrt{p}(2R_1 - x)} = \frac{-2 \operatorname{Sh}(\sqrt{\frac{p(2R_1 - x)}{a}})}{-2 \operatorname{Sh}(\sqrt{\frac{2R_1}{a}})} = \frac{\operatorname{Sh}(\sqrt{\frac{p(2R_1 - x)}{a}})}{\operatorname{Sh}(\sqrt{\frac{2R_1}{a}})} \quad (14.4)$$

Теперь можно выполнить обратное преобразование Лапласа для выражения (14). Оригиналы правых сомножителей слагаемых выражения (14) достаточно легко находятся по таблицам оригиналов. Оригиналы левых сомножителей (14.1), (14.2), (14.3) и (14.4) могут быть найдены из таблицы оригиналов монографии[8]:

$$-\frac{\operatorname{Sh}(\sqrt{\frac{px}{a}})}{\operatorname{Sh}(\sqrt{\frac{2R_1}{a}})} = \frac{2\pi}{4R_1^{\frac{3}{2}}} \operatorname{Sh}\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{\frac{\pi^2}{4R_1^2} x} = -\frac{\pi a^2}{2 R_1^{\frac{3}{2}}} \operatorname{Sh}\left(\frac{\pi}{2 R_1} x\right) e^{\frac{\pi^2 a^2}{4 R_1^2} x};$$

$$\frac{\operatorname{Shnh}\left(\sqrt{p}\frac{x}{a}\right)}{\operatorname{Shnh}\left(\sqrt{p}\frac{2R_1}{a}\right)} = \frac{\pi a^2}{2 R_1^2} \operatorname{Stn}\left(\frac{\pi a}{2 R_1} x\right) e^{-\frac{\pi^2 a^2}{4 R_1^2} x};$$

$$-\frac{\operatorname{Shnh}\left(\sqrt{p}\frac{2R_1-x}{a}\right)}{\operatorname{Shnh}\left(\sqrt{p}\frac{2R_1}{a}\right)} = -\frac{\pi a^2}{2 R_1^2} \operatorname{Stn}\left(\frac{\pi x}{2 R_1}\right) e^{-\frac{\pi^2 a^2}{4 R_1^2} x};$$

$$\frac{\operatorname{Shnh}\left(\sqrt{p}\frac{2R_1-x}{a}\right)}{\operatorname{Shnh}\left(\sqrt{p}\frac{2R_1}{a}\right)} = \frac{\pi a^2}{2 R_1^2} \operatorname{Stn}\left(\frac{\pi x}{2 R_1}\right) e^{-\frac{\pi^2 a^2}{4 R_1^2} x}.$$

Оригиналы каждого слагаемого выражения (14) могут быть найдены с использованием изображения свертки.

Рассмотрим реализацию изображения свёртки. Сверткой функций f и g называется функция, которая обозначается $f g$ и определяется равенством [8] $(f g)(\tau) = \int_0^\tau f(\tau_1) g(\tau - \tau_1) d\tau_1$.

Примем, что для слагаемых выражения (14) левые части сомножителей будут следующими:

$$f_1(\tau_1) = -\frac{\pi a^2}{2 R_1^2} \operatorname{Stn}\left(\frac{\pi a}{2 R_1} x\right) e^{-\frac{\pi^2 a^2}{4 R_1^2} \tau_1};$$

$$f_2(\tau_1) = \frac{\pi a^2}{2 R_1^2} \operatorname{Stn}\left(\frac{\pi a}{2 R_1} x\right) e^{-\frac{\pi^2 a^2}{4 R_1^2} \tau_1};$$

$$f_3(\tau_1) = -\frac{\pi a^2}{2 R_1^2} \operatorname{Stn}\left(\frac{\pi x}{2 R_1}\right) e^{-\frac{\pi^2 a^2}{4 R_1^2} \tau_1};$$

$$f_4(\tau_1) = \frac{\pi a^2}{2 R_1^2} \operatorname{Stn}\left(\frac{\pi x}{2 R_1}\right) e^{-\frac{\pi^2 a^2}{4 R_1^2} \tau_1}.$$

При этом правые части будут выглядеть следующим образом:

$$q_1(\tau - \tau_1) = P_{уд1}(\tau - \tau_1) - \Theta_{01}; q_2(\tau - \tau_1) = G_1(\tau - \tau_1);$$

$$q_3(\tau - \tau_1) = P_{уд1}(\tau - \tau_1) + \Theta_{01}; q_4(\tau - \tau_1) = G_1(\tau - \tau_1).$$

Тогда оригинал выражения (14) найдется как

$$(f_1q_1)(\tau) + (f_2q_2)(\tau) + (f_3q_3)(\tau) + (f_4q_4)(\tau) = -\int_0^\tau (P_{уд1}(\tau - \tau_1) - \Theta_{01}) \cdot \frac{\pi a^2}{2 R_1^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi a}{2 R_1} x\right) e^{-\frac{\pi^2 a^2}{4 R_1^2} \tau_1} d\tau_1 + \int_0^\tau G_1(\tau - \tau_1) \frac{\pi a^2}{2 R_1^2} \sin\left(\frac{\pi a}{2 R_1} x\right) e^{-\frac{\pi^2 a^2}{4 R_1^2} \tau_1} d\tau_1 - \int_0^\tau (P_{уд1}(\tau - \tau_1) + \Theta_{01}) \frac{\pi a^2}{2 R_1^2} \sin\left(\frac{\pi x}{2 R_1}\right) e^{-\frac{\pi^2 a^2}{4 R_1^2} \tau_1} d\tau_1 + \int_0^\tau G_1(\tau - \tau_1) \frac{\pi a^2}{2 R_1^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2 R_1}\right) e^{-\frac{\pi^2 a^2}{4 R_1^2} \tau_1} d\tau_1$$

Проинтегрировав данные уравнения и используя свойство линейности для (13), получим оригинал выражения (14).

$$\Theta_1(x, \tau) = \Theta_{01} + P_{уд1}\tau + \Theta_{01} \frac{2}{\pi} \left(e^{-\frac{\pi^2 a^2}{4 R_1^2} \tau} - 1 \right) \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2 R_1}\right) - \sin\left(\frac{\pi a}{2 R_1} x\right) \right) - P_{уд1} \frac{2}{\pi^3 a^2} \cdot \left(a^2 \pi^2 \tau + 4R_1^2 \left(e^{-\frac{\pi^2 a^2}{4 R_1^2} \tau} - 1 \right) \right) \left(\sin\left(\frac{\pi a}{2 R_1} x\right) + \sin\left(\frac{\pi x}{2 R_1}\right) \right) + \frac{\pi a^2}{2 R_1^2} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi a}{2 R_1} x\right) + \sin\left(\frac{\pi x}{2 R_1}\right) \right) \int_0^\tau G_1(\tau - \tau_1) e^{-\frac{\pi^2 a^2}{4 R_1^2} \tau_1} d\tau_1 \tag{15}$$

Уравнение (15) уточним, найдя зависимости $G_1(\tau_1)$. С учетом того, что $G_1(\tau) = \frac{\theta_{1,2}(\tau) + \theta_{2,1}(\tau)}{2}$, после соответствующих преобразований получим

$$\Theta_1(x, \tau) = \Theta_{01} + P_{уд1}\tau + \Theta_{01} \frac{2}{\pi} \left(e^{-\frac{\pi^2 a^2}{4 R_1^2} \tau} - 1 \right) \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2 R_1}\right) - \sin\left(\frac{\pi a}{2 R_1} x\right) \right) - P_{уд1} \frac{2}{\pi^3 a^2} \cdot \left(a^2 \pi^2 \tau + 4R_1^2 \left(e^{-\frac{\pi^2 a^2}{4 R_1^2} \tau} - 1 \right) \right) \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi a}{2 R_1} x\right) + \sin\left(\frac{\pi x}{2 R_1}\right) \right) + \frac{\pi a^2}{2 R_1^2} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi a}{2 R_1} x\right) + \sin\left(\frac{\pi x}{2 R_1}\right) \right) \cdot \left(-\frac{2R_1^2}{\pi^3 a^2} (\Theta_{02} + \Theta_{01}) \left(e^{-\frac{\pi^2 a^2}{4 R_1^2} \tau} - 1 \right) + (P_{уд1} + P_{уд2}) \cdot \left(\frac{8R_1^4}{\pi^4 a^4} \left(e^{-\frac{\pi^2 a^2}{4 R_1^2} \tau} - 1 \right) \frac{2R_1^2}{\pi^3 a^3} \tau \right) + \Theta_{01} \frac{2R_1^2}{\pi^3 a^2} \left(e^{-\frac{\pi^2 a^2}{4 R_1^2} \tau} - 1 \right) \cdot \sin(\pi a) (1 - 2R_1^2) - P_{уд1} \frac{8R_1^4}{\pi^3 a^4} \cdot \left(e^{-\frac{\pi^2 a^2}{4 R_1^2} \tau} - 1 \right) (-2\tau) \cdot \sin(\pi a) \right) \tag{16}$$

Решив краевые задачи для второго и третьего участков ((9) и (10)), получим уравнения для определения температуры в любой точке второй и третьей зон зерновки.

$$\begin{aligned}
 \Theta_2(x, \tau) = & \Theta_{02} + \Theta_{02} \frac{2}{\pi} \left(e^{-\frac{\pi^2 a^2}{(2R_1 - R_2)^2 \tau}} - 1 \right) \left(\text{Sin} \left(\pi \frac{(2R_1 - x)}{(2R_1 - R_2)} \right) - \text{Sin} \left(\pi \frac{(R_2 - x)}{(2R_1 - R_2)} \right) \right) + P_{уд1} \\
 & P_{уд2} \frac{2}{\pi^3 a^2} \cdot \left((2R_1 - R_2)^2 \cdot \left(e^{-\frac{\pi^2 a^2}{(2R_1 - R_2)^2 \tau}} - 1 \right) + \pi^2 a^2 \tau \right) \cdot \\
 & \left(\text{Sin} \left(\pi \frac{(R_2 - x)}{(2R_1 - R_2)} \right) - \text{Sin} \left(\pi \frac{(2R_1 - x)}{(2R_1 - R_2)} \right) \right) - 2\pi \frac{a^2}{(2R_1 - R_2)^2} \cdot \text{Sin} \left(\pi \frac{(R_2 - x)}{(2R_1 - R_2)} \right) \cdot \\
 & \left(\Theta_{01} \text{Sin}(\pi a) \frac{(2R_1 - R_2)^2}{\pi^2 a^2} \cdot \left(\frac{4(2R_1 - R_2)^2 \left(e^{-\frac{\pi^2 a^2 \tau}{(2R_1 - R_2)^2}} - e^{-\frac{\pi^2 a^2 R_1^2 \tau}{4}} \right)}{\pi^2 a^2 (4R_1^2 R_2 - 4R_1^4 - R_1^2 R_2^2 + 4)} - \left(e^{-\frac{\pi^2 a^2}{(2R_1 - R_2)^2 \tau}} - 1 \right) \right) + \right. \\
 & P_{уд1} \frac{(2R_1 - R_2)^2}{\pi^2 a^4} \cdot \text{Sin}(\pi a) \cdot \left(\frac{16R_1^2 \left(e^{-\frac{\pi^2 a^2 \tau}{(2R_1 - R_2)^2}} - e^{-\frac{\pi^2 a^2 R_1^2 \tau}{4}} \right)}{4R_1^2 R_2 - 4R_1^4 - R_1^2 R_2^2 + 4} - (2R_1 - R_2)^2 e^{-\frac{\pi^2 a^2}{(2R_1 - R_2)^2 \tau}} - \right. \\
 & \left. \left. \pi^2 a^2 \tau + (2R_1 - R_2)^2 - 4R_1^2 \left(e^{-\frac{\pi^2 a^2}{(2R_1 - R_2)^2 \tau}} - 1 \right) \right) - (\Theta_{01} + \Theta_{02}) \cdot \frac{(2R_1 - R_2)^2}{2\pi^2 a^2} \right) \quad (17) \\
 & \left(e^{-\frac{\pi^2 a^2}{(2R_1 - R_2)^2 \tau}} - 1 \right) + (P_{уд1} + P_{уд2}) \cdot \frac{(2R_1 - R_2)^2}{2\pi^4 a^4} \cdot \left((2R_1 - R_2)^2 e^{-\frac{\pi^2 a^2 \tau}{(2R_1 - R_2)^2}} + \pi^2 a^2 \tau - \right. \\
 & \left. (2R_1 - R_2)^2 \right) + 2\pi \frac{a^2}{(2R_1 - R_2)^2} \cdot \text{Sin} \left(\pi \frac{(2R_1 - x)}{(2R_1 - R_2)} \right) \cdot \left(-\frac{\Theta_{02} + \Theta_{03}}{2} \cdot \frac{(2R_1 - R_2)^2}{\pi^2 a^2} \cdot \left(e^{-\pi^2 \frac{a^2}{(2R_1 - R_2)^2 \tau}} \right. \right. \\
 & \left. \left. 1 \right) + \frac{P_{уд1} + P_{уд2}}{2} \cdot \frac{(2R_1 - R_2)^2}{\pi^4 a^4} \cdot \left((2R_1 - R_2)^2 e^{-\pi^2 \frac{a^2}{(2R_1 - R_2)^2 \tau}} + \pi^2 a^2 \tau - (2R_1 - R_2)^2 \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_3(x, \tau) = & \Theta_{03} + \Theta_{03} \frac{2}{\pi} \left(e^{-\frac{\pi^2 a^2}{(R_2 - R_3)^2 \tau}} - 1 \right) \left(\text{Sin} \left(\pi \frac{(R_2 - x)}{(R_2 - R_3)} \right) - \text{Sin} \left(\pi \frac{(R_3 - x)}{(R_2 - R_3)} \right) \right) + P_{yR3} \tau + \\
 & P_{yR3} \frac{2}{\pi^3 a^2} \cdot \left((R_2 - R_3)^2 \cdot \left(e^{-\frac{\pi^2 a^2}{(R_2 - R_3)^2 \tau}} - 1 \right) + \pi^2 a^2 \tau \right) \cdot \\
 & \left(\text{Sin} \left(\pi \frac{(R_2 - x)}{(R_2 - R_3)} \right) - \text{Sin} \left(\pi \frac{(R_3 - x)}{(R_2 - R_3)} \right) \right) - 2\pi \frac{a^2}{(R_2 - R_3)^2} \cdot \text{Sin} \left(\pi \frac{(R_2 - x)}{(R_2 - R_3)} \right) \cdot \left(-\frac{\Theta_{03} + \Theta_{03}}{2} \cdot \frac{(R_2 - R_3)}{\pi^2 a^2} \right. \\
 & \left. \left(e^{-\frac{\pi^2 a^2}{(R_2 - R_3)^2 \tau}} - 1 \right) + \frac{P_{yR3} + P_{yR3}}{2} \cdot \frac{(R_2 - R_3)^2}{\pi^4 a^4} \cdot \left((R_2 - R_3)^2 e^{-\frac{\pi^2 a^2}{(R_2 - R_3)^2 \tau}} + \pi^2 a^2 \tau - (R_2 - \right. \right. \\
 & \left. \left. R_3)^2 \right) \right) + 2\pi \frac{a^2}{(R_2 - R_3)^2} \cdot \text{Sin} \left(\pi \frac{(R_2 - x)}{(R_2 - R_3)} \right) \cdot h \cdot \left(\left(P_{yR3} \cdot \left(\frac{(R_2 - R_3)^2 (\tau a^2 \pi^2 - (R_2 - R_3)^2)}{\pi^4 a^4} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{e^{-\pi^2 \frac{a^2}{(R_2 - R_3)^2 \tau}} (R_2 - R_3)^4}{\pi^4 a^4} \right) - \Theta_{03} \cdot \frac{\left(e^{-\pi^2 \frac{a^2}{(R_2 - R_3)^2 \tau}} - 1 \right) \cdot (R_2 - R_3)^2}{\pi^2 a^2} \right) - \\
 & \left(\Theta_{03} \cdot \left(\frac{(R_2 - R_3)^2 (\tau a^2 \pi^2 - (R_2 - R_3)^2)}{\pi^4 a^4} + \frac{e^{-\pi^2 \frac{a^2}{(R_2 - R_3)^2 \tau}} (R_2 - R_3)^4}{\pi^4 a^4} \right) + \Theta_{03} \cdot \right. \\
 & \left. \frac{\tau_2 \left(e^{-\frac{\pi^2 a^2 \tau}{(R_2 - R_3)^2}} - 1 \right) (R_2 - R_3)^2}{\pi^2 a^2} + P_{yR3} \cdot \left(\frac{2(R_2 - R_3)^6 \left(1 - e^{-\frac{\pi^2 a^2 \tau}{(R_2 - R_3)^2}} \right)}{\pi^6 a^6} - \frac{2\tau (R_2 - R_3)^4}{\pi^4 a^4} + \frac{\tau^2 (R_2 - R_3)^2}{\pi^2 a^2} \right) \right) \quad (18) \\
 & \left. \left. P_{yR3} \cdot \left(\frac{\tau_2 (R_2 - R_3)^2 (\pi^2 \tau a^2 - (R_2 - R_3)^2)}{\pi^4 a^4} + \frac{e^{-\frac{\pi^2 a^2 \tau}{(R_2 - R_3)^2}} (R_2 - R_3)^4}{\pi^4 a^4} \right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

3. Моделирование нагрева зерновки в поле СВЧ

Полученные уравнения позволяют определять температуру в любой точке зерновки при воздействии СВЧ поля. Выполним расчёт изменения температуры. Для этого примем следующие исходные данные: исходная температура зерна $\theta_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$; $R_3 = 2,32 \text{ мм} = 2,32 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $x_3 = 2,03 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $R_2 = 1,74 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $x_2 = 1,45 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $R_1 = 0,58 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $\alpha = 16,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$,

при следующем распределении влажности по слоям зерновки: средняя влажность зерновки $W = 14\%$, влажность центральной части зерновки $W_1 = 14,5 \%$; влажность среднего слоя зерновки $W_2 = 14,25 \%$; влажность наружного слоя зерновки $W_3 = 14,0 \%$; $\rho_1 = 1200 \text{ кг/м}^3$; $h = 11,51 \text{ м}$.

Для расчёта удельной мощности, выделяемой полем СВЧ, величины диэлектрической проницаемости материала и тангенса угла диэлектрических потерь брали в литературе [9]. Расчёт выполнялся в среде MATLAB. Результаты расчета в графическом виде приведены на Рисунке 3.

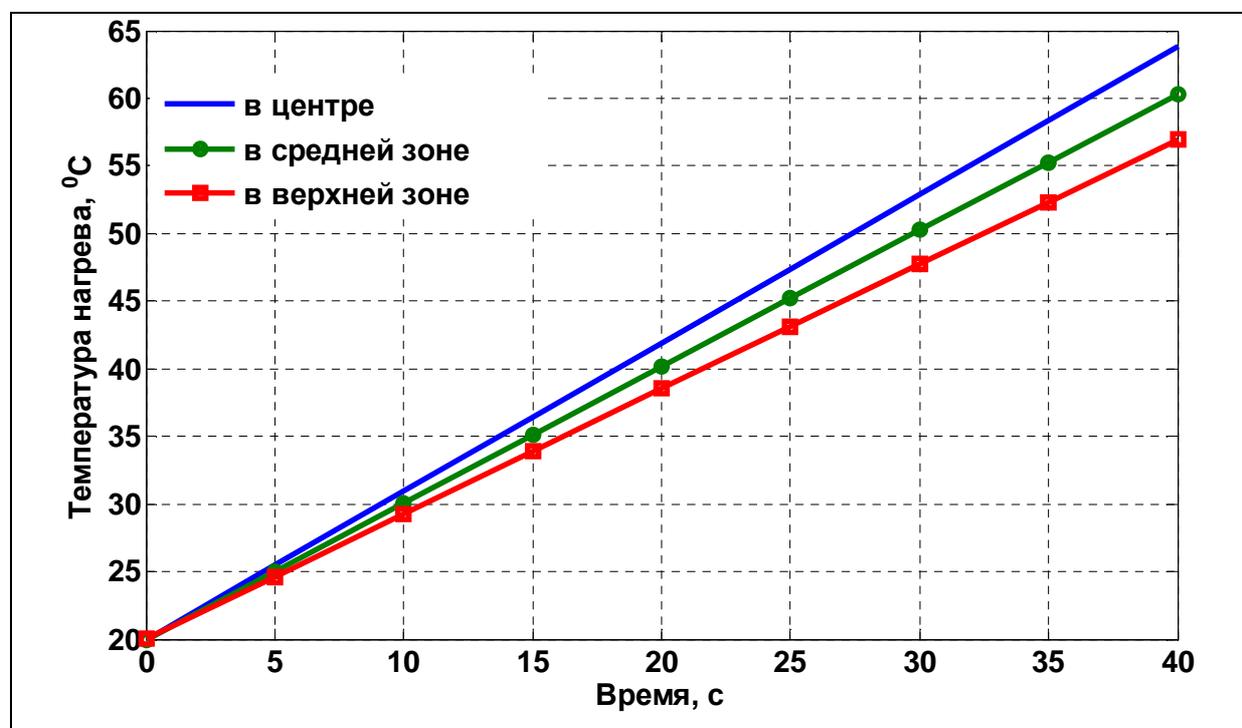


Рисунок 3. Расчёт температуры нагрева зон зерновки при воздействии СВЧ поля.

4. Заключение

Построенные графики показывают, что полученные уравнения могут быть использованы для расчёта изменения температуры в зонах зерновки при СВЧ воздействии в зависимости от распределения влаги.

В технологических процессах, где используется нагрев зерна СВЧ полем, необходимо учитывать градиент температур в пределах одной зерновки. Изменение влажности зерна перед обработкой может существенно повлиять на распределение температуры внутри единичного зерна.

Это имеет существенное значение при обеззараживании зерна, когда необходимо, чтобы в большей степени разогревалась его поверхность для уничтожения плесени и микотоксинов. Результаты же расчётов показывают, что при увлажнении зерна эта цель может быть не достигнута.

Литература

1. Васильев А.Н., Будников Д.А. Влияние градиента температуры при СВЧ-нагреве на давление пара в зерновке //Вестник ФГОУ ВПО МГАУ им. В.П. Горячкина. Агроинженерия.– 2007., №3, часть1, С. 27-29.
2. Лыков А.В. Теория сушки. М.: Энергии, 1968. - 472 с.
3. Эккерт Э.Р. Дрект Р.М. Теория тепло- и массообмена / Пер. с англ. под ред. А.В. Лыкова. М.-Л.: Госэнергоиздат,1961.680 с.
4. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики: Учебное пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
5. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики: учеб. для вузов под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – Изд. 4-е, стер. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011.367 с.
6. Глушко А.В., Глушко В.П. Преобразования Лапласа. Свойства и применения : Пособие по специальному курсу для студентов по специальности 010100 – математика. Воронеж, Издательство Воронежского ГУ, 2004.58 с.
7. Алексеев Е.Р., Чеснокова О. В. Решения задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9.М.: Нт Пресс, 2006. 426 с.
8. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z – преобразования: Перевод с третьего нем. изд. Г. А. Вольперта. М.: Наука, 1974.288 с.
9. Рогов И.А. Электрофизические методы обработки пищевых продуктов. М.: Агропромиздат, 1988.272 с.

References

1. Vasil'ev A.N., Budnikov D.A. Vlijanie gradienta temperatury pri SVCh-nagreve na davlenie para v zernovke //Vestnik FGOU VPO MGAU im. V.P. Gorjachkina. Agroinzhenerija.– 2007., №3, chast'1, S. 27-29.
2. Lykov A.V. Teorija sushki. M.: Jenerгии, 1968. - 472 s.

3. Jekkert Je.R. Drekt R.M. Teorija teplo- i massoobmena / Per. s ang. pod red. A.V. Lykova. M.-L.: Gosjenergoizdat, 1961. 680 s.
4. Koshljakov N.S., Gliner Je.B., Smirnov M.M. Uravnenija v chastnyh proizvodnyh matematicheskoj fiziki: Uchebnoe posobie dlja meh.-mat. fak. un-tov. M.: Vysshaja shkola, 1970. 712 s.
5. Martinson L.K., Malov Ju.I. Differencial'nye uravnenija matematicheskoj fiziki: ucheb. dlja vuzov pod red. V.S. Zarubina, A.P. Krishhenko. – Izd. 4-e, ster. M.: Izd-vo MGTU im. N.Je. Baumana, 2011. 367 s.
6. Glushko A.V., Glushko V.P. Preobrazovanija Laplasa. Svoystva i primenenija : Posobie po special'nomu kursu dlja studentov po special'nosti 010100 – matematika. Voronezh, Izdatel'stvo Voronezhskogo GU, 2004. 58 s.
7. Alekseev E.R., Chesnokova O. V. Reshenija zadach vychislitel'noj matematiki v paketah Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9.M.: Nt Press, 2006. 426 s.
8. Djoch G. Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniju preobrazovanija Laplasa i Z – preobrazovanija: Perevod s tret'ego nem. izd. G. A. Vol'perta. M.: Nauka, 1974. 288 s.
9. Rogov I.A. Jelektrofizicheskie metody obrabotki pishhevyh produktov. M.: Agropromizdat, 1988. 272 s.