

**О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ
НАВЬЕ-СТОКСА В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

**REPRESENTATION OF THE SOLUTIONS OF
THE NAVIER-STOKES IN GENERAL
RELATIVITY**

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D.
Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада

Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.
*Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto,
Canada*

В работе исследованы решения уравнений Навье-Стокса, связанные с решениями уравнений Эйнштейна для пустого пространства. Указаны метрики, в которых уравнения Навье-Стокса интегрируются точно. Показано, что решениям уравнений Навье-Стокса общего вида соответствуют метрики, описывающие в общей теории относительности пространства с кривизной отличной от нуля.

In this paper, we investigated solutions of the Navier-Stokes equations associated with the solutions of Einstein's equations for empty space. There exists a metric in which the Navier-Stokes equations are integrated exactly. We demonstrate that the solution of the Navier-Stokes equations of general form consistent metrics describing in general relativity space with nonzero curvature.

Ключевые слова: УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА,
ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.

Keywords: NAVIER-STOKES, GENERAL
RELATIVITY.

Введение

Вопрос о единственности и гладкости уравнений Навье-Стокса был сформулирован в виде шестой проблемы тысячелетия [1-2]. Для этой проблемы имеются, как математические доказательства существования сильного решения [3], так и доказательства потери единственности решений при взрывной неустойчивости за конечное время [4].

Как известно, уравнения Навье-Стокса являются математической моделью движения вязкой несжимаемой жидкости, поэтому для физических приложений представляют интерес не любые решения, а только те, которые описывают реальные течения. Но в природе жидкость движется при любых условиях, независимо от свойств единственности или гладкости поля скорости. Достаточно будет указать на явления турбулентности, кавитации, дробления, обтекание инородных тел и ударные волны, В каждом случае для

описания движения необходима своя модель, которая может значительно отличаться от модели Навье-Стокса [5-6].

С другой стороны, даже если поле скорости является единственным и гладким, то это еще не гарантирует, что такое движение непременно реализуется в природе. Возникает вопрос, можно ли математически разделить все решения на такие, которые имеют физический смысл и такие, которые заведомо не имеют такового смысла? В настоящей работе мы используем принцип относительности Эйнштейна [7], а также способ представления движения в общей теории относительности [8-30] для ответа на этот вопрос. В результате построены решения общего вида уравнений поля в вакууме в общей теории относительности Эйнштейна, описывающие классическое движение частиц в сплошной среде типа вязкой несжимаемой жидкости.

Принцип эквивалентности и уравнения гидродинамики в общей теории относительности

Уравнения Эйнштейна имеют вид [8-11]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = g_{\mu\nu} \Lambda + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1)$$

$$R_{ik} = R_{ijk}^j, \quad R = g^{ik} R_{ik},$$
$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma_{\beta\delta}^{\mu} \Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\mu} \Gamma_{\mu\delta}^{\alpha}, \quad (2)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} \right)$$

$R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса; Λ, G, c - космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно; $R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$ - тензор Римана, Γ_{kl}^i - символы Кристоффеля второго рода.

Ранее было установлено, что уравнение Эйнштейна связано с уравнениями Максвелла, Навье-Стокса, Янга-Миллса и Шредингера [13-28]. Указанные связи не являются случайными, так как уравнение Эйнштейна (1) отражает наиболее фундаментальные свойства движения и материи. В частности, принцип эквивалентности, положенный в основу общей теории относительности, гласит, что «инерция и тяжесть тождественны; отсюда и из результатов специальной теории относительности неизбежно следует, что симметричный «фундаментальный тензор» (g_{ik}) определяет метрические свойства пространства, движение тел по инерции в нем, а также и действие гравитации» [7].

Однако принцип эквивалентности, видимо, имеет и более широкое применение, например, в квантовой механике [16-20]. Фактически этот принцип означает, что любое ускорение, обусловленное внешними силами, эквивалентно некоторому изменению метрики. Действительно, в общем случае уравнения движения материальной точки в гравитационном поле можно представить в форме [7-11]

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \quad (3)$$

Рассмотрим метрику, связанную с движением материальной точки с заданной скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, имеем

$$ds^2 = dt^2 - (dx - u_1 dt)^2 - (dy - u_2 dt)^2 - (dz - u_3 dt)^2 \quad (4)$$

Вычисляя отличные от нуля коэффициенты аффинной связности в метрике (4), получим

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{du_1}{dt}, \quad \Gamma_{11}^3 = -\frac{du_2}{dt}, \quad \Gamma_{11}^4 = -\frac{du_3}{dt} \quad (5)$$

Уравнения (3) удовлетворяется тождественно, если мы положим

$$ds = dt, \quad \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad (6)$$

Следовательно, метрика (4) описывает классическое движение с ускорением. Уравнение (1) для пустого пространства и при равной нулю космологической константе также удовлетворяется, поскольку $R_{ik} = 0$ в метрике (4). Следовательно, движение с ускорением не изменяет кривизну пространства, если ускорение является только функцией времени.

Однако если мы предположим, что существует поле скорости, зависящее, например, от одной координаты, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, z)$, то придем к очень сложной теории, с отличной от нуля скалярной кривизной

$$R = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} \right)^2 - 4 \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial z} \right)^2 + u_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial t \partial z} \right] \quad (7)$$

Таким образом, в общей теории относительности для поддержания градиента скорости необходимо определенное распределение материи, что в общем случае не может быть выполнено. Поэтому теория релятивистской гидродинамики [11, 29-31] построена на преобразовании тензора энергии импульса, а не на преобразовании поля скорости.

Рассмотрим уравнения гидродинамики в общей теории относительности. Предполагая, что уравнения гидродинамики справедливы локально, можно записать эти уравнения в произвольных координатах. В случае вязкой жидкости имеем [29-30]:

$$\begin{aligned} (\varepsilon + P) Du^\mu &= \nabla^\mu P - \Delta_\nu^\mu \nabla_\sigma \Pi^{\nu\sigma} + \Pi^{\mu\nu} Du_\nu \\ D\varepsilon &= -(\varepsilon + P) \nabla_\mu u^\mu + \frac{1}{2} \Pi^{\mu\nu} \langle \nabla_\mu u_\mu \rangle \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь обозначено $u^\mu = (u^1, u^2, u^3, u^4)$ – локальная скорость жидкости; ε, P – плотность энергии и давление соответственно; тензор вязких напряжений имеет вид

$$\begin{aligned}
 \Pi^{\mu\nu} &= \eta \langle \nabla^\mu u^\nu \rangle \\
 d_\mu u^\nu &= \partial_\mu u^\nu + \Gamma_{\alpha\mu}^\nu u^\alpha \\
 D &= u_\mu d^\mu, \quad \nabla^\mu = \Delta^{\mu\nu} d_\nu \\
 \Delta^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu \\
 \langle A_\mu B_\nu \rangle &= A_\mu B_\nu + A_\nu B_\mu - \frac{2}{3} \Delta_{\mu\nu} A_\alpha B^\alpha
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Предполагается, что известно уравнение состояния, связывающее плотность энергии и давление. В случае идеальной жидкости первое уравнение (8) приводится к стандартному виду [10]

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial P}{\partial x^\nu} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \sqrt{g} (P + \rho) u^\mu u^\nu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu (P + \rho) u^\nu u^\lambda = 0
 \tag{10}$$

При таком подходе предполагается, что уравнения гидродинамики описывают динамику частицы жидкости независимо от того, что диктуется уравнением (3). Этот странный результат исторически связан с тем, что в уравнении (1) тензор энергии импульса материи может быть задан независимо от метрики [7-11, 29-31]. Однако в последнее время появились исследования [21-28] и другие, в которых уравнение Навье-Стокса выводится прямо из уравнений (1) в многомерном пространстве с метрикой вида [23]

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -rdt^2 + 2drdt + dx_i dx^i - 2(1 - r/r_c) u_i dx^i dt - (2/r_c) u_i dx^i dr \\
 &+ (1 - r/r_c) [(u^2 + 2P) dt^2 + (u_i u_j / r_c) dx^i dx^j] + (u^2 + 2P) dt dr / r_c \\
 &- (r^2 - r_c^2) \partial^2 u_i dx^i dt / r_c + \dots
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Уравнения Навье-Стокса следуют из уравнения (1) для пустого пространства с метрикой (11) путем решения методом последовательного приближения. В первом приближении выполняется уравнение неразрывности, во втором приближении выполняется система уравнений уравнения Навье-Стокса в форме

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{\nabla P}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (12)$$

Здесь кинематическая вязкость определяется как $\nu = \eta / \rho_0$. Отметим, что описание полей ускорения, обусловленных соответствующими гравитационными потенциалами, в рамках общей теории относительности является вполне логичным и обоснованным. Однако принцип эквивалентности получил различное толкование у различных авторов.

Так, например, в [8] утверждается, что при переходе во вращающуюся систему отсчета возникают стационарные гравитационные поля. С другой стороны, в [9] приведены доказательства того, что полей ускорения не существует, что эти поля являются фиктивными. Поэтому во вращающейся системе координат возникают не гравитационные поля, а фиктивные «поля тяготения». Однако в монографии [12] было показано, что любое силовое поле может привести к искривлению пространства-времени.

Вайнберг [10] различает инерционные и гравитационные силы, поэтому его формулировка принципа эквивалентности сводится к утверждению, что «локально-инерциальные координаты ξ_x^α , которые мы вводим в данной точке X , могут быть выбраны так, что первые производные метрического тензора в точке X исчезают».

Мы придерживаемся исходной формулировки принципа эквивалентности [7], из которого следует, что любое ускорение эквивалентно изменению метрики и, следовательно, может быть описано метрическим тензором и уравнениями (1)-(3).

Гравитационные поля в гидродинамические течения

Наша задача заключается в том, чтобы найти такие метрики, которые описывают движение параболическими уравнениями, похожими на

уравнения Навье-Стокса (12). То, что такие метрики существуют, доказано в работах [17-28] и других.

Однако метрики типа (11), в которых уравнения Навье-Стокса (12) выводятся из уравнения (1) для пустого пространства приводят к увеличению размерности самого пространства. Кроме того, теория гравитации в пространствах с метрикой типа (11) намного сложнее, чем теория уравнений Навье-Стокса. Поэтому есть основания для поиска более простых метрик, в которых уравнения поля сводятся к параболическим уравнениям. Рассмотрим метрику вида

$$ds^2 = \psi(t, x)dt^2 - p(\psi)dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (13)$$

Уравнения поля для пустого пространства нулевой кривизны в метрике (13) сводятся к одному уравнению второго порядка

$$-p'\psi_{tt} + \psi_{xx} + \frac{pp' - 2p''p\psi + p'^2\psi}{2p\psi}\psi_t^2 - \frac{p + p'\psi}{2p\psi}\psi_x^2 = 0 \quad (14)$$

Отметим, что уравнение (14) изменяет свой тип в зависимости от знака производной p' :

в области $p' < 0$ уравнение (14) имеет эллиптический тип;

в области $p' > 0$ уравнение (14) имеет гиперболический тип;

в области $p' = 0$ уравнение (14) имеет параболический тип.

Вычисляя коэффициенты аффинной связности в метрике (13) в четырехмерном пространстве-времени находим уравнения движения

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\psi_t}{2\psi}, & \Gamma_{21}^1 &= \frac{\psi_x}{2\psi}, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{p'\psi_t}{2\psi}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{\psi_x}{2p}, & \Gamma_{21}^2 &= \frac{p'\psi_t}{2p}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{p'\psi_x}{2p}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{\psi_t}{2\psi} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{p'\psi_t}{2\psi} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \frac{\psi_x}{\psi} \frac{dt}{ds} \frac{dx}{ds} = 0 \\ \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{\psi_x}{2p} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{p'\psi_x}{2p} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \frac{p'\psi_t}{p} \frac{dt}{ds} \frac{dx}{ds} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Первое уравнение (15) описывает хорошо известный эффект изменения скорости хода часов в гравитационном поле и при наличии скорости движения [8-10]. Используя первое уравнение (15) можно перейти во втором уравнении (15) к зависимости от времени по формулам

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2 x}{ds^2} = -\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \left(\frac{dx}{dt}\right) \left[\frac{\psi_t}{2\psi} + \frac{p'\psi_t}{2\psi} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\psi_x}{\psi} \frac{dx}{dt} \right] + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (16)$$

После чего оно приводится к виду

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\psi_x}{2p} + \frac{p'\psi_x}{2p} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{p'\psi_t}{p} \frac{dx}{dt} - \left(\frac{dx}{dt}\right) \left[\frac{\psi_t}{2\psi} + \frac{p'\psi_t}{2\psi} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\psi_x}{\psi} \frac{dx}{dt} \right] = 0 \quad (17)$$

Рассмотрим метрику вида

$$ds^2 = \exp[h(t, z)]dt^2 - \exp[f(x, y)]dx^2 - \exp[g(f)]dy^2 - \exp[p(h)]dz^2 \quad (18)$$

Уравнения поля для пустого пространства в метрике (18) сводятся к двум уравнениям второго порядка

$$\begin{aligned} e^h [2h_{zz} - (p'-1)h_z^2] - e^p [2p'h_{tt} + (2p''+p'^2-p')h_t^2] = 0 \\ e^f [2f_{yy} - (g'-1)f_y^2] + e^g [2g'f_{xx} + (2g''+g'^2-g')f_x^2] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Отметим, что уравнения (18) могут быть решены независимо. Каждое из них изменяет свой тип при изменении знаков производных p', g' соответственно. Полагая в уравнениях (19), что $p' = 0, g' = 0$, находим

$$\begin{aligned} e^h (2h_{zz} + h_z^2) - e^p 2p''h_t^2 = 0 \\ e^f (2f_{yy} + f_y^2) + e^g 2g''f_x^2 = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Главная причина, по которой мы исследуем эти уравнения, заключается в том, что гравитационные поля соответствующие метрикам (13) и (18)

описывают те самые «фиктивные» силы инерции, которые приносят столько трудноразрешимых проблем в теории уравнений Навье-Стокса [1-4].

Вычисляя коэффициенты аффинной связности в метрике (18) находим

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}h_t, & \Gamma_{41}^1 &= \frac{1}{2}h_z, & \Gamma_{44}^1 &= \frac{1}{2}e^{p-h}p'h_t, \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2}f_x, & \Gamma_{32}^2 &= \frac{1}{2}f_y, & \Gamma_{33}^2 &= -\frac{1}{2}e^{g-f}g'f_x, \\ \Gamma_{22}^3 &= -\frac{1}{2}e^{f-g}f_y, & \Gamma_{32}^3 &= \frac{1}{2}g'f_x, & \Gamma_{33}^3 &= \frac{1}{2}g'f_y, \\ \Gamma_{11}^4 &= \frac{1}{2}e^{h-p}h_z, & \Gamma_{41}^4 &= \frac{1}{2}p'h_t, & \Gamma_{44}^4 &= \frac{1}{2}ph_z \end{aligned} \quad (21)$$

Используя коэффициенты (21), запишем уравнения движения частиц в метрике (18)

$$\begin{aligned} \frac{d^2t}{ds^2} + \frac{h_t}{2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{p'h_t}{2}e^{p-h}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 + h_z\frac{dt}{ds}\frac{dz}{ds} &= 0 \\ \frac{d^2z}{ds^2} + \frac{h_z}{2}e^{h-p}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{p'h_z}{2p}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 + p'h_t\frac{dt}{ds}\frac{dz}{ds} &= 0 \\ \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{f_x}{2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - \frac{g'f_x}{2}e^{g-f}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + f_y\frac{dy}{ds}\frac{dx}{ds} &= 0 \\ \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{f_y}{2}e^{f-g}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \frac{g'f_y}{2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + g'f_x\frac{dy}{ds}\frac{dx}{ds} &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь первые два уравнение описывают движение в плоскости переменных (t, z) , а два другие – в плоскости (x, y) . Такое разделение движения является весьма существенным упрощением задачи, связанной с исследованием движения частиц в пограничном слое.

Уравнения Навье-Стокса и проблема турбулентной диффузии

Рассмотрим систему уравнений, описывающую неизотермическое атмосферное течение с учетом сил плавучести и переноса инертной примеси, имеем [6, 32]

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho_0} &= \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} (\rho - \rho_0) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \frac{\nu}{\text{Pr}} \nabla^2 T \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi &= \frac{\nu}{\text{Sc}} \nabla^2 \phi \end{aligned}$$

Здесь обозначено: ρ - плотность воздуха; $\mathbf{u} = (u, v, w)$ - вектор скорость потока; ν - кинематическая вязкость; P - давление за вычетом гидростатического атмосферного давления; \mathbf{g} - вектор ускорения свободного падения; ρ_0 - равновесная плотность; T - температура, Pr - число Прандтля; ϕ - массовая концентрация примеси; $\text{Sc} = \nu / D$ - число Шмидта; D - коэффициент молекулярной диффузии.

Гидростатическое уравнение и стандартное приближение Буссенеска для возмущений плотности заданы в виде

$$\nabla p_0 = \mathbf{g} \rho_0 (p_0, T_0), \quad \rho - \rho_0 = -\rho_0 \beta (T - T_0) \quad (24)$$

Здесь $\beta = -\rho^{-1} (\partial \rho / \partial T)_p$ - коэффициент расширения, $\beta = 1/T$ для идеального газа.

Определим систему декартовых координат таким образом, что бы ось Z была направлена против направления вектора ускорения свободного падения. Рельеф обтекаемой поверхности описывается уравнением $z = r(x, y)$ - рис. 1.

Граничные условия для параметров течения зададим на обтекаемой поверхности и на границе пограничного слоя следующим образом:

$$\begin{aligned} z = r(x, y): \quad \mathbf{u} &= 0, \quad T = T_g, \quad \phi = \phi_g \\ z = H: \quad \mathbf{u} &= U_0 (1, 0, 0), \quad T = T_0, \quad \phi = \phi_0. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь T_g - температура подстилающей поверхности, ϕ_g - концентрация примеси на поверхности, H - высота пограничного слоя, U_0 - скорость течения на высоте $z = H$, T_0, ϕ_0 - температура и концентрация примеси на высоте $z = H$ соответственно.

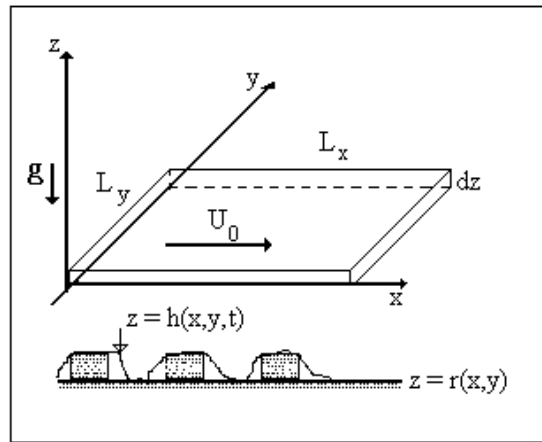


Рис.1. Геометрия течения над шероховатой поверхностью.

По координатам x, y зададим периодические граничные условия. Считаем, что в начальный момент скорость течения, температура и концентрация примеси описываются линейными функциями, имеем

$$t = 0 : u = U_0 z / H, \quad T = T_g + (T_0 - T_g) z / H, \quad \phi = \phi_g + (\phi_0 - \phi_g) z / H \quad (26)$$

Решение задачи (23)-(26) не было получено даже на уровне оценок типа [1]. Приближенные решения для турбулентных течений были получены в наших работах [6, 32] и других. Практически при любой функции распределения шероховатости $z = r(x, y)$ течение довольно быстро переходит в турбулентный режим с установлением логарифмического профиля скорости, температуры и концентрации примеси – рис. 2. Решение получено путем численного интегрирования системы уравнений (29) с граничными условиями (25) и начальными данными (26). Хорошо видно, что линейный профиль (26) за короткое время эволюционирует в логарифмический профиль.

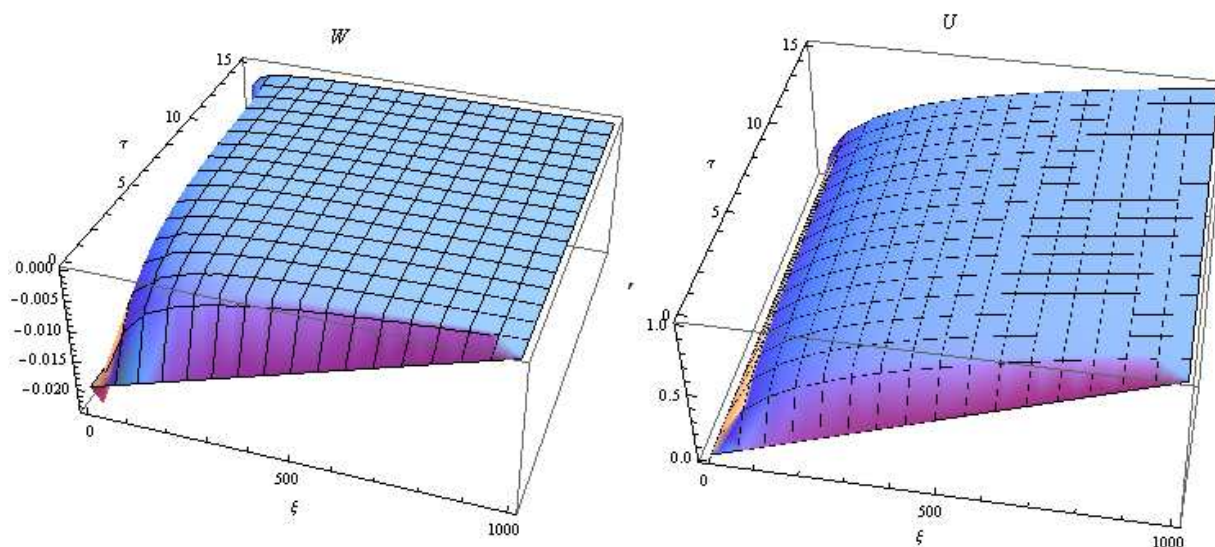


Рис. 2. Формирование логарифмического профиля скорости потока в турбулентном пограничном слое в координатах $\xi = n\eta$, $\tau = tu_\tau / h$.

Этот факт, установленный во многих и многих исследованиях, показывает, что природа изобрела наиболее экономичный способ движения в форме логарифмического профиля. Однако если логарифмический профиль подставить в первое уравнение (12), то можно убедиться, что уравнение Навье-Стокса не выполняется. Это результат означает, что в природе существуют силы, которые поддерживают логарифмический профиль, но которые не нашли отражения в уравнениях (12). Обычно происхождение этих сил приписывают так называемым напряжениям Рейнольдса, обусловленным турбулентной вязкостью или диффузией [31]. Однако мы, не без основания, приписываем эти силы полям гравитации, рассмотренным выше.

Действительно, обратимся к методу решения проблемы турбулентной диффузии, который был предложен в наших работах [6, 32-35] и других. Основная идея заключается во введении в уравнения (15) случайных параметров. Например, в пограничном слое можно представить вектор

скорости течения $\mathbf{u} = (u, v, w)$ в форме $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z/h(x, y, t), t)$, где $h = h(x, y, t)$ - это поверхность, описывающая динамическую шероховатость [6].

Предполагается, что такую поверхность можно характеризовать случайными параметрами h, h_t, h_x, h_y , которые имеют смысл высоты, скорости движения элемента и наклонов поверхности. Обозначим функцию распределения этих параметров $f_s = f_s(h, h_x, h_y, h_t)$.

Предположим, что $\eta = z/h = const$ и рассмотрим достаточно представительную область течения объемом $dV = L_x L_y dz$, где L_x, L_y - типичные масштабы течения в направлениях x, y соответственно – рис.1. Рассмотрим подобласть течения dV_s , которая принадлежит рассматриваемой области течения dV , и в которой случайные параметры h, h_t, h_x, h_y изменяются в интервалах $(h; h + dh)$, $(h_t; h_t + dh_t)$, $(h_x; h_x + dh_x)$, $(h_y; h_y + dh_y)$.

В общем случае подобласть dV_s является многосвязной областью, объем которой задается уравнением

$$dV_s = dV f_s(h, h_x, h_y, h_t) dh dh_x dh_y dh_t.$$

Случайная амплитуда скорости может быть определена путем суммирования выражения $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z/h(x, y, t), t)$ в объеме dV_s :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t) = \lim_{\delta V \rightarrow dV_s} \frac{1}{\delta V} \int \mathbf{u}(x, y, \eta, t) dx dy dz \quad (27)$$

Здесь δV - произвольный объем, вложенный в $dV = L_x L_y dz$ и содержащий dV_s . Очевидно, что $\tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t)$ является случайной функцией, поскольку зависит от случайных параметров. Уравнения, описывающие динамику $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t)$, следуют из уравнений (23), а их вывод дан в [6, 32].

Статистический момент порядка m случайной функции $\tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t)$ определяется следующим образом

$$\tilde{u}^m(z, t) = \int \tilde{u}^m(\eta, t, h, h_x, h_y, h_z) f_s(h, h_x, h_y, h_z) dh dh_x dh_y dh_z \quad (28)$$

В результате применения указанных преобразований система уравнений (23) принимает вид [6, 32]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{N}}{\rho_0 h} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \eta} &= \frac{\nu}{h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} - \\ &- \frac{\nu n^2 \eta}{h^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + \frac{\nu \mathbf{N}}{h^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} (\tilde{\rho} - \rho_0) \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} &= \frac{\nu}{\text{Pr} h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} - \frac{\nu n^2 \eta}{\text{Pr} h^2} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta} &= \frac{\nu}{\text{Sch}^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta} - \frac{\nu n^2 \eta}{\text{Sch}^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь $\tilde{W} = \tilde{w} - \eta \Phi$, $\Phi = h_z + h_x \tilde{u} + h_y \tilde{v}$, $\tilde{P} = \tilde{p} + \theta$, $n = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$, $\mathbf{N} = (-\eta h_x, -\eta h_y, 1)$.

Система уравнений (29) имеет установившееся решение в форме логарифмического профиля, как для скорости – рис. 2, так и для температуры и концентрации [6, 32-34]. В чем же отличие исходной системы (23) и выведенной из нее системы уравнений (29)? Отличие заключается в явном учете влияния микроскопической геометрии линий тока на основное течение. Геометрический фактор оказывается весьма существенным, не смотря на его малую величину.

Так, в пограничном слое над гладкой поверхностью безразмерный параметр динамической шероховатости, определенный по динамической скорости, составляет около $\lambda^+ = hu_\tau / \nu \approx 8.71$. Для сравнения укажем, что число Рейнольдса пограничного слоя атмосферы составляет порядка $\text{Re} = HU_0 / \nu \approx 10^7 \div 10^9$.

Большая величина числа Рейнольдса и малая величина толщины вязкого подслоя вполне соизмеримы в логарифмическом масштабе, когда реализуется логарифмический профиль скорости, который выводится из уравнений (29).

Силы, фигурирующие в динамических уравнениях (3), имеют геометрическую природу, что хорошо видно из приведенных примеров движения частиц в гравитационных полях в пространствах с метрикой (13) и (18). Уравнения (29) показывают, что такого рода гравитационные поля возникают и в течениях сплошной среды. Однако до последнего времени эти поля не были идентифицированы как гравитационные.

Метрика и гравитационные поля течений в пограничном слое

Рассмотрим течение над гладкой поверхностью, совпадающей с плоскостью $X\bar{Y}$. Определим систему декартовых координат таким образом, что бы ось Z была направлена по нормали к поверхности в сторону потока. Докажем, что если течение имеет компоненты скорости параллельные плоскости $X\bar{Y}$ и зависящие только от координаты z , то такая система может двигаться с произвольным ускорением при нулевой кривизне пространства.

Для доказательства рассмотрим обобщение метрики (4), связанной с движением материальной точки с произвольной скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, имеем

$$ds^2 = dt^2 - (dx - u_1 dt - U_1(z) dz)^2 - (dy - u_2 dt - U_2(z) dz)^2 - (dz - u_3 dt)^2 \quad (30)$$

Здесь $U_1(z), U_2(z)$ – произвольные функции, описывающие профиль скорости. Вычисляя отличные от нуля коэффициенты аффинной связности в метрике (30), получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= -\frac{du_1}{dt} - U_1 \frac{du_3}{dt}, & \Gamma_{44}^2 &= -\frac{dU_1}{dz} \\ \Gamma_{11}^3 &= -\frac{du_2}{dt} - U_2 \frac{du_3}{dt}, & \Gamma_{44}^3 &= -\frac{dU_2}{dz}, & \Gamma_{11}^4 &= -\frac{du_3}{dt} \end{aligned} \quad (31)$$

Уравнение (1) для пустого пространства и при равной нулю космологической константе удовлетворяется тождественно, поскольку $R_{ik} = 0$ в метрике (30). Следовательно, в этом случае возможно движение системы с произвольным ускорением $d\mathbf{u} / dt = \mathbf{a}(t)$ при нулевой кривизне пространства, что и требовалось доказать. Отметим, что к известным решениям уравнений Навье-Стокса такого типа относятся течения Пуазейля и Куэтта [31].

Полученный результат можно усилить, допустив наличия профиля третьей компоненты скорости. Соответствующая метрика имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - (dx - u_1 dt - U_1(z) dz)^2 - (dy - u_2 dt - U_2(z) dz)^2 - (dz - u_3 dt - U_3(z) dz)^2 \quad (32)$$

Вычисляя отличные от нуля компоненты тензора Риччи в метрике (32), находим

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{(1 - u_3^2)(1 + U_3)}{(1 + U_3^2 - 2U_3 u_3^2)^2} \frac{dU_3}{dz} \frac{du_3}{dt} \\ R_{14} &= R_{41} = \frac{(1 - U_3^2)u_3}{(1 + U_3^2 - 2U_3 u_3^2)^2} \frac{dU_3}{dz} \frac{du_3}{dt} \\ R_{44} &= -\frac{(1 + U_3^2)(1 + U_3)}{(1 + U_3^2 - 2U_3 u_3^2)^2} \frac{dU_3}{dz} \frac{du_3}{dt} \end{aligned} \quad (33)$$

Следовательно, в случае метрики (32) возможно движение системы с произвольным ускорением $d\mathbf{u} / dt = (du_1 / dt, du_2 / dt, 0)$ параллельным плоскости XY при нулевой кривизне пространства. Заметим, что в теории уравнений Навье-Стокса профиль с тремя компонентами скорости, зависящими от одной координаты, не представляет интереса, так как он не удовлетворяет уравнению неразрывности. Однако в случае системы

уравнений (29) такое решение существует и соответствует логарифмическому профилю - рис. 2.

Метрика (18) может быть использована для моделирования течения в пограничном слое. В общей теории относительности стационарные профили скорости в пограничном слое зависят от двух произвольных функций, удовлетворяющих условию нулевой кривизны пространства

$$e^f [2f_{yy} - (g'-1)f_y^2] + e^g [2g'f_{xx} + (2g'' + g'^2 - g')f_x^2] = 0 \quad (34)$$

Траектории частиц в метрике (18) описываются системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{f_x}{2} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - \frac{g'f_x}{2} e^{g-f} \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + f_y \frac{dy}{ds} \frac{dx}{ds} &= 0 \\ \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{f_y}{2} e^{f-g} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \frac{g'f_y}{2} \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + g'f_x \frac{dy}{ds} \frac{dx}{ds} &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

В теории уравнений Навье-Стокса к числу таких решений относится течение Блазиуса. В нестационарном случае используя метрику (13) можно описать течения жидкости при движении плоскости по заданному закону [31].

Наконец, заметим, что переход к турбулентности приводит к решениям с ненулевой кривизной пространства, как следует из выражения (7). Поэтому доказательство существования и гладкости решений уравнений Навье-Стокса, видимо, не может быть получено в плоских пространствах. Во всяком случае, таких решений, которые бы не противоречили общей теории относительности. Решения уравнений Навье-Стокса с неограниченным ростом производных скорости типа [4, 36-41] следует рассматривать в рамках общей теории относительности [7-11] с учетом влияния градиентов скорости на кривизну пространства-времени.

Библиографический список

1. Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса, существование и гладкость// УМН, -2003., - Т. 58, - №2 (350), - С. 45-78.
2. C. L. Fefferman. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation. The millennium prize problems/ Clay Math. Inst., Cambridge, MA, 2006, pp. 57-67.
3. Отелбаев М. Существование сильного решения уравнения Навье-Стокса// Математический журнал, Том 13, №4 (50), 2013.
4. TERENCE E TAO. FINITE TIME BLOWUP FOR AN AVERAGED THREE-DIMENSIONAL NAVIER-STOKES EQUATION// arXiv:1402.0290v2 [math.AP] 6 Feb 2014.
5. Kiselev, S.P., Ruev, G.A., Trunев, A.P., Fomin, V.M. & Schavaliev, M.S. Shook-wave phenomena in two-component and two-phase flows. - Nauka, Novosibirsk, 261 p., 1992 (in Russian).
6. Trunев A. P. Theory of Turbulence and Model of Turbulent Transport in the Atmospheric Surface Layer. - Russian Academy of Sciences, Sochi, 160 p., 1999 (in Russian).
7. Einstein A. Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 44, 2, 778—786; Erklärung der Perihelbeivegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 47, 2, 831—839; Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. Phys., 1916, 49, 769—822; Nahemngsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, 1, 688—696; Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1917, 1, 142—152; Über Gravitationwellen. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1918, 1, 154—167.
8. Ландау Л. Д, Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.2. Теория поля. – 7 изд. – М.: Наука. - 1988. - стр. 329-330; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. The Classical Theory of Fields. Pergamon, New York, second edition, 1962.
9. В.А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения (2-е изд.). – М.: ГИФМЛ, 1961.
10. Steven Weinberg. Gravitation and Cosmology. – John Wiley & Sons, 1972.
11. A.Z. Petrov. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.
12. С. А. Подосенов. Пространство, время и классические поля связанных структур. М.: Компания Спутник +, 2000, 445 с.
13. J. A. Shifflett. A modification of Einstein-Schrodinger theory that contains Einstein-Maxwell-Yang-Mills theory// Gen.Rel.Grav.41:1865-1886, 2009.
14. L.N.Krivososov, V.A.Luk'aynov. The relationship between the Yang-Mills and Einstein and Maxwell Equations// J. SibFU, Math. and Phys, 2(2009), no. 4, 432-448 (in Russian).
15. Fabio Grangeiro Rodrigues, Roldao da Rocha, Waldyr A. Rodrigues Jr. The Maxwell and Navier-Stokes that Follow from Einstein Equation in a Spacetime Containing a Killing Vector Field// AIP Conference Proceedings, v. 1483, 277-295, 2012.
16. Alon E. Faraggi and Marco Matone. The Equivalence Postulate of Quantum Mechanics// arXiv:hep-th/9809127v2, 6 Aug 1999.
17. Трунев А.П. Гравитационные волны и квантовая теория Шредингера// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар:

КубГАУ, 2014. – №02(096). С. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf>

18. Трунев А.П. Гравитационные волны и стационарные состояния квантовых и классических систем// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №03(097). – IDA [article ID]: 0971400090. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/03/pdf/90.pdf>

19. Трунев А.П. Атом Шредингера и Эйнштейна// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №03(097). – IDA [article ID]: 0971400094. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/03/pdf/90.pdf>

20. Трунев А.П., Е.В. Луценко. Гравитационные волны и коэффициент эмерджентности классических и квантовых систем// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №03(097). С. 1343 – 1366. – IDA [article ID]: 0971403092. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/03/pdf/92.pdf>

21. C. Eling. Hydrodynamics of spacetime and vacuum viscosity// JHEP, 11, 048, 2008.

22. C. Eling, I. Fouxon, Y. Oz. Gravity and Geometrization of Turbulence: An Intriguing Correspondence// arXiv:1004.2632, 28 Oct, 2010.

23. I. Bredberg, C. Keeler, V. Lysov, A. Strominger. From Navier-Stokes to Einstein// arXiv: 1101.2451, 12 Jan, 2011.

24. C. Eling, Y. Oz. Holographic Vorticity in the Fluid/Gravity Correspondence// arXiv:1308.1651, 28 Oct, 2013.

25. Sayantani Bhattacharyya *et all.* Conformal Nonlinear Fluid Dynamics from Gravity in Arbitrary Dimensions// arXiv: 0809.4272v2, 3 Dec, 2008.

26. Sayantani Bhattacharyya *et all.* The Incompressible Non-Relativistic Navier-Stokes Equation from Gravity // arXiv: 0810.1545v3, 20 Jul, 2009.

27. Michael Haack, Amos Yarom. Nonlinear viscous hydrodynamics in various dimensions using AdS/CFT// ArXiv: 08064602v2, 11 Sep, 2011.

28. V.E. Hubeny. The Fluid/Gravity Correspondence: a new perspective on the Membrane Paradigm// arXiv:1011.4948v2, February 22, 2011.

29. R. Baier, P. Romatschke, U.A. Wiedemann. Dissipative Hydrodynamics and Heavy Ion Collisions// arXiv:hep-ph/0602249v2, 17 Mar, 2006.

30. N. Anderson, G.L. Comer. Relativistic fluid dynamics: physics for many different scales// arXiv:gr-gc/0605010v2, February 6, 2008.

31. L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics. - Pergamon, Oxford, UK, first edition, 1959.

32. Трунев А.П. Теория турбулентности и моделирование турбулентного переноса в атмосфере. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №05(059). С. 179 – 243; №06(060). С. 412 – 491.

33. Трунев А.П. Теория турбулентности и модель влияния плотности шероховатости // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного

аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №04(058). С. 348 – 382.

34. Трунев А.П. Теория и константы пристенной турбулентности // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №04(058). С. 383 – 394.

35. Trunev, A. P. Diffuse processed in turbulent boundary layer over rough surface/ Air Pollution III, Vol.1. Theory and Simulation, eds. H. Power, N. Moussiopoulos & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Publ., Southampton, pp. 69-76, 1995.

36. J. Leray, Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Math. J. 63, 193–248, 1934.

37. JORMA JORMAKKA. SOLUTIONS TO THREE-DIMENSIONAL NAVIER-STOKES EQUATIONS FOR INCOMPRESSIBLE FLUIDS//arXiv:0809.3553v7 [math.GM], 1 Dec 2012.

38. R. Grundy, R. McLaughlin. Three-dimensional blow-up solutions of the Navier-Stokes equations//IMA J. Appl. Math. 63, no. 3, pages 287-306, 1999.

39. V. A. Galaktionov, J. L. Vazquez. THE PROBLEM OF BLOW-UP IN NONLINEAR PARABOLIC EQUATIONS//DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS, Volume 8, Number 2, pp. 399–433, April 2002.

40. V. A. Galaktionov, J. L. Vazquez. Blow-up of a class of solutions with free boundaries for the Navier-Stokes equations// Adv. Differ. Eq. 4, 291–321. 1997.

41. Z. Xin. Blow-up of smooth solutions to the incompressible Navier-Stokes equation with compact density// Comm. Pure Appl. Math. 51, 229–240. 1998.

Bibliograficheskij spisok

1. Ladyzhenskaja O.A. Shestaja problema tysjacheletija: uravnenija Nav'e-Stoksa, sushhestvovanie i gladkost// UMN, -2003., - T. 58, - №2 (350), - S. 45-78.

2. C. L. Fefferman. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation. The millennium prize problems/ Clay Math. Inst., Cambridge, MA, 2006, pp. 57-67.

3. Otelbaev M. Sushhestvovanie sil'nogo reshenija uravnenija Nav'e-Stoksa// Matematicheskij zhurnal, Tom 13, №4 (50), 2013.

4. TERENCE E TAO. FINITE TIME BLOWUP FOR AN AVERAGED THREE-DIMENSIONAL NAVIER-STOKES EQUATION// arXiv:1402.0290v2 [math.AP] 6 Feb 2014.

5. Kiselev, S.P., Ruev, G.A., Trunev, A.P., Fomin, V.M. & Schvaliev, M.S. Shook-wave phenomena in two-component and two-phase flows. - Nauka, Novosibirsk, 261 p., 1992 (in Russian).

6. Trunev A. P. Theory of Turbulence and Model of Turbulent Transport in the Atmospheric Surface Layer. - Russian Academy of Sciences, Sochi, 160 p., 1999 (in Russian).

7. Einstein A. Zur allgemeinen Relativitatstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 44, 2, 778—786; Erklarung der Perihelbeivegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitdtstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 47, 2, 831—839; Die Grundlage der allgemeinen Relativitatstheorie. Ann. Phys., 1916, 49, 769—822; Nahemngsweise Integration der

Feldgleichungen der Gravitation. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, 1, 688—696; Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1917, 1, 142—152; Über Gravitationswellen. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1918, 1, 154—167.

8. Landau L. D, Lifshic E. M. Teoreticheskaja fizika. T.2. Teorija polja. – 7 izd. – M.: Nauka. - 1988. - str. 329-330; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. The Classical Theory of Fields. Pergamon, New York, second edition, 1962.

9. V.A. Fok. Teorija prostranstva, vremeni i tjadgotenija (2-e izd.). – M.: GIFML, 1961.

10. Steven Weinberg. Gravitation and Cosmology. – John Wiley & Sons, 1972.

11. A.Z. Petrov. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.

12. S. A. Podosenov. Prostranstvo, vremja i klassicheskie polja svjazannyh struktur. M.: Kompanija Sputnik +, 2000, 445 s.

13. J. A. Shifflett. A modification of Einstein-Schrodinger theory that contains Einstein-Maxwell-Yang-Mills theory// Gen.Rel.Grav.41:1865-1886, 2009.

14. L.N.Krivososov, V.A.Luk'aynov. The relationship between the Yang-Mills and Einstein and Maxwell Equations// J. SibFU, Math. and Phys, 2(2009), no. 4, 432–448 (in Russian).

15. Fabio Grangeiro Rodrigues, Roldao da Rocha, Waldyr A. Rodrigues Jr. The Maxwell and Navier-Stokes that Follow from Einstein Equation in a Spacetime Containing a Killing Vector Field// AIP Conference Proceedings, v. 1483, 277-295, 2012.

16. Alon E. Faraggi and Marco Matone. The Equivalence Postulate of Quantum Mechanics// arXiv:hep-th/9809127v2, 6 Aug 1999.

17. Trunев A.P. Gravitacionnye volny i kvantovaja teorija Shredingera// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №02(096). S. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf>

18. Trunев A.P. Gravitacionnye volny i stacionarnye sostojanija kvantovyh i klassicheskikh sistem// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №03(097). – IDA [article ID]: 0971400090. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/03/pdf/90.pdf>

19. Trunев A.P. Atom Shredingera i Jejshtejna// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №03(097). – IDA [article ID]: 0971400094. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/03/pdf/90.pdf>

20. Trunев A.P., E.V. Lucenko. Gravitacionnye volny i kojefficient jemerdzhentnosti klassicheskikh i kvantovyh sistem// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №03(097). S. 1343 – 1366. – IDA [article ID]: 0971403092. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/03/pdf/92.pdf>

21. C. Eling. Hydrodynamics of spacetime and vacuum viscosity// JHEP, 11, 048, 2008.

22. C. Eling, I. Fouxon, Y. Oz. Gravity and Geometrization of Turbulence: An Intriguing Correspondence// arXiv:1004.2632, 28 Oct, 2010.

23. I. Bredberg, C. Keeler, V. Lysov, A. Strominger. From Navier-Stokes to Einstein// arXiv: 1101.2451, 12 Jan, 2011.

24. C. Eling, Y. Oz. Holographic Vorticity in the Fluid/Gravity Correspondence// arXiv:1308.1651, 28 Oct, 2013.

25. Sayantani Bhattacharyya et all. Conformal Nonlinear Fluid Dynamics from Gravity in Arbitrary Dimensions// arXiv: 0809.4272v2, 3 Dec, 2008.

26. Sayantani Bhattacharyya et all. The Incompressible Non-Relativistic Navier-Stokes Equation from Gravity // arXiv: 0810.1545v3, 20 Jul, 2009.

27. Michael Haack, Amos Yarom. Nonlinear viscous hydrodynamics in various dimensions using AdS/CFT// ArXiv: 08064602v2, 11 Sep, 2011.

28. V.E. Hubeny. The Fluid/Gravity Correspondence: a new perspective on the Membrane Paradigm// arXiv:1011.4948v2, February 22, 2011.

29. R. Baier, P. Romatschke, U.A. Wiedemann. Dissipative Hydrodynamics and Heavy Ion Collisions// arXiv:hep-ph/0602249v2, 17 Mar, 2006.

30. N. Anderson, G.L. Comer. Relativistic fluid dynamics: physics for many different scales// arXiv:gr-gc/0605010v2, February 6, 2008.

31. L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics. - Pergamon, Oxford, UK, first edition, 1959.

32. Trunev A.P. Teorija turbulentnosti i modelirovanie turbulentnogo perenosa v atmosfere. // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №05(059). S. 179 – 243; №06(060). S. 412 – 491.

33. Trunev A.P. Teorija turbulentnosti i model' vlijaniya plotnosti sherohovatosti // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №04(058). S. 348 – 382.

34. Trunev A.P. Teorija i konstanty pristennoj turbulentnosti // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №04(058). S. 383 – 394.

35. Trunev, A. P. Diffuse processed in turbulent boundary layer over rough surface/ Air Pollution III, Vol.1. Theory and Simulation, eds. H. Power, N. Moussiopoulos & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Publ., Southampton, pp. 69-76, 1995.

36. J. Leray, Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissent l'espace, Acta Math. J. 63, 193–248, 1934.

37. JORMA JORMAKKA. SOLUTIONS TO THREE-DIMENSIONAL NAVIER-STOKES EQUATIONS FOR INCOMPRESSIBLE FLUIDS//arXiv:0809.3553v7 [math.GM], 1 Dec 2012.

38. R. Grundy, R. McLaughlin. Three-dimensional blow-up solutions of the Navier-Stokes equations//IMA J. Appl. Math. 63, no. 3, pages 287-306, 1999.

39. V. A. Galaktionov, J. L. Vazquez. THE PROBLEM OF BLOW-UP IN NONLINEAR PARABOLIC EQUATIONS//DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS, Volume 8, Number 2, pp. 399–433, April 2002.

40. V. A. Galaktionov, J. L. Vazquez. Blow-up of a class of solutions with free boundaries for the Navier-Stokes equations// Adv. Differ. Eq. 4, 291–321. 1997.

41. Z. Xin. Blow-up of smooth solutions to the incompressible Navier-Stokes equation with compact density// Comm. Pure Appl. Math. 51, 229–240. 1998.