УДК 519.642

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА В ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ ПОТОКОМ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

Гайденко Станислав Викторович
к. ф-м. н., доцент
Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

В работе предложен численный метод решения интегрального уравнения с ядром, имеющим особенности первого порядка по обеим переменным. Решение аппроксимируется кусочно-линейными функциями по каждой переменной. Коэффициенты определяются методом коллокации. Сингулярные интегралы от базисных функций вычисляются точно.

Ключевые слова: СИНГУЛЯРНОЕ ЯДРО, ИНТЕГРАЛЬОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА, МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ, ТОНКОЕ КРЫЛО, СЖИМАЕМЫЙ ГАЗ, СКАЧОК ДАВЛЕНИЯ.

UDC 519.642

THE NUMERICAL METHOD OF SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL SINGULAR INTEGRAL EQUATION OF THE FIRST KIND IN THE PROBLEM OF THE FLOW OVER THE THIN PROFILE BY THE STREAM OF COMPRESSIBLE GAS

Gaidenko Stanislav Viktorovich
Dr.Sc.(Phys.-Math.), associate professor
Kuban State University, Krasnodar, Russia

This work deals with the numerical method of solution of integral equation with the kernel, which has the first order singularities by two variables. The solution is approximated by piecewise linear functions by every variable. The coefficients are determined by the collocation method. The singular integrals of basic functions are calculated exact.

Keywords: SINGULAR KERNEL, INTEGRAL EQUATION OF THE FIRST KIND, COLLOCATION METHOD, THIN WING, COMPRESSIBLE GAS, PRESSURE-JUMP.

Математическая модель тонкого крыла, движущегося с постоянной дозвуковой скоростью в сжимаемом потоке газа, представляет собой смешанную краевую задачу в частных производных для уравнения гиперболического типа относительно потенциала возмущенных скоростей частиц газа в окружающем пространстве [1]. В работе автора [2] рассмотрена дифференциальная задача для крыла бесконечного размаха с произвольной зависимостью от времени всех физических характеристик. В этой модели крыло представлено профилем, который в подвижной системе координат проектируется на отрезок $x \in [-a, a]$ прямой $y = 0$. Применяя интегральные преобразования Лапласа по временной переменной и Фурье по пространственной переменной, направленной вдоль набегающего потока газа, удается свести дифференциальную задачу в частных производных к паре задач для обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменной y снизу и сверху профиля. Решения этих дифференциальных уравнений связаны граничным условием непрерывности нормальной составляющей скорости на крыле и на вихревом следе. Это граничное условие представляет собой уравнение в пространстве комплекснозначных функций от переменных в образах интегральных преобразований Лапласа и Фурье. Неизвестной функцией является образ скачка давления на крыле, через который могут быть выражены все физические характеристики крыла и окружающего потока газа. Применить к полученному функциональному уравнению обратное преобразование Фурье возможно лишь в пространстве обобщенных функций медленного роста. В итоге одновременного обращения интегральных преобразований возникает сингулярное интегральное уравнение первого рода, численному решению которого посвящена настоящая работа.

Пусть $\gamma(t,x)$ – скачок давления в точке $x \in (-a,a)$ в момент времени $t \geq 0,$ в начальный момент $\gamma(0,x)=0$. На задней кромке профиля выполняется условие Жуковского-Чаплыгина $\gamma(t,à)=0$. Во внутренних точках профиля получено интегральное уравнение

$$\int_{-a}^{a}\int_{0}^{t}\gamma(\tau,s)\mathrm{K}_0(t-\tau,x-s)\,d\tau ds = 2\pi V\int_{0}^{t}V_y(x,\tau)\,d\tau, \qquad (1)$$

где $\mathrm{K}_0(t,x)=\dfrac{\sqrt{(Vt)^2-M^2(Vt-x)^2}}{x\cdot(x-Vt)}$ при неотрицательном подкоренном выражении и ноль вне этого множества. Здесь V – скорость набегающего потока, $V_y(t,x)$ – заданная вертикальная составляющая скорости на профиле, $M=\dfrac{V}{C}$ – постоянная Маха, C – скорость звука в окружающей среде. Рассматривается дозвуковое обтекание, то есть $0<M<1$.

Ядро интегрального оператора в уравнении (1) по каждой переменной имеет неинтегрируемые особенности, интеграл следует понимать как повторный, причем однократные интегралы понимаются в смысле главного значения. Как показывают непосредственные вычисления интеграла от ядра по его носителю, результат не зависит от порядка интегрирования.

Искомая функция $\gamma(t,x)$ предполагается непрерывной в полуполосе $t \ge 0$, $-a < x \le a$. Считается известным поведение этой функции в окрестности передней кромки профиля: $\gamma(x,t) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right)$ при $x \to -a+0$.

Для построения дискретной модели зададим натуральное число $n \ge 2$ и построим разбиение полосы с шагами $h_x = \frac{2a}{n+1}$ и $h_\tau > 0$. На отрезке $[-a,a]$ введём две системы точек:

$x_i = -a + \frac{h_x}{2} + ih_x$ – точки коллокации, $i = 1,2,...,n$,

$s_i = -a + ih_x$ – узлы разбиения для задания базисных функций, $i = 0,1,2,...,n+1$, $s_{n+1} = a$.

Определим кусочно-линейные базисные функции:

$$\varphi_i(s) = \begin{cases} \frac{s - s_{i-1}}{h_x}, s_{i-1} \le s \le s_i, \\ \frac{s_{i+1} - s}{h_x}, s_i \le s \le s_{i+1}, \qquad i = 1,2,...,n \\ 0, s \notin [s_{i-1}, s_{i+1}], \end{cases}$$

$\varphi_0(s) = \frac{s_1 - s}{h_x}$ при $-a < s \le s_1 = -a + h$ и $\varphi_0(s) = 0$ при $s \ge s_1$.

На j-ом временном слое $t_j = j \cdot h_\tau$, $j \ge 1$, приближённое решение представим в виде сплайна первой степени $\gamma_h(t_j, s) = \sum_{i=0}^{n} \gamma_{i,j} \varphi_i(s)$. В узловых точках k-го временного слоя $t_k = k \cdot h_\tau$, $k \ge 1$, коэффициенты приближённые решения $\gamma_{i,k}$ определяются методом коллокаций:

$$\int_{-a}^{a}\int_{0}^{t_k} \gamma_h(\tau,s) \mathrm{K}_0(t_k - \tau, x_l - s)\, d\tau ds = 2\pi V \int_{0}^{t_k} V_y(x_l, \tau)\, d\tau, \quad l = 1,2,...,n. \tag{2}$$

Для этого необходимо доопределить функцию $\gamma_h(\tau,s)$ между временными слоями. Зададим на прямоугольнике $P_{i,j}=\{(s,\tau): s_i\le s\le s_{i+1}, t_j\le\tau\le t_{j+1}\}$ кусочно-линейное восполнение приближенного решения:

$$\gamma_h(\tau,s)=\frac{\tau-t_j}{h_\tau}\left(\gamma_{i,j+1}\frac{s_{i+1}-s}{h_x}+\gamma_{i+1,j+1}\frac{s-s_i}{h_x}-\gamma_{i,j}\frac{s_{i+1}-s}{h_x}-\gamma_{i+1,j}\frac{s-s_i}{h_x}\right)+$$
$$+\gamma_{i,j}\frac{s_{i+1}-s}{h_x}+\gamma_{i+1,j}\frac{s-s_i}{h_x}.$$

В уравнении (2) неизвестными являются только значения $\gamma_{i,k}$, $i=0,1,2,...,n,$ а значения $\gamma_{i,j}$ для $j<k$ считаются известными (на нулевом слое заданы начальные условия $\gamma_{i,0}=0$, на первом слое $\gamma_{i,1}$ будут найдены из уравнения (2) при $k=1$, затем, увеличивая всякий раз k на единицу, будем находить решения на очередном временном слое).

Чтобы найти в уравнении (2) коэффициенты при $\gamma_{i,j}$, нужно вычислить по прямоугольнику $P_{i,j}$ интегралы

$$I^1_{i,j}=\iint_{P_{ij}}K_0(t_k-\tau,x_l-s)dsd\tau,$$

$$I^s_{i,j}=\frac{1}{h_x}\iint_{P_{ij}}K_0(t_k-\tau,x_l-s)\cdot(x_l-s)dsd\tau,$$

$$I^\tau_{i,j}=\frac{1}{h_\tau}\iint_{P_{ij}}K_0(t_k-\tau,x_l-s)\cdot(t_k-\tau)dsd\tau,$$

$$I^{s,\tau}_{i,j}=\frac{1}{h_xh_\tau}\iint_{P_{ij}}K_0(t_k-\tau,x_l-s)\cdot(t_k-\tau)\cdot(x_l-s)\,dsd\tau.$$

В этих обозначениях

$$\iint_{P_{ij}}\gamma_h(\tau,s)K_0(t_k-\tau,x_l-s)\,dsd\tau=$$

$$=\gamma_{i,j+1}\cdot\left[-I^{s,\tau}_{i,j}+(k-j)I^s_{i,j}-\left(i-l+\frac{1}{2}\right)I^\tau_{i,j}+(k-j)\left(i-l+\frac{1}{2}\right)I^1_{i,j}\right]+$$

$$+\gamma_{i+1,j+1}\cdot\left[I^{s,\tau}_{i,j}-(k-j)I^s_{i,j}-\left(l-i+\frac{1}{2}\right)I^\tau_{i,j}+(k-j)\left(l-i++\frac{1}{2}\right)I^1_{i,j}\right]+$$

$$+\gamma_{i,j}\cdot\left[I_{i,j}^{s,\tau}-(k-j-1)I_{i,j}^{s}+\left(i-l+\frac{1}{2}\right)I_{i,j}^{\tau}-(k-j-1)\left(i-l+\frac{1}{2}\right)I_{i,j}^{1}\right]+$$

$$+\gamma_{i+1,j}\cdot\left[-I_{i,j}^{s,\tau}+(k-j-1)I_{i,j}^{s}+\left(l-i+\frac{1}{2}\right)I_{i,j}^{\tau}-(k-j-1)\left(l-i+\frac{1}{2}\right)I_{i,j}^{1}\right].$$

В известном методе дискретных вихрей [3] построения приближенного решения одномерного интегрального уравнения с сингулярным ядром в классе функций, растущих вблизи левого конца отрезка, окрестность $(-a;-a+h_x)$ не учитывается в методе коллокаций, что влечёт рост погрешности приближённого решения вблизи этого конца. Мы аппроксимируем решение на каждом временном слое для всех значений $s\in(-a;a)$, но n условий коллокаций недостаточно для определения $n+1$ значений приближенного решения в узлах $s_0,s_1,...,s_n$. В качестве дополнительного условия используем известную асимптотику точного решения: $\gamma(\tau,s)=\dfrac{C_{0j}}{\sqrt{s+a}}+o\left(\dfrac{1}{\sqrt{s+a}}\right)$ при $s\to-a+0$. Положим на прямоугольнике P_{0j} интегральное среднее значение приближенного решения $\gamma_h(\tau,s)$ равным среднему асимптотическому значению точного решения:

$$h_x h_\tau\frac{\gamma_{0,j}+\gamma_{1,j}+\gamma_{0,j+1}+\gamma_{1,j+1}}{4}=\iint\limits_{P_{0j}}\gamma_h(\tau,s)\,dsd\tau=\iint\limits_{P_{0j}}\frac{C_{0j}}{\sqrt{s+a}}\,dsd\tau=2C_{0j}\frac{h_\tau}{\sqrt{h_x}}.$$

С другой стороны, на правой стороне прямоугольника можно считать среднее значение сеточной функции близким к асимптотическому значению точного решения: $\dfrac{C_{0j}}{\sqrt{h_x}}\approx\dfrac{\gamma_{1j}+\gamma_{1j-1}}{2}$. Отсюда, пренебрегая погрешностями, получаем $\gamma_{0j}+\gamma_{0j+1}=3\left(\gamma_{1j}+\gamma_{1j+1}\right)$. Чтобы не выделять $j=0$ при подсчёте слагаемых в (2), положим $\gamma_{0j}=3\gamma_{1j}$ для всех $j\geq 0$.

Перейдём к формированию матрицы и свободного члена в методе коллокаций (2). Как уже отмечалось, неизвестными будут значения сеточной функции на k-м временном слое $\gamma_{i,k}$, остальные слагаемые будут отнесены к свободному члену алгебраической системы. На заданном временном слое t_k при фиксированной точке коллокации x_l, $l=1,...,n$, коэффициенты при $\gamma_{i,j}$ в l-м уравнении определяются интегралом I_{ij} от функции, зависящей от точки (x_l,t_k). Заменой переменных интегрирования покажем, что эти коэффициенты зависят только от разностей индексов $i-l=i', k-j=j'$. Введём обозначения $\lambda=s-x_l$, $\theta=V(\tau-t_k)$. При такой замене переменных прямоугольник $P_{i,j}$ перейдёт в прямоугольник

$$Q_{i',j'}=\left\{(\lambda,\theta): i'h_x-\frac{h_x}{2}\le\lambda\le i'h_x+\frac{h_x}{2}, -Vh_\tau j'\le\theta\le -Vh_\tau(j'-1)\right\}, \text{ а}$$

$$I^1_{i,j}=\iint\limits_{P_{i,j}}\frac{\sqrt{V^2(t_k-\tau)^2-M^2(x_l-s-V(t_k-\tau))^2}}{(x_l-s-V(t_k-\tau))\cdot(x_l-s)}dsd\tau=\frac{1}{V}\iint\limits_{Q_{i',j'}}\frac{\sqrt{\theta^2-M^2(\theta-\lambda)^2}}{(\lambda-\theta)\lambda}d\lambda d\theta=I^1_{i',j'}.$$

Аналогично интегралы $I^s_{i,j}$, $I^\tau_{i,j}$, $I^{s,\tau}_{i,j}$ преобразуются в $J^\lambda_{i',j'}$, $J^\theta_{i',j'}$, $J^{\lambda,\theta}_{i',j'}$.

В новых обозначениях на прямоугольнике P_{ij} кусочно-линейная функция имеет вид

$$\gamma_h(s,\tau)=\left(-\frac{\theta}{h_\tau}+k-j\right)\cdot\left[\gamma_{i,j+1}\cdot\left(-\frac{\lambda}{h_x}+i-l+\frac{1}{2}\right)+\gamma_{i+1,j+1}\cdot\left(\frac{\lambda}{h_x}+l-i+\frac{1}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\gamma_{i,j}\cdot\left(-\frac{\lambda}{h_x}+i-l+\frac{1}{2}\right)-\gamma_{i+1,j}\cdot\left(\frac{\lambda}{h_x}+l-i+\frac{1}{2}\right)\right]+\gamma_{i,j}\cdot\left(-\frac{\lambda}{h_x}+i-l+\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\gamma_{i+1,j}\cdot\left(\frac{\lambda}{h_x}+l-i+\frac{1}{2}\right);\quad i=1,...,n;\ j=0,1,...,k-1.$$

После интегрирования правой части по прямоугольнику P_{ij}

$$\iint\limits_{P_{ij}}\gamma_h(s,\tau)\frac{K_0(x_l-s,V(t_k-\tau))}{x_l-s}dsd\tau=$$

$$=\gamma_{i,j+1}\cdot\left[J^{\lambda,\theta}_{i',j'}-(k-j)J^\lambda_{i',j'}-\left(i-l+\frac{1}{2}\right)J^\theta_{i',j'}+(k-j)\left(i-l+\frac{1}{2}\right)J^1_{i',j'}\right]+$$

$$+\gamma_{i+1,j+1}\cdot\left[-J^{\lambda,\theta}_{i',j'}+(k-j)J^\lambda_{i',j'}-\left(l-i+\frac{1}{2}\right)J^\theta_{i',j'}+(k-j)\left(l-i+\frac{1}{2}\right)J^1_{i',j'}\right]+\qquad(3)$$

$$+\gamma_{i,j}\cdot\left[-J^{\lambda,\theta}_{i',j'}+(k-j-1)J^{\lambda}_{i',j'}+\left(i-l+\frac{1}{2}\right)J^{\theta}_{i',j'}-(k-j-1)\left(i-l+\frac{1}{2}\right)J^{1}_{i',j'}\right]+$$

$$+\gamma_{i+1,j}\cdot\left[J^{\lambda,\theta}_{i',j'}-(k-j-1)J^{\lambda}_{i',j'}+\left(l-i+\frac{1}{2}\right)J^{\theta}_{i',j'}-(k-j-1)\left(l-i+\frac{1}{2}\right)J^{1}_{i',j'}\right]$$

Здесь $i=0,1,...,n$, при $i=n$ считаем $\gamma_{n+1,j}=\gamma_{n+1,j+1}=0$.

Выясним структуру матрицы и свободного члена системы (2). Подкоренное выражение в ядре интегрального уравнения неотрицательно в треугольнике, с вершиной в точке $\tau=t_k$, $s=x_l$, с основанием на координатной оси $\tau=0$, ограниченном боковыми сторонами на прямых $s=x_l-(c+V)(t_k-\tau)$ и $s=x_l+(c-V)(t_k-\tau)$. Подынтегральная функция имеет особенности первого порядка на медиане этого треугольника $s=x_l-V(t_k-\tau)$ и на его высоте $s=x_l$, поэтому интегралы понимаются в смысле главного значения.

Всякий раз, когда мы говорим об интеграле по прямоугольнику P_{ij}, имеем в виду интеграл по пересечению этого прямоугольника с треугольником в вершине (x_l,t_k). На временном промежутке $[t_j,t_{j+1}]$ определим значения индекса i, при которых прямоугольники $P_{i,j}$ имеют непустое пересечение с треугольником. Пусть $p_{j'}$, $j'=k-j$, – количество таких прямоугольников слева от центрального $P_{l,j}$, а $q_{j'}$ – количество прямоугольников справа от центрального:

$$s_{l-p_{j'}}\le x_l-(c+V)(t_k-t_j)<s_{l-p_{j'}+1},$$

$$s_{l+q_{j'}}<x_l+(c-V)(t_k-t_j)\le s_{l+q_{j'}+1}$$

Учитывая равенства $s_i=x_l+(i-l)h_x-\frac{h_x}{2}$, $t_k-t_j=Vh_\tau\cdot j'$, получаем для определения целых чисел $p_{j'}$ и $q_{j'}$, промежутки

$$-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{M}+1\right)\frac{Vh_\tau}{h_x}j'\le p_{j'}<\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{M}+1\right)\frac{Vh_\tau}{h_x}j',$$

$$-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{M}-1\right)\frac{Vh_\tau}{h_x}j' \le q_{j'} < \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{M}-1\right)\frac{Vh_\tau}{h_x}j'.$$

Видно, что эти целые числа не зависят от номера точки коллокации x_l и от индекса k, определяющего высоту треугольника. Здесь $j'=1,2,...,k$ для любого $k \ge 1$. Можно заметить, что $q_{j'}+2\frac{Vh_\tau}{h_x}j'$ находится в тех же пределах, что и $p_{j'}$. Если выбирать шаг по времени пропорционально величине $\frac{h_x}{V}$: $h_\tau = N\frac{h_x}{V}$, то достаточно определить целое число $p_{j'}$, а $q_{j'} = p_{j'} - 2N \cdot j'$. При этом, как легко видеть, $p_1 \ge -\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{M}+1\right)N \ge 2N - \frac{1}{2}$, а поскольку p_1 – целое, то $p_1 \ge 2N$. Естественно считать $Vh_\tau \ge h_x$, так как h_x порядка сантиметра или миллиметра, V порядка $100\frac{м}{сек}$, тогда $\frac{h_x}{V}$ порядка 10^{-4} или 10^{-5} сек., что достаточно для шага по временной переменной. При независимом выборе шагов h_τ и h_x числа $p_{j'}$ и $q_{j'}$ могут принимать любые неотрицательные целые значения.

В зависимости от положения точки (x_l, t_k) треугольник с вершиной в этой точке может частично выходить за пределы полуполосы $-a \le s \le a$, $0 \le \tau \le t_k$. Поэтому уравнение (2) в точке коллокации x_l, $l=1,2,...,n$, имеет вид

$$\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=max\{0;l-p_{j'}\}}^{min\{n;l+q_{j'}\}}\iint_{P_{i,j}}\gamma_h(s,\tau)\frac{K_0\left(x_l-s,V\left(t_k-\tau\right)\right)}{x_l-s}dsd\tau = V\cdot 2h\int_0^{t_k}V_y\left(x_l,\tau\right)d\tau \qquad (4)$$

При расчёте первого временного слоя, $k=1$, вычисляются значения p_1 и q_1. С учётом нулевых начальных значений $\gamma_{i,0}=0$ левая часть уравнения (4) содержит только неизвестные значения $\gamma_{i,1}$, $i=1,...,n$. Матрица системы определяется интегралами $I_{i,0}$, которые заменой переменных сводятся к интегралам $J_{i',1}$, где $i'=i-l$, $i'=-p_1,-p_1+1,...,0,...,q_1$.

При переходе с $(k-1)$ – го временного слоя на k – й, $k \ge 2$, вычисляются целые значения p_k и q_k. Поскольку с увеличением высоты треугольника t_k его основание расширяется и может выйти за пределы отрезка $-a \le s \le a$, то далее полагаем $p_k = \min\{p_k, n\}$, $q_k = \min\{q_k, n-1\}$. После этого вычисляются значения интегралов на нижнем временном слое: $J^1_{i',k}$, $J^\lambda_{i',k}$, $J^\theta_{i',k}$, $J^{\lambda,\theta}_{i',k}$ для $i = -p_k, -p_k+1, ..., 0, ..., q_k$. Именно эти интегралы по приведённым выше формулам определяют коэффициенты при найденных ранее значениях $\gamma_{i,1}$, $i = 1,...,n$. По тем же формулам обновятся при переходе на k – й слой коэффициенты при $\gamma_{i,j}$, $j \le k$. Как уже отмечалось выше, неизвестными будут только значения $\gamma_{i,k}$, коэффициенты при которых в системе (4) будут теми же, что и при расчёте первого временного слоя. То есть матрица системы не меняется при переходе на очередной временной слой, поэтому вместо решения алгебраической системы на каждом слое было бы удобно иметь обратную матрицу, которая позволит явно выразить искомые решения на очередном слое через свободный член системы, к которому помимо правой части системы (4) будут добавлены известные слагаемые из левой части. Для учёта этих слагаемых на k – ом слое в памяти компьютера должны сохраняться все интегралы $J^1_{i',j'}$, $J^\lambda_{i',j'}$, $J^\theta_{i',j'}$, $J^{\lambda,\theta}_{i',j'}$ на предыдущих временных слоях, а также значения сеточной функции $\gamma_{i,j}$ при $j < k$.

Распишем подробно l – е уравнение системы (4). Для краткости положим $n_1(l) = \min\{n, l+q_1\}$. Считаем $p_1 \ge 2$, поэтому при $j = k-1$ для $l = 1,2,...,p_1$ внутренняя сумма в (4) будет начинаться с $i = 0$, для этих значений индексов будем иметь $j' = 1$, $i' = -l$, а для $i = 1$ соответственно $i' = 1-l$. Итак, для $l = 1,2,...,p_1$ уравнения системы (4) имеют следующий вид:

$$\gamma_{1,k} \cdot \left[J^{\theta,\lambda}_{-l,1} - J^\lambda_{-l,1} - \left(\frac{3}{2} - l\right) J^\theta_{-l,1} + \left(\frac{3}{2} - l\right) J^1_{-l,1} + J^{\theta,\lambda}_{1-l,1} - J^\lambda_{1-l,1} - \left(\frac{3}{2} - l\right) J^\theta_{1-l,1} + \left(\frac{3}{2} - l\right) J^1_{1-l,1} \right] +$$

$$+ \sum_{\nu=2}^{n_1(l)} \gamma_{\nu,k} \left[J^{\theta,\lambda}_{\nu',1} - J^\lambda_{\nu',1} - \left(\nu - l + \frac{1}{2}\right)\left(J^\theta_{\nu',1} - J^1_{\nu',1}\right) - J^{\theta,\lambda}_{\nu'-1,1} + J^\lambda_{\nu'-1,1} - \left(l - \nu + \frac{3}{2}\right)\left(J^\theta_{\nu'-1,1} - J^1_{\nu'-1,1}\right) \right] +$$

$$+\gamma_{n_1+1,k}\cdot\left[-J^{\theta,\lambda}_{n_1-l,1}+J^{\lambda}_{n_1-l,1}-\left(l-n_1+\frac{1}{2}\right)\left(J^{\theta}_{n_1-l,1}-J^{1}_{n_1-l,1}\right)\right]=$$

$$=2\pi V\int_0^{t_k}V_y\left(x_l,\tau\right)d\tau-\gamma_{1,k-1}\left[\left(\frac{3}{2}-l\right)J^{\theta}_{-l,1}-J^{\theta,\lambda}_{-l,1}\right]-$$

$$-\sum_{i=1}^{n_1(l)}\left[\gamma_{i,k-1}\left(-J^{\theta,\lambda}_{i',1}+\left(i-l+\frac{1}{2}\right)J^{\theta}_{i',1}\right)+\gamma_{i+1,k-1}\left(J^{\theta,\lambda}_{i',1}+\left(l-i+\frac{1}{2}\right)J^{\theta}_{i',1}\right)\right]-$$

$$-\sum_{j=0}^{k-2}\left\{\sum_{i=max\{1,l-p_{j'}\}}^{min\{n,l+q_{j'}\}}\left[\gamma_{i,j+1}\cdot(\ldots)+\gamma_{i+1,j+1}(\ldots)+\gamma_{i,j}(\ldots)+\gamma_{i+1,j}(\ldots)\right]-\right.$$

$$-\gamma_{1,j+1}\left[J^{\theta,\lambda}_{-l,j'}-(k-j)J^{\lambda}_{-l,j'}+\left(\frac{3}{2}-l\right)\cdot\left((k-j)J^{1}_{-l,j'}-J^{\theta}_{-l,j'}\right)\right]-$$

$$\left.-\gamma_{1,j}\cdot\left[-J^{\theta,\lambda}_{-l,j'}-(k-j-1)J^{\lambda}_{-l,j'}+\left(\frac{3}{2}-l\right)\cdot\left(J^{\theta}_{-l,j'}-(k-j-1)J^{1}_{-l,j'}\right)\right]\right\}$$

Здесь многоточиями обозначены множители, приведённые в равенстве (3). Последняя сумма по j появится, начиная со второго временного слоя: $k \geq 2$.

Для значений $l = p_1+1,\ldots,n$ уравнения системы (4) имеют вид:

$$\gamma_{l-p_1,k}\cdot\left[J^{\theta,\lambda}_{-p_1,1}-J^{\lambda}_{-p_1,1}+\left(p_1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(J^{\theta}_{-p_1,1}-J^{1}_{-p_1,1}\right)\right]+$$

$$+\sum_{\nu=l-p_1+1}^{n_1(l)}\gamma_{\nu,k}\cdot\left[J^{\theta,\lambda}_{\nu',1}-J^{\lambda}_{\nu'.1}+\left(\nu-l+\frac{1}{2}\right)\left(J^{1}_{\nu',1}-J^{\theta}_{\nu',1}\right)-J^{\theta,\lambda}_{\nu'-1,1}+J^{\lambda}_{\nu'-1,1}+\left(l-\nu+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(J^{1}_{\nu'-1,1}-J^{\theta}_{\nu'-1,1}\right)\right]+$$

$$+\gamma_{n_1,k}\cdot\left[-J^{\theta,\lambda}_{n_1-l,1}+J^{\lambda}_{n_1-l,1}+\left(n_1-l-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(J^{\theta}_{n_1-l,1}-J^{1}_{n_1-l,1}\right)\right]=2\pi V\int_0^{t_k}V_y\left(x_l,\tau\right)d\tau-$$

$$-\sum_{i=l-p_1}^{n_1}\left[\gamma_{i,k-1}\cdot\left(-J^{\theta,\lambda}_{i',1}+\left(i-l+\frac{1}{2}\right)J^{\theta}_{i',1}\right)+\gamma_{i+1,k-1}\left(J^{\theta,\lambda}_{i',1}+\left(l-i+\frac{1}{2}\right)J^{\theta}_{i',1}\right)\right]-$$

$$-\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{i=max\{1,l-p_{j'}\}}^{min\{n,l+q_{j'}\}}\left\{\gamma_{i,j}\left[-J^{\lambda,\theta}_{i',j'}+(k-j-1)J^{\lambda}_{i',j'}+\left(i-l+\frac{1}{2}\right)\left(J^{\theta}_{i',j'}-(k-j-1)J^{1}_{i',j'}\right)\right]+\right.$$

$$+\gamma_{i+1,j}\cdot\left[J^{\lambda,\theta}_{-l,j'}-(k-j-1)J^{\lambda}_{i',j'}+\left(l-i+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(J^{\theta}_{i',j'}-(k-j-1)J^{1}_{i',j'}\right)\right]+$$

$$+\gamma_{i,j+1}\cdot\left[J^{\lambda,\theta}_{i',j'}+(k-j)J^{\lambda}_{i',j'}+\left(i-l+\frac{1}{2}\right)\left((k-j)J^{1}_{i',j'}-J^{\theta}_{i',j'}\right)\right]+$$

$$+\gamma_{i+1,j+1}\cdot\left[-J^{\lambda,\theta}_{i',j'}+(k-j)J^{\lambda}_{i',j'}+\left(l-i+\frac{1}{2}\right)\cdot\left((k-j)J^{1}_{i',j'}-J^{\theta}_{i',j'}\right)\right]\Bigg\}-$$

$$-\sum_{j=0}^{j<\frac{h_x}{Vh_\tau}\cdot\left(\frac{1}{2}-l\right)\frac{M}{M+1}+k}\Bigg\{\gamma_{1,j+1}\cdot\left[J^{\theta,\lambda}_{-l,j'}-(k-j)J^{\lambda}_{-l,j'}+\left(\frac{3}{2}-l\right)\cdot\left((k-j)J^{1}_{-l,j'}-J^{\theta}_{-l,j'}\right)\right]+$$

$$+\gamma_{1,j}\cdot\left[-J^{\theta,\lambda}_{-l,j'}-(k-j-1)J^{1}_{-l,j'}+\left(\frac{3}{2}-l\right)\cdot\left(J^{\theta}_{-l,j'}-(k-j-1)J^{1}_{-l,j'}\right)\right]\Bigg\}.$$

Последняя сумма учитывает аппроксимацию решения вблизи левой кромки профиля на интервале $(-a;-a+h)$. Верхний предел этой суммы определяется номером j временного промежутка $\left[t_j,t_{j+1}\right]$, на котором левая сторона треугольника пересекает правую сторону прямоугольника $P_{0,j}$.

Следует отмутить, что непосредственное вычисление четырех повторных сингулярных интегралов оказалось трудоемкой задачей. После отыскания всех первообразных необходимо определить пределы подстановки граничных значений для каждой ячейки разбиения носителя ядра прямоугольникам сетки. Конфигурация ячеек определяется их расположением и значением числа Маха. Составлены соответствующие алгоритмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красильщикова Е.А. Тонкое крыло в сжимаемом потоке. М: Наука, 1986. 286 с.
2. Гайденко С.В. Нестационарное обтекание тонкого профиля дозвуковым потоком сжимаемого газа вблизи твердой границы//Экологический вестник научных центров черноморского экономического сотрудничества. 2008. № 4, с. 35-42.
3. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. 256с.

LITERATURA

1. Krasil'shhikova E.A. Tonkoe krylo v szhimaemom potoke. M: Nauka, 1986. 286 s.
2. Gajdenko S.V. Nestacionarnoe obtekanie tonkogo profilja dozvukovym potokom szhimaemogo gaza vblizi tverdoj granicy//Jekologicheskij vestnik nauchnyh centrov chernomorskogo jekonomicheskogo sotrudnichestva. 2008. № 4, s. 35-42.
3. Belocerkovskij S.M., Lifanov I.K. Chislennye metody v singuljarnyh integral'nyh uravnenijah. – M.: Nauka. Glavnaja redakcija fiziko-matematicheskoj literatury, 1985. 256s.