

УДК 524.8

**ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И
МЕТРИКИ НЕОДНОРОДНОЙ
ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВСЕЛЕННОЙ**

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D.
*Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто,
Канада*

Обсуждается метрика неоднородной вращающейся Вселенной. Даны примеры универсальных метрик, получаемых в теории гравитации Эйнштейна. На основе решений уравнений Эйнштейна предложены универсальные метрики, описывающие свойства галактик, групп и кластеров галактик в неоднородной, вращающейся Вселенной

Ключевые слова: МЕТАГАЛАКТИКА,
ГАЛАКТИЧЕСКИЙ КЛАСТЕР, ГЕОМЕТРИЯ
ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ, ТЕОРИЯ
ГРАВИТАЦИИ ЭЙНШТЕЙНА, КОСМОЛОГИЯ,
ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ, ТЕМНАЯ ЭНЕРГИЯ

UDC 524.8

**GENERAL RELATIVITY AND METRICS OF
INHOMOGENEOUS ROTATING UNIVERSE**

Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.
Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada

The metric of inhomogeneous rotating Universe is discussed. There are examples of universal metrics obtained in Einstein's theory of gravitation. On the basis of solutions of Einstein's equation we have proposed universal metric describing the properties of galaxies, groups and clusters of galaxies in inhomogeneous rotating Universe

Keywords: COSMOLOGY, GENERAL RELATIVITY,
GALACTIC CLUSTER, SPACE-TIME GEOMETRY,
BLACK MATTER, BLACK ENERGY

Введение

Как известно, пространство в масштабе 100 и более мегапарсек является неоднородным по плотности как обычной, так и темной материи, которая концентрируется в кластерах, включая местный Суперкластер, которому принадлежит наша Галактика /1-9/.

Для объяснения неоднородности Вселенной обычно используется теория гравитационной неустойчивости /4-7/. В моделях /4-7/ и других предполагается, что в первоначально однородном пространстве возникают флуктуации плотности, которые приводят к формированию кластеров обычной и темной материи. Моделирование распределения темной материи в кластерах представляет собой сложную задачу, так как темную материю можно наблюдать, главным образом, по результату ее гравитационного взаимодействия с обычной материей.

По разным оценкам содержание темной материи в Суперкластере значительно превосходит содержание обычной материи, что характерно и для других суперкластеров. В этой связи возникает вопрос о зависимости метрики от распределения материи /10-11/. В работах /10-11/ было показано, что на основе аксиально-симметричных решений уравнений Эйнштейна можно описать зависимость гравитационного потенциала от расстояния в спиральных галактиках и в кластерах галактик. В настоящей работе построены решения уравнений Эйнштейна, описывающие распределение гравитационного потенциала в масштабе Метагалактики во вращающейся неоднородной Вселенной.

Аксиально-симметрические поля

Уравнения гравитационного поля Эйнштейна имеют вид /12/:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = g_{\mu\nu} \Lambda + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1)$$

Здесь $R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса; Λ, G, c - космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно. Отметим, что в общем случае имеют место соотношения

$$\begin{aligned} R_{ik} &= R_{ijk}^j, \quad R = g^{ik} R_{ik}, \\ R_{\beta\gamma\delta}^\alpha &= \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^\alpha}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x^\delta} + \Gamma_{\beta\delta}^\mu \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\mu \Gamma_{\mu\delta}^\alpha, \\ \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ - тензор Римана, Γ_{ki}^i - символы Кристоффеля второго рода.

Гравитационные поля, обладающие осевой симметрией, рассматривались в работах Вейля /13/, Леви-Чевита /14/, Дельсарта /15/, Эйнштейна и Розена /16/, Геделя /17/, Петрова /18/, Зекериса /19/ и других.

Метрический тензор таких полей в предположении их статичности может быть приведен к виду:

$$\begin{aligned} g_{11} &= g_{22} = -e^{v-\mu}, \\ g_{13} &= g_{23} = g_{34} = g_{14} = g_{24} = 0, \\ g_{33} &= -\rho^2 e^{-\mu}, g_{44} = e^{\mu} \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\mu = \mu(\rho, z), v = v(\rho, z)$ - функции, удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна.

Поскольку распределение материи заранее неизвестно, а астрономические наблюдения позволяют установить только распределение барионной материи, можно предположить, что метрика в большом масштабе, вообще говоря, не зависит от гипотез о распределении материи /10-11/. В правой части уравнения (1) может быть любой тензор, однозначно зависящий от метрического тензора. В этой связи рассмотрим тензор с компонентами, пропорциональными компонентам метрического тензора (3), имеем

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= \lambda_1 e^{v-\mu}, \lambda_{22} = \lambda_2 e^{v-\mu} \\ \lambda_{12} &= \lambda_{21} = \lambda_0 \\ \lambda_{33} &= \lambda_3 \rho^2 e^{-\mu}, \lambda_{44} = \lambda_4 e^{\mu} \end{aligned} \quad (4)$$

Остальные компоненты тензора $\lambda_{\alpha\beta}$ равны нулю. Функции λ_i позволяют определить метрику (3) наиболее общим способом.

Компоненты тензора Эйнштейна $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$ в метрике (3) имеют вид

$$\begin{aligned}
 G_{11} &= \frac{1}{2\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right], \\
 G_{12} = G_{21} &= \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \frac{\partial \mu}{\partial z} \right), \\
 G_{22} &= -G_{11} \\
 G_{33} &= \frac{\rho^2 e^{-v}}{4} \left(2 \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right), \\
 G_{44} &= e^{2\mu-v} \left\{ - \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Полагая $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta}$, находим уравнения поля, которые в случае уравнений поля для вакуума совпадают с аналогичными уравнениями, приведенными в /10-11, 18/. В качестве системы уравнений для определения двух функций $\mu = \mu(\rho, z), v = v(\rho, z)$ можно выбрать, например, два уравнения $G_{33} = \lambda_{33}, G_{44} = \lambda_{44}$. Остальные уравнения используются для определения неизвестных параметров λ_i . В результате имеем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} &= (\lambda_3 - \lambda_4) e^{v-\mu}, \\
 \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right] &= \lambda_3 e^{v-\mu}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Разрешая систему уравнений (7) приходим к определению статических полей гравитации в случае наличия осевой симметрии. Сила, действующая на частицу в статическом гравитационном поле, определяется в общем случае из выражения /20/

$$\mathbf{f} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \left\{ -\nabla \ln \sqrt{g_{44}} + \frac{\sqrt{g_{44}}}{c} [\mathbf{v}\mathbf{g}] \right\} \tag{7}$$

Здесь m, \mathbf{v} - масса и вектор скорости частицы, $g_\alpha = -g_{4\alpha} / g_{44}$ (все компоненты этого вектора равны нулю в случае метрики (3)).

Отметим, что в нерелятивистском приближении потенциал $\mu = 2\varphi/c^2$, где φ - гравитационный потенциал в теории гравитации Ньютона. Из второго уравнения (7) находим оценку $v \sim \mu^2 = 4\varphi^2/c^4$. В случае движения галактик в местном суперкластере скорость и гравитационный потенциал связаны между собой, что позволяет оценить величину $\mu = 2\varphi/c^2 \sim 10^{-3}$. В таком случае в первом приближении можно пренебречь малой величиной $v \sim \mu^2 \sim 10^{-6}$. В результате, как и в теории гравитации Ньютона, приходим к уравнению Лапласа для определения гравитационного потенциала.

Динамика отдельных тел моделируется в соответствии с теорией Ньютона с использованием выражения силы (7), что согласуется с гипотезой (2). Рассмотрим уравнение движения потока частиц в гравитационном поле в нерелятивистском приближении, имеем

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla \varphi \quad (8)$$

В метрике (3) в случае стационарного радиального движения находим

$$\frac{\partial}{\partial R} \frac{\mathbf{v}^2}{2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} \quad (9)$$

Здесь радиальная координата $R = \sqrt{\rho^2 + z^2}$.

Отсюда находим зависимость потенциала от радиальной координаты

$$\varphi(R) = \varphi_0 - \frac{\mathbf{v}^2}{2} \quad (10)$$

В работах [10-11] был указан потенциал общего вида, который с хорошей точностью описывает гравитационное поле в спиральных галактиках

$$\varphi(\rho, z) = \frac{m}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + a \ln \rho + b(\rho^2 + z^2) + \beta(\rho^2 - 2z^2) + k\rho + \varphi_0 \quad (11)$$

Здесь параметры $a, b, \beta, k, m, \varphi_0$ вычисляются по данным скорости вращения. Потенциал (11) является решением первого уравнения (6) с ненулевой правой частью:

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} = -\lambda_4 \quad (12)$$

В этом приближении считаем, что $\lambda_3 = 0$. В частном случае $a = \beta = k = m = 0$ выражение (11) сводится к квадратичной зависимости

$$\varphi(\rho, z) = b(\rho^2 + z^2) + \varphi_0 = bR^2 + \varphi_0 \quad (13)$$

Учитывая, что в нерелятивистском приближении $\mu = 2\varphi/c^2$, имеем

$$\frac{\mathbf{v}^2}{2} = -bR^2 = \frac{\lambda_4 c^2}{4} R^2 \quad (14)$$

Записывая это уравнение в векторном виде, что справедливо в рассматриваемом случае радиального течения, находим окончательно

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\lambda_4}{2}} c \mathbf{R} = H \mathbf{R} \quad (15)$$

Здесь H - постоянная Хаббла. Таким образом, мы вывели основной закон космологии, связанный с расширением Вселенной, используя модель (2) и метрику (3), а также установили физический смысл параметра λ_4 , фигурирующего в модели (12). Отметим, что обычно закон (15) выводится из модели изотропной Вселенной, в которой красное смещение связано со скоростью и расстоянием до источника излучения уравнением [21/

$$\mathbf{v} = \hat{z}c = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} c = H \mathbf{R} \quad (16)$$

На практике наблюдают красное или синее смещение, по которому определяют скорость, согласно уравнению (17), а по скорости оценивают расстояние, используя в случае красного смещения закон Хаббла. Очевидно,

что для этого необходимо знать постоянную Хаббла. Этот параметр определяют по ряду измерений расстояний до галактик.

Отметим, что в нерелятивистском приближении полученные результаты не отличаются от аналогичных результатов, полученных в работе /11/, в которой было установлено, что квадратичное слагаемое гравитационного потенциала (11) соответствует основному радиальному течению, связанному с расширением Вселенной. Но потенциал (11) был получен в нашей работе /11/ на основе обработки эмпирических данных, поэтому его можно рассматривать как результат суммы галактических полей, каждое из которых определяется по методу /11/ путем обработки данных по скорости вращения нейтрального водорода в спиральных галактиках. Поскольку основной вклад на больших масштабах дает квадратичное слагаемое, можно восстановить гравитационный потенциал кластера галактик, используя экспериментальные данные по гравитационным потенциалам и координатам отдельных галактик в виде

$$\varphi(\mathbf{R}) = \sum_i b_i (\mathbf{R} - \mathbf{R}_i)^2 = R^2 \sum_i b_i - 2\mathbf{R} \cdot \sum_i b_i \mathbf{R}_i + \sum_i b_i R_i^2 \quad (17)$$

Здесь $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i(t)$ – радиус-вектор галактики с номером i .

Модель движения галактик в кластере включает уравнения (8) и (17):

$$\frac{d^2 \mathbf{R}_j}{dt^2} = -2 \sum_i^N b_i (\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i), \quad j = 1, \dots, N. \quad (18)$$

Здесь N - число галактик в кластере. Радиальное течение типа (16) является решением системы уравнений (19) при дополнительных условиях

$$-2 \sum_i b_i = H^2, \quad \sum_i b_i \mathbf{R}_i = 0 \quad (19)$$

В этом случае $\mathbf{R}_j(t) = \mathbf{R}_j(0) \exp(Ht)$, поэтому $\mathbf{v}_j = H\mathbf{R}_j$, что и требовалось доказать. Следовательно, гравитационные поля, обладающие аксиальной симметрией, позволяют описать радиальное течение в нерелятивистском

случае, который соответствует условиям в местном суперкластере. Однако в области течения, охватывающего группу суперкластеров, скорость объектов приближается к скорости света, поэтому необходимо вывести релятивистскую формулу для гравитационного потенциала и указать соответствующую метрику.

Метрика группы суперкластеров

В настоящее время метрику в масштабе гигапарсек моделируют, главным образом, на основе Λ CDM модели Вселенной и неоднородной модели /19/- см., например, работы /8-9/ и другие. Основанием для использования неоднородных метрик является тот факт, что на всех доступных для прямого наблюдения масштабах Вселенная представляется как неоднородное пространство, содержащее кластеры галактик сколь угодно большого размера. В качестве примера можно привести открытую недавно структуру размером не менее двух-трех гигапарсек /21/.

Мы предполагаем, что существует класс метрик, охватывающий, с одной стороны, аксиально-симметрические поля типа (3), а, с другой стороны, метрики типа /19/. Искомый метрический тензор имеет вид

$$\begin{aligned} g_{11} &= g_{22} = -e^{v-\mu}, \\ g_{13} &= g_{23} = g_{34} = g_{14} = g_{24} = 0, \\ g_{33} &= -f, g_{44} = e^{\mu} \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\mu = \mu(\rho, z)$, $v = v(\rho, z)$, $f(\rho, z)$ - функции, удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна. Сравнивая метрики (3) и (20) видим различие, заключающееся во введении дополнительной функции, описывающей новую симметрию системы. В частном случае, полагая $f(\rho, z) = \rho^2 e^{-\mu}$, приходим к метрике (3). В другом частном случае, который рассматривается ниже,

положим $f(\rho, z) = \rho^2$. В результате находим следующий вид тензора Эйнштейна

$$\begin{aligned}
 G_{11} &= \frac{1}{2\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + 2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \right), \\
 G_{12} = G_{21} &= \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) - \frac{3}{4} \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho \partial z}, \\
 G_{22} &= -\frac{1}{2\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{4} \left(-\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + 2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{4}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right), \\
 G_{33} &= \frac{\rho^2 e^{\mu-v}}{4} \left(2 \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right), \\
 G_{44} &= \frac{e^{2\mu-v}}{2} \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right).
 \end{aligned} \tag{21}$$

Используя выражения (21) и тензор (4) можно переписать модель (6) в форме

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= 2\lambda_4 e^{v-\mu}, \\
 \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right] &= 2\lambda_3 e^{v-\mu}, \\
 \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right] &= 2(\lambda_1 + \lambda_2) e^{v-\mu}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь левая часть третьего уравнения (22) равно сумме $G_{11} + G_{22}$.

Заметим, что первое уравнение (22) зависит только от разности $\mu - v$, поэтому его можно проинтегрировать в общем виде и установить тем самым вид плотности $e^{v-\mu}$. Если скопление галактик обладает центральной симметрией, то, полагая $\mu - v = w(\zeta)$, $\zeta = \sqrt{(\rho - \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}$, находим из первого уравнения (22)

$$w'' + w'/\zeta = 2\lambda_4 e^{-w} \tag{23}$$

Рассмотрим случай $\lambda_4 > 0$. Интегрируя уравнение (23), находим

$$w(\zeta) = \ln \left(\frac{\gamma(\kappa\zeta)^{2-\alpha}}{\alpha^4} \left(\frac{(\kappa\zeta)^\alpha}{\gamma} + \frac{\alpha^2}{2} \right)^2 \right) \quad (24)$$

Где $\kappa = \sqrt{2\lambda_4}$, α, β - постоянные интегрирования. Соответствующая плотность e^{-w} представлена на рис. 1 для значений параметров $\alpha = 2; 3; 4; 5$; $\beta = 4$ - кривые 1-4 соответственно. При $\rho_0 > 0$ поверхности уровня постоянной плотности вблизи центра имеют форму тора – рис. 1.

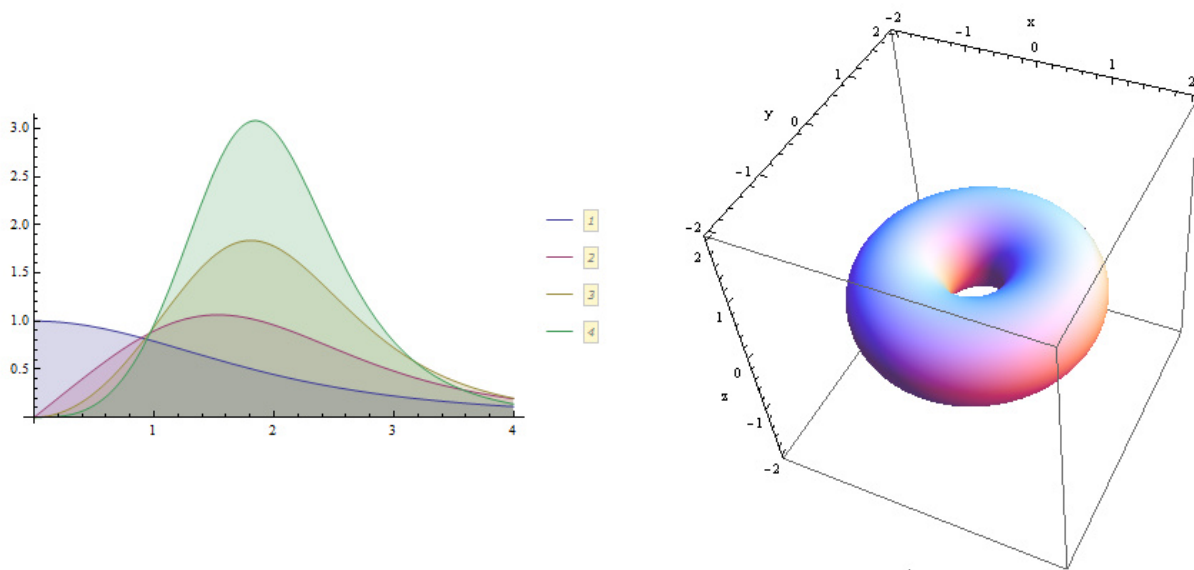


Рис. 1. Зависимость плотности от расстояния до центра скопления для значений параметров $\alpha = 2; 3; 4; 5$; $\beta = 4$ - кривые 1-4 соответственно и поверхность равного уровня плотности в форме тора.

Для нахождения гравитационных потенциалов в первом приближении положим $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Вычитая из третьего уравнения (22) первое и второе уравнения, находим

$$\frac{2}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} = -2\lambda_4 e^{-w(\zeta)} \quad (25)$$

Предполагая, что центр симметрии скопления лежит на оси симметрии, находим из уравнения (25) релятивистское обобщение потенциала (13) в форме

$$\mu = 2\varphi/c^2 = \frac{\alpha^3 \gamma}{\alpha^2 \gamma + 2(2\lambda_4)^{\alpha/2} (\rho^2 + (z - z_0)^2)^{\alpha/2}} + \mu_0 \quad (26)$$

Потенциал (26) зависит от 5 констант, которые можно определить из согласования выражения (26) с течением Хаббла в нерелятивистском случае. Положим $z_0 = 0$, разложим правую часть (26) по степеням расстояния до центра скопления, имеем

$$\mu = 2\varphi/c^2 = \mu_0 + \frac{\alpha^3 \gamma}{\alpha^2 \gamma + 2(2\lambda_4)^{\alpha/2} R^\alpha} = \mu_0 + \alpha - \frac{2(2\lambda_4)^{\alpha/2} R^\alpha}{\alpha \gamma} + \dots \quad (27)$$

Сравнивая (13), (14) и (27), находим неизвестные параметры

$$\alpha = 2, \mu_0 = -2, b = -\frac{\lambda_4}{\gamma} c^2, \gamma = 4, \lambda_4 = \frac{2H^2}{c^2}. \quad (28)$$

Подставляя найденные значения параметров в формулу (26), находим окончательно

$$\varphi = \frac{-c^2 H^2 (\rho^2 + (z - z_0)^2)}{2c^2 + H^2 (\rho^2 + (z - z_0)^2)} \quad (29)$$

Отметим, что выражение (29) справедливо только в том случае, когда центр скопления лежит на оси симметрии системы. Если же центр скопления смещен относительно оси симметрии, то интегрируя уравнение (25) при заданных параметрах (28), находим

$$\mu = \mu_0 + \frac{4}{2 + h^2 \zeta^2} + \frac{4h^2 \rho_0 (\rho_0 - \rho)}{(2 + h^2 (z - z_0)^2)(2 + h^2 \zeta^2)} - \frac{4h\rho_0 \arctan\left(\frac{h(\rho - \rho_0)}{\sqrt{2 + h^2 (z - z_0)^2}}\right)}{(2 + h^2 (z - z_0)^2)^{3/2}} \quad (30)$$

Здесь обозначено $h = H/c$. Поверхности равного уровня потенциала (30) приведены на рис. 2. В большом масштабе поверхности разделяются на две

плоскости, соединенные горловиной – рис. 2. Изолинии потенциала (30) в плоскости YZ показаны на рис. 3.

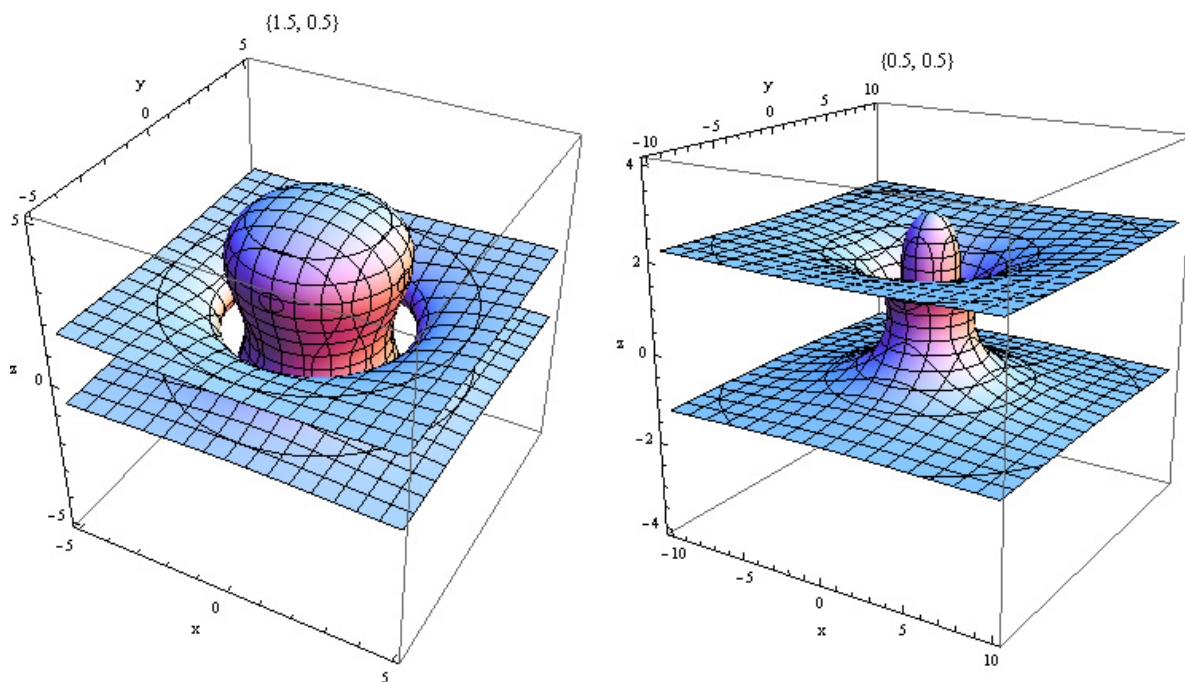


Рис. 2. Поверхности равного уровня гравитационного потенциала (30).

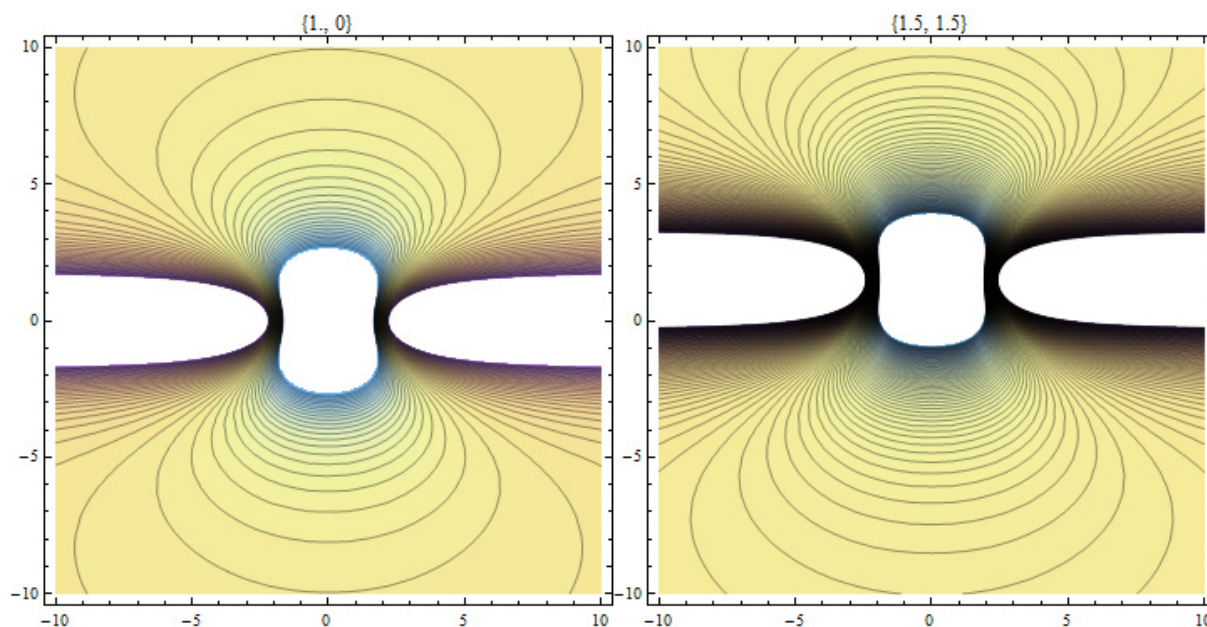


Рис. 3. Изолинии потенциала (30) в плоскости YZ .

Очевидно, что течение в потенциале типа (30) являются радиальным, так как основная часть решения представлена потенциалом типа (29), который описывает радиальное течение. Для моделирования основного течения в случае потенциала вида (29) рассмотрим уравнение для функции Гамильтона-Якоби в гравитационном поле, имеем

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j} - P_0^2 = 0$$

Используя компоненты метрического тензора (20), находим

$$e^{-\mu} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 - e^w \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 - e^w \left(\frac{\partial S}{\partial \rho} \right)^2 - P_0^2 = 0 \quad (31)$$

Ищем решение уравнения (31) в виде $S = -E_0 t + S_1(\zeta)$. Такой выбор обусловлен тем, что в масштабе гигапарсек не обнаружено заметного орбитального движения. В результате находим уравнение

$$e^{-\mu} E_0^2 - e^w \left(\frac{\partial S_1}{\partial \zeta} \right)^2 - P_0^2 = 0 \quad (32)$$

Разрешая уравнение (32), находим зависимость

$$S_1(\zeta) = \int \sqrt{e^{-w} (e^{-\mu} E_0^2 - P_0^2)} d\zeta$$

Наконец, дифференцируя функцию $S = -E_0 t + S_1(\zeta)$ по энергии, находим зависимость $\zeta(t)$ в форме уравнения

$$ct = \varepsilon \int \frac{\exp(-\mu - w/2)}{\sqrt{(e^{-\mu} \varepsilon^2 - 1)}} d\zeta \quad (33)$$

Здесь $\varepsilon = E_0 / P_0$ - безразмерный параметр, характеризующий радиальное движение. На рис. 4 представлена зависимость радиальной скорости от расстояния до центра скопления и от времени. Для представления данных использованы безразмерные единицы $h\zeta(Ht)$. Из этих данных следует, что на начальном участке радиальное движение осуществляется по закону Хаббла,

но на больших масштабах наклон кривой уменьшается. Можно видеть, что в координатах скорость-расстояние все кривые сливаются вместе, тогда как в координатах скорость-время расстояние между соседними траекториями со временем растет. На основе полученных выражений (24) и (26) можно исследовать новые типы радиальных течений при заданных параметрах $\kappa = \sqrt{2\lambda_4}$, α, β . В обсуждаемой модели течение Хаббла является только одним частным случаем, среди множества других течений в суперкластерах.

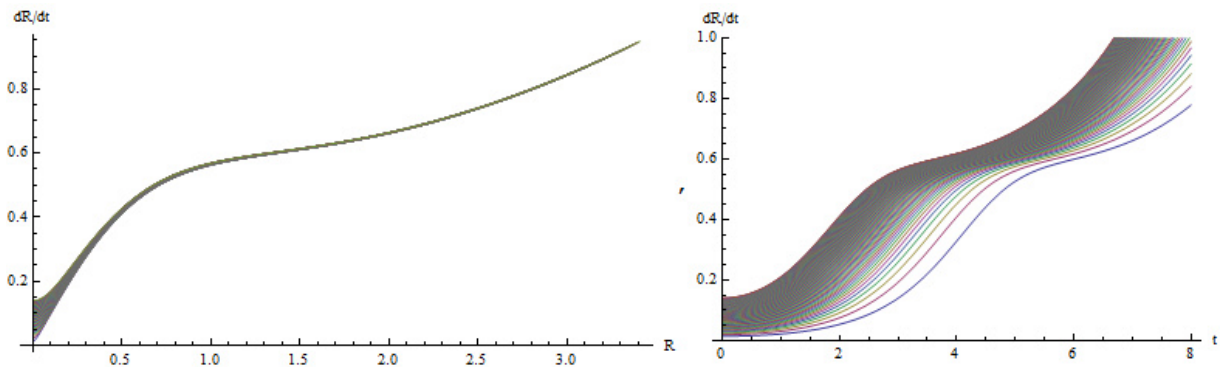


Рис. 4. Зависимость радиальной скорости от расстояния до центра скопления в безразмерных координатах (слева) и от времени (справа) при изменении начальной кинетической энергии от 10^{-4} до 10^{-2} энергии покоя.

Метрика неоднородной вращающейся Вселенной

Заметим, что метрики (3) и (20) являются статическими, тогда как расширение Вселенной обычно моделируется на основе нестационарной модели Фридмана /20/ или Λ CDM модели /8-9/. Для моделирования вращения Вселенной мы используем метрику /22/, модифицированную с учетом разделения угловых переменных и расстояния до объектов в виде

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= dt^2 + 2b(t,r)dtdr - a^2(t,r)dr^2 - d\vartheta^2 - \sin^2 \vartheta d\phi^2 \\
 g_{00} &= 1, g_{11} = -a^2(t,r), g_{01} = g_{10} = b(t,r) \\
 g_{02} &= g_{13} = g_{23} = g_{03} = 0, \\
 g_{22} &= -1, g_{33} = -\sin^2 \vartheta
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

Здесь $a = a(t, r), b = b(t, r)$ - функции, удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна. Такой выбор метрики обусловлен, прежде всего, тем, что сферическая система координат, используемая для составления астрономических каталогов, определена на единичной сфере, а расстояние до объектов является некоторым функционалом, зависящим от используемых физических моделей /23-24/.

Отличные от нуля компоненты тензора Эйнштейна в метрике (34) имеют вид

$$\begin{aligned}
 G_{00} &= 1 \\
 G_{01} &= G_{10} = b(t,r) \\
 G_{11} &= -a^2(t,r) \\
 G_{22} \sin^2 \vartheta &= G_{33} \\
 G_{22} &= \frac{bb_t(b_r + aa_t) - b^2(a_t^2 + b_{rr} + aa_{tt}) + aa_r b_t - a^2(b_{rr} + aa_{tt})}{(a^2 + b^2)^2}
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

Полагая $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = -\lambda g_{\alpha\beta}$, находим уравнения поля. Из первых трех выражений (35) и из вида метрического тензора следует, что в метрике (34) параметр $\lambda = -1$. Следовательно, скалярная кривизна исследуемых пространств Эйнштейна является отрицательной, $R = -4$.

Из двух функций $a = a(t, r), b = b(t, r)$ только одна может быть определена из уравнений поля, тогда как другая должна быть задана. Без ограничения общности рассмотрим два случая:

1) $b = const$, тогда, полагая $G_{22} = -1$, находим, что

$$\frac{b^2 a_t^2 + (a^2 + b^2) a a_{tt}}{(a^2 + b^2)^2} = 1; \quad (36)$$

2) $a = b$, тогда уравнение $G_{22} = -1$ приводится к виду

$$\frac{-b_t b_r + b b_{tr} + b^2 b_{tt}}{2b^3} = 1 \quad (37)$$

Уравнение (36) описывает Вселенную с заданным параметром вращения. Его общее решение в случае расширяющейся Вселенной имеет вид

$$a = \frac{e^{t-t_0}}{2} \sqrt{a_0^2 - 2a_0 b^2 + b^4 + e^{-4t-4t_0} - 2(b^2 + a_0) e^{-2t-2t_0}} \quad (38)$$

Здесь a_0, t_0 произвольные функции, зависящие от радиальной координаты.

Уравнение (37) описывает неоднородную вращающуюся Вселенную. Полагая $b = b(x)$, $x = t \pm r$, находим, что уравнение (37) распадается на два

$$\frac{\mp b'^2 \pm b b'' + b^2 b'''}{2b^3} = 1 \quad (39)$$

Интегрируя уравнение (39), получим

$$b'^2 = \frac{2b^2 (b_0^2 \pm 2b + b^2)}{(b \pm 1)^2} \quad (40)$$

Решение уравнения (40) можно представить в неявном виде

$$\sqrt{2}b_0(t \pm r) = \pm \ln b + b_0 \ln \left(1 \pm b \mp \sqrt{b^2 \pm 2b + b_0^2} \right) \mp \ln \left(\pm b + b_0^2 + b_0 \sqrt{b^2 \pm 2b + b_0^2} \right) \quad (41)$$

Полученные решения (38) и (41) позволяют объяснить большую часть фактов, касающихся происхождения и развития Вселенной, не прибегая к гипотезе о влиянии материи на метрику пространства-времени. Отметим, что в модели (38) Вселенная может проходить через стадию сжатия без точки сингулярности – рис. 5. После прохождения стадии сжатия Вселенная распадается на две части, отличающиеся знаком параметра вращения. Этот сценарий развития Вселенной приводит к тому, что в наблюдаемой Вселенной преобладает вещество, а не антивещество. Если же Вселенная при сжатии проходит через сингулярную точку, то при расширении Вселенная распадается на три острова – рис. 5.

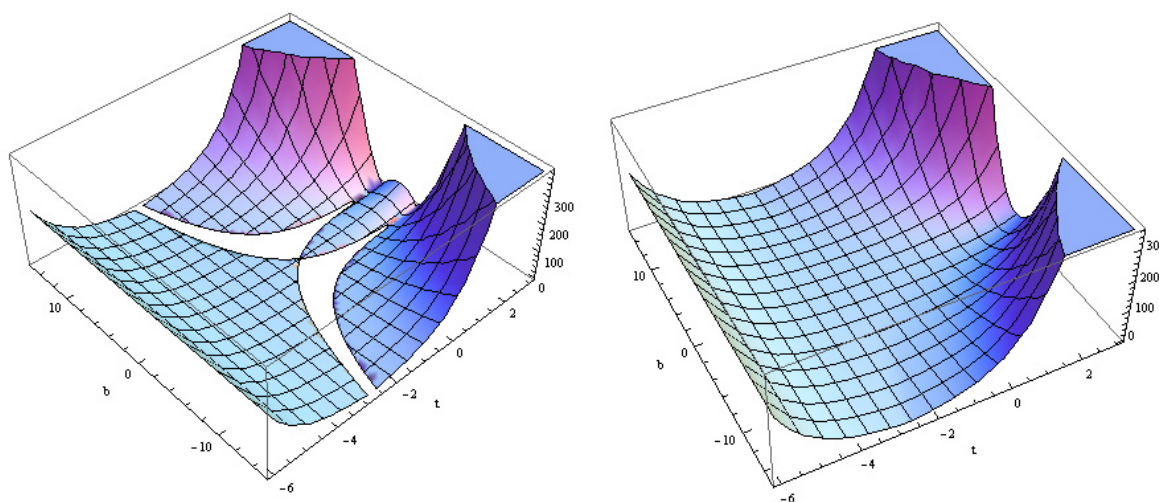


Рис. 5. Два сценария прохождения Вселенной через стадию сжатия: с сингулярностью (слева) и без сингулярности (справа).

Уравнения поля гиперболического типа и скалярные волны

Покажем, как можно построить физику волновых процессов, используя метрику типа (34). Рассмотрим метрику вида

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \psi(t, r)dt^2 + 2bdt dr - \psi(t, r)dr^2 - d\vartheta^2 - \sin^2 \vartheta d\phi^2 \\
 g_{00} &= \psi(t, r), \quad g_{11} = -\psi(t, r), \quad g_{01} = g_{10} = b \\
 g_{02} &= g_{13} = g_{23} = g_{03} = 0, \\
 g_{22} &= -1, \quad g_{33} = -\sin^2 \vartheta
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

Отличные от нуля компоненты тензора Эйнштейна в метрике (42) имеют вид

$$\begin{aligned}
 G_{00} &= \psi(t, r), \quad G_{01} = G_{10} = b, \\
 G_{11} &= -\psi(t, r), \quad G_{22} \sin^2 \vartheta = G_{33}, \\
 G_{22} &= \frac{\psi(\psi_t^2 - \psi_r^2) - (b^2 + \psi^2)(\psi_{tt} - \psi_{rr})}{2(\psi^2 + b^2)^2}
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

Полагая $G_{22} = -1$, находим волновое уравнение для определения метрики

$$\frac{\psi(\psi_t^2 - \psi_r^2) - (b^2 + \psi^2)(\psi_{tt} - \psi_{rr})}{2(\psi^2 + b^2)^2} = -1
 \tag{44}$$

В рамках модели (44) можно решить задачу о распаде скопления галактик. Зададим метрику в начальном состоянии в виде нормального распределения по радиальной координате. Тогда в силу уравнения (44) со временем кластер расширяется, распадаясь при этом на отдельные кластеры, образующие гало, которые соответствуют гребням возникающих нелинейных волн – рис. 6. Этот распад зависит от величины параметра b . При малой величине $b < 0.2$ скопление распадается на три и более кластера, а при большой величине $b \approx 1$ скопление сохраняет свою первоначальную форму.

Заметим, что такого типа скалярные волны могут быть ответственными за образование отдельных галактик и даже элементарных частиц, например,

скалярных бозонов. Действительно, уравнение (44) не содержит никаких масштабных параметров, кроме времени и координаты, масштабы которых могут быть выбраны произвольно.

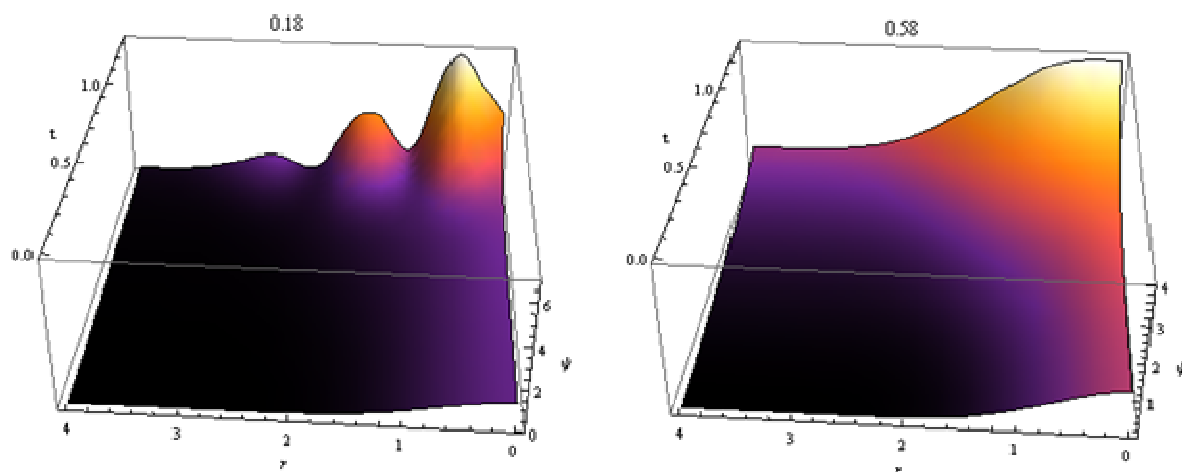


Рис. 6. Распад скопления на ряд кластеров в модели (44): над рисунками указана величина параметра b .

Уравнения поля эллиптического типа и метрика Метагалактики

Метрика (42) не является единственно возможной при организации движения материи. Очевидно, что волны, скорость распространения которых ограничена, не могут быть преобладающей формой движения в большом масштабе. Рассмотрим еще одну метрику, описывающую вращение неоднородной Вселенной

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \psi(t, r)dt^2 + 2bdt dr - dr^2 / \psi(t, r) - d\vartheta^2 - \sin^2 \vartheta d\phi^2 \\
 g_{00} &= \psi(t, r), g_{11} = -1/\psi(t, r), g_{01} = g_{10} = b \\
 g_{02} &= g_{13} = g_{23} = g_{03} = 0, \\
 g_{22} &= -1, g_{33} = -\sin^2 \vartheta
 \end{aligned}
 \tag{45}$$

Вычисляя отличные от нуля компоненты тензора Эйнштейна в метрике (45), находим

$$\begin{aligned}
 G_{00} &= \psi(t, r), G_{01} = G_{10} = b, \\
 G_{11} &= -1/\psi(t, r), G_{22} \sin^2 \vartheta = G_{33}, \\
 G_{22} &= \frac{-2\psi_t^2 + \psi\psi_{tt} + \psi^3\psi_{rr}}{2(1+b^2)\psi^3}
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

Используя уравнение $G_{22} = -1$, имеем

$$\psi\psi_{tt} + \psi^3\psi_{rr} = -2(1+b^2)\psi^3 + 2\psi_t^2
 \tag{47}$$

В случае статической метрики положим $\psi_t = \psi_{tt} = 0$, тогда уравнение (47) приводится к виду

$$\psi_{rr} = -2(1+b^2)
 \tag{48}$$

Заметим, что уравнение (48) является линейным, как и уравнение Пуассона в теории гравитации Ньютона. Интегрируя уравнение (48), находим его общее решение

$$\psi = k_1 + k_2 r - (1+b^2)r^2
 \tag{49}$$

Здесь k_1, k_2 - произвольные постоянные. Потенциал (49) можно сравнить со статическим гравитационным полем галактики (11) и кластера галактик (17). Мы видим, что квадратичный потенциал, которому соответствует закон Хаббла (15), сохраняет свой вид и в масштабе Вселенной. Отметим, что для потенциала (49) выполняется принцип суперпозиции в форме (17).

Следовательно, метрика (45) и уравнение (47) могут быть использованы для моделирования течений в масштабе Метагалактики. Но уравнение (47) является уравнением эллиптического типа, что означает зависимость решения от граничных условий не только в прошлом, но и в будущем. Вопрос о граничных условиях для уравнения (1) рассматривал Эйнштейн /12/, который пришел к выводу, что Вселенная представляет собой замкнутый сферический мир. Другая точка зрения содержится в монографии /18/, автор которой предположил, что имеется только три типа полей тяготения, и что для каждого типа существуют свои граничные условия.

Задача Коши для уравнений Эйнштейна рассматривалась многими авторами – смотрите, например, списки работ в монографиях /18, 25-26/ и других. Некоторые авторы предполагали, что уравнения поля Эйнштейна являются гиперболическими в общем случае /26-27/, ссылаясь на известные результаты, полученные при определенных ограничениях де Дондер /28/ и Ланцош /29/. Однако приведенная выше метрика (45) и уравнение (47) указывают на существование гравитационных полей, удовлетворяющих эллиптическим уравнениям.

Уравнение (47) можно рассматривать как модель явления коллапса сферического вращающегося тела в пространстве отрицательной кривизны. Обычно предполагается, что черные дыры представляют собой статические образования, взаимодействующие с внешним миром посредством гравитационного поля /25, 30/. Однако уравнение (47) показывает, что черная дыра, если она существует, должна быть замкнута не только в пространстве, но и во времени. Действительно, рассмотрим решение уравнения (47), зависящее только от времени. Положим $\psi_{rr} = 0$, тогда уравнение (47) приводится к виду

$$\psi\psi'' = -2(1+b^2)\psi^3 + 2\psi_t^2 \quad (50)$$

Уравнение (50) можно проинтегрировать в общем случае, в результате находим

$$\psi(t) = \frac{4(1+b^2)}{4(1+b^2)^2(t-t_0)^2 + C_0} \quad (51)$$

Полученное решение (51) описывает объект, локализованный вокруг момента времени $t = t_0$, что и требовалось доказать.

В общем случае решение задачи о метрике объекта, локализованного в пространстве и во времени зависит от граничных условий. Так, например, для нашей Метагалактики можно поставить задачу о нахождении гравитационного потенциала в области $t > 0, r > 0$, используя в качестве граничного условия закон расширения наблюдаемой Вселенной. Однако решение этой задачи выходит за рамки настоящей работы.

Библиографический список

1. Gerard de Vaucouleurs. Further evidence for a local super-cluster of galaxies: rotation and expansion//Astronomical Journal, Vol. 63, p. 253, 1958.
2. Sidney van den Bergh. The Local Supercluster of Galaxies//Astronomical Society of the Pacific, Vol. 72, No. 427, p.312-313, 1960.
3. Lahav O., Santiago B. X., Webster A. M., Strauss Michael A., Davis M., Dressler A., Huchra J. P. The supergalactic plane revisited with the Optical Redshift Survey//Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 312, Issue 1, pp. 166-176.
4. Zel'dovich, Ya. B. Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations//Astronomy and Astrophysics, Vol. 5, p. 84 - 89, 1970.
5. С.Н. Гурбатов, А.И. Саичев, С.Ф. Шандарин. Крупномасштабная структура Вселенной. Приближение Зельдовича и модель слипания//УФН 182, 233–261, 2012.
6. Peebles P.J.E. The peculiar velocity field in the local supercluster// ApJ, 205, 318,1976.
7. Karen L. Masters. GALAXY FLOWS IN AND AROUND THE LOCAL SUPERCLUSTER/Ph.D.Thesis, Cornell University 2005.

8. Gabriella De Lucia, Simone Weinmann, Bianca M. Poggianti, Alfonso Aragon-Salamanca, Dennis Zaritsky. The environmental history of group and cluster galaxies in a Λ CDM Universe//arXiv:1111.6590v2 [astro-ph.CO] 23 Mar 2012M.
9. A. Troxel, Austin Peel, Mustapha Ishak. Effects of anisotropy on gravitational infall in galaxy clusters using an exact general relativistic model//arXiv:1311.5651 [astro-ph.CO]
10. Трунев А.П. Общая теория относительности и метрика галактик// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №10(094). С. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf>
11. Трунев А.П. Метрика местного суперкластера галактик и общая теория относительности // Научный журнал КубГАУ, 2013. – №10(094). С. 893 – 916. – IDA [article ID]: 0941310061. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/61.pdf>
12. Einstein A. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1917, 1, 142—152; Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 1. – М., Наука, 1965, с. 601.
13. Weyl H., Zur Gravitationstheorie, Ann. Phys. 54, 1917; Weyl H., Bemerkung über die axialsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen, Ann. Phys. 59, 1919.
14. Levi-Civita T., ds² Einsteiniani in campi Newtoniani, Atti Accad. Naz. dei Lincei 27, fasc. 7—8, Roma, 1918; ds² Einsteiniani in campi Newtoniani, Atti Accad. Naz. Lincei 28, 1919;
15. Delsarte J. Sur les ds² d'Einstein a symetrie axiale. - Paris, 1934; Delsarte J. Sur les ds² binaires et le probleme d'Einstein, Journ Math. Pures Appl. 13, 19, 1934.
16. Albert Einstein, N. Rosen. On Gravitational Waves// J. Franklin Inst., 1937, 223, 43—54.
17. Godel K. An example of a new type of cosmological solution of Einstein's field equations of gravitation// Rev. Mod. Phys. 21,447, 1949.
18. A.Z. Petrov. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.
19. P. Szekeres. A class of inhomogeneous cosmological models//Comm. Math. Phys. Volume 41, Number 1 (1975), 55-64.
20. L.D. Landau, E.M. Lifshitz (1971). The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). Pergamon Press. ISBN 978-0-08-016019-1.
21. Horvath I., Hakkila J., Bagoly Z. The largest structure of the Universe, defined by Gamma-Ray Burst// Article 33 in eConf C1304143, 2013.
22. G. Scharf. Inhomogeneous cosmology in the cosmic rest frame// arXiv:1312.2695v2 [astro-ph.CO] 13 Dec 2013.
23. Distances//arXiv: 1309.5382v1 [astro-ph.CO] 20 Sep 2013.
24. Steven Weinberg. Gravitation and Cosmology. – John Wiley & Sons, 1972.
25. S.W. Hawking, G.F.R. Ellis. The large scale structure of space-time. – Cambridge University Press, 1973.
26. В.Д. Захаров. Гравитационные волны и теория тяготения Эйнштейна. – М.: Наука, 1972.
27. В.А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения (2-е изд.). – М.: ГИФМЛ, 1961.
28. De Donder T. La gravifique einsteinienne. Paris, 1921.
29. Lanczos C. Ein vereinfachendes Koordinatensystem für die Einsteinschen Gravitationsgleichungen//Phys. ZS. 23, 537, 1922.

30. Martin Rees, Remo Ruffini, John A Wheeler. Black holes, gravitational waves and cosmology: an introduction to current research. -New York, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc. (Topics in Astrophysics and Space Physics. Volume 10), 1974. 182 p.

References

1. Gerard de Vaucouleurs. Further evidence for a local super-cluster of galaxies: rotation and expansion//Astronomical Journal, Vol. 63, p. 253, 1958.
2. Sidney van den Bergh. The Local Supercluster of Galaxies//Astronomical Society of the Pacific, Vol. 72, No. 427, p.312-313, 1960.
3. Lahav O., Santiago B. X., Webster A. M., Strauss Michael A., Davis M., Dressler A., Huchra J. P. The supergalactic plane revisited with the Optical Redshift Survey//Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 312, Issue 1, pp. 166-176.
4. Zel'dovich, Ya. B. Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations//Astronomy and Astrophysics, Vol. 5, p. 84 - 89, 1970.
5. S.N. Gurbatov, A.I. Saichev, S.F. Shandarin. Krupnomasshtabnaja struktura Vselennoj. Priblizhenie Zel'dovicha i model' slipanja//UFN 182, 233–261, 2012.
6. Peebles P.J.E. The peculiar velocity field in the local supercluster// ApJ, 205, 318,1976.
7. Karen L. Masters. GALAXY FLOWS IN AND AROUND THE LOCAL SUPERCLUSTER/Ph.D.Thesis, Cornell University 2005.
8. Gabriella De Lucia, Simone Weinmann, Bianca M. Poggianti, Alfonso Aragon-Salamanca, Dennis Zaritsky. The environmental history of group and cluster galaxies in a CDM Universe//arXiv:1111.6590v2 [astro-ph.CO] 23 Mar 2012M.
9. A. Troxel, Austin Peel, Mustapha Ishak. Effects of anisotropy on gravitational infall in galaxy clusters using an exact general relativistic model//arXiv:1311.5651 [astro-ph.CO]
10. Trunev A.P. Obshhaja teorija odnositel'nosti i metrika galaktik// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №10(094). S. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf>
11. Trunev A.P. Metrika mestnogo superklastera galaktik i obshhaja teorija odnositel'nosti // Nauchnyj zhurnal KubGAU, 2013. – №10(094). S. 893 – 916. – IDA [article ID]: 0941310061. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/61.pdf>
12. Einstein A. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitdtstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1917, 1, 142—152; Al'bert Jejshtejn. Sobranie nauchnyh trudov. T. 1. – M., Nauka, 1965, s. 601.
13. Weyl H., Zur Gravitationstheorie, Ann. Phys. 54, 1917; Weyl H., Bemerkung uber die axialsymmetrischen Losungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen, Ann. Phys. 59, 1919.
14. Levi-Sivita T., ds2 Einsteiniani in campi Newtoniani, Atti Accad. Naz. dei Lincei 27, fasc. 7—8, Roma, 1918; ds2 Einsteiniani in campi Newtoniani, Atti Accad. Naz. Lincei 28, 1919;
15. Delsarte J. Sur les ds2 d'Einstein a symetrie axiale. - Paris, 1934; Delsarte J. Sur les ds2 binaires et le probleme d'Einstein, Journ Math. Pures Appl. 13, 19, 1934.
16. Albert Einstein, N. Rosen. On Gravitational Waves// J. Franklin Inst., 1937, 223, 43—54.
17. Godel K. An example of a new type of cosmological solution of Einstein's field equations of gravitation// Rev. Mod. Phys. 21,447, 1949.

18. A.Z. Petrov. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.
19. P. Szekeres. A class of inhomogeneous cosmological models//Comm. Math. Phys. Volume 41, Number 1 (1975), 55-64.
20. L.D. Landau, E.M. Lifshitz (1971). The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). Pergamon Press. ISBN 978-0-08-016019-1.
21. Horvath I., Hakkila J., Bagoly Z. The largest structure of the Universe, defined by Gamma-Ray Burst// Article 33 in eConf C1304143, 2013.
22. G. Scharf. Inhomogeneous cosmology in the cosmic rest frame// arXiv:1312.2695v2 [astro-ph.CO] 13 Dec 2013.
23. Distances//arXiv: 1309.5382v1 [astro-ph.CO] 20 Sep 2013.
24. Steven Weinberg. Gravitation and Cosmology. – John Wiley & Sons, 1972.
25. S.W. Hawking, G.F.R. Ellis. The large scale structure of space-time. – Cambridge University Press, 1973.
26. V.D. Zaharov. Gravitacionnye volny i teorija tjadotenija Jejshtejna. – M.: Nauka, 1972.
27. V.A. Fok. Teorija prostranstva, vremeni i tjadotenija (2-e izd.). – M.: GIFML, 1961.
28. De Donder T. La gravifique einsteinienne. Paris, 1921.
29. Lanczos C. Ein vereinfachendes Koordinatensystem fur die Einsteinschen Gravitationsgleichungen//Phys. ZS. 23, 537, 1922.
30. Martin Rees, Remo Ruffini, John A Wheeler. Black holes, gravitational waves and cosmology: an introduction to current research. -New York, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc. (Topics in Astrophysics and Space Physics. Volume 10), 1974. 182 p.