

УДК 621.3.013+537.212

UDC 621.3.013+537.212

**РЕШЕНИЕ ПОЛЕВЫХ ЗАДАЧ
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ С ПОМОЩЬЮ
ВТОРИЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ ПОЛЯ И
РЯДОВ ФУРЬЕ****SOLUTION OF FIELD TASKS OF AN
ELECTRICAL ENGINEERING WITH THE
HELP OF SECONDARY SOURCES OF A FIELD
AND FOURIER SERIES**

Попов Борис Клавдиевич
к.т.н., доцент

Popov Boris Klavdievich
Cand.Tech.Sci., associate professor

Попова Ольга Борисовна
к.т.н., доцент
*Кубанский государственный технологический уни-
верситет, Краснодар, Россия, 350072, ул. Москов-
ская, 2, pbk47@mail.ru*

Popova Olga Borisovna
Cand.Tech.Sci., associate professor
Kuban State Technical University, Krasnodar, Russia

Для полевой задачи приведено аналитическое ре-
шение контрольного примера, с помощью которого
выведены условия правильного применения мето-
да вторичных источников поля. Найдено числен-
ное решение в виде ряда Фурье той же самой зада-
чи, но с использованием метода вторичных источ-
ников. Предложен метод учёта неоднородности
среды, который так вводит вторичные источники,
что аналитическое и численное решения совпадают

For a field task, we have shown the analytical solution
of the control example by means of which the condi-
tions of the correct application of a method of second-
ary sources of a field. The numerical decision in the
form of Fourier series of the same task, but with use of
the method of secondary sources is found. The method
of the registration of heterogeneity of the environment
which enters secondary sources the way that bring
together analytical and numerical solutions is offered

Ключевые слова: АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ,
КОНТРОЛЬНЫЙ ПРИМЕР, РЯД ФУРЬЕ, МЕТОД
ВТОРИЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ ПОЛЯ,
ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Keywords: ANALYTICAL SOLUTION, CONTROL
EXAMPLE, FOURIER SERIES, METHOD OF
SECONDARY SOURCES OF FIELD, NUMERICAL
SOLUTION

Для нахождения параметров электромагнитного поля, как в одно-
родных, так и в неоднородных средах в виде некоторых простых геомет-
рических фигур существует ряд хорошо отработанных методов, позволя-
ющих находить либо аналитическое, либо численное решение с любой
степенью точности. Однако, при проектировании реальных технических
устройств возникает необходимость определять параметры поля для слож-
ных геометрических фигур. Часто такие задачи усложняются нелинейными
характеристиками рассматриваемых сред. Задача становится ещё более
сложной, когда возникает необходимость рассматривать электромагнит-
ный процесс в динамике. Следует заметить, что нахождение параметров
поля в статическом режиме для сложной электромеханической системы
сама по себе очень непростая краевая задача математической физики, ре-
шение которой современными методами вычислительной математики тре-
бует значительных временных и технических ресурсов ЭВМ. Поэтому воз-

никает проблема разработки методов решения подобных краевых задач с целью увеличения быстродействия и уменьшения необходимой памяти ЭВМ.

В настоящее время для расчёта электромагнитного поля в неоднородных средах применяется метод конечных элементов, являющийся развитием теории сплайнов и конечно-разностных методов. На наш взгляд метод конечных элементов обладает рядом недостатков. Один из существенных недостатков заключается в том, что надо запоминать характеристики поля во всех точках пространства. А это громадный объём информации, который необходимо обрабатывать и хранить. Как следствие, возникает потеря точности расчёта. Этому методу есть альтернатива – метод вторичных источников поля, который получил широкое развитие в нашей стране в конце прошлого века. Он лишён указанного недостатка, так как решается, в основном, задача определения на поверхности раздела сред плотности зарядов, либо токов, имитирующих заданную неоднородность. Для реальных технических устройств поверхности раздела сред имеют ограниченные размеры. Поэтому объём информации о поверхностных источниках меньше чем о пространственном распределении поля. Однако и у этого метода есть недостаток, показанный ниже.

Рассмотрим правомерность применения метода вторичных источников поля в предложенном виде [1 – 4] на базе контрольного примера. Затем покажем возможность применения рядов Фурье для решения полевой задачи, используя понятие обобщённой функции для вторичных источников в виде поверхностных зарядов.

Для оценки правомерности наших выводов разработаем простой контрольный пример в виде одномерной полевой задачи, имеющей аналитическое решение (см. рисунок 1).

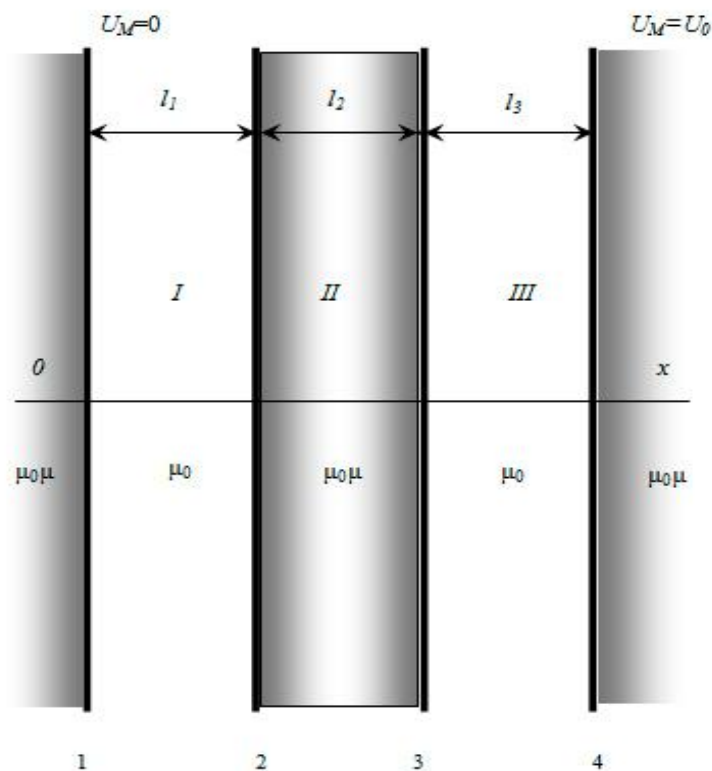


Рисунок 1. Эскиз рассматриваемой задачи.

Имеются две бесконечные ферромагнитные области, обращённые друг к другу поверхностями 1 и 4. Магнитная проницаемость этих областей $\mu_0 \mu$. Между этими областями расположена ферромагнитная бесконечная вставка с магнитной проницаемостью $\mu_0 \mu$. Магнитный потенциал на поверхности 1 – $U_M = 0$, а на поверхности 4 – $U_M = U_0$.

Определим распределение магнитного потенциала U_M и напряжённости магнитного поля \vec{H} в областях I, II и III (см. рисунок 1).

Между поверхностями 1 и 4 ток отсутствует, поэтому распределение магнитного потенциала будет описываться уравнением Лапласа для одномерного случая

$$\frac{d^2 U_M}{d x^2} = 0. \tag{1}$$

Имеем три одномерные взаимосвязанные граничные задачи, подчинённые следующим краевым условиям:

поверхность 1 – $U_M = 0$, при $x = 0$; (2)

поверхность 2 – $\mu_0 H_{xI} = \mu_0 \mu H_{xII}$, при $x = l$; (3)

поверхность 3 – $\mu_0 \mu H_{xII} = \mu_0 H_{xIII}$, при $x = 2l$; (4)

поверхность 4 – $U_M = U_0$, при $x = 3l$, (5)

где H_{xI} , H_{xII} и H_{xIII} – напряжённости магнитного поля в области I (поверхность 2), области II (поверхности 2 или 3) и области III (поверхность 3), соответственно.

Для упрощения будем считать $l_1 = l_2 = l_3 = l$.

Решение уравнения (1) в общем виде будет иметь вид прямой линии

$$U_M = C_1 x + C_2, \tag{6}$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, определяемые из краевых условий (2 – 5).

Учитывая указанные краевые условия и выражение

$$\vec{H} = -\text{grad} U_M = -\frac{dU_M}{dx} \vec{i}, \tag{7}$$

определим постоянные интегрирования в выражении (6) для всех областей.

Окончательно выражения для магнитных потенциалов U_M и напряжённости магнитного поля H_x для разных областей будут иметь следующий вид:

область I – $U_{MI} = \mu \frac{U_0}{l(2\mu+1)} x$, (8)

$$H_{xI} = -\mu \frac{U_0}{l(2\mu+1)}; \tag{9}$$

область II – $U_{MII} = \frac{U_0}{l(2\mu+1)}(x-2l) + U_0 \frac{\mu+1}{2\mu+1}$, (10)

$$H_{xII} = -\frac{U_0}{l(2\mu+1)}; \tag{11}$$

область III – $U_{MIII} = \mu \frac{U_0}{l(2\mu+1)}(x-3l) + U_0$, (12)

$$H_{xIII} = -\mu \frac{U_0}{l(2\mu+1)}. \tag{13}$$

Применяя идею вторичных источников поля и используя полученное решение (8) – (13), определим ту конфигурацию поля, которая должна обеспечиваться этими источниками.

Напомним метод вторичных источников поля [1]. Сначала определяют электромагнитное поле в однородном пространстве от системы независимых источников поля. Затем на границах раздела сред с разными характеристиками вносят систему распределённых поверхностных зарядов либо токов (вторичные источники поля), зависящую от поля исходных источников и характеристик сред. Определяют распределение поля от этой системы вторичных источников поля. Складывают поля от исходных источников поля и вторичных источников поля и получают искомую картину электромагнитного поля. Величины вторичных источников поля на поверхности раздела сред определяют, исходя из граничных условий и теоремы Гаусса для зарядов или закона полного тока для токов.

Найдём, используя решение (6) уравнения (1) и граничные условия (2) и (5), распределение магнитного потенциала в рассмотренной выше конструкции при отсутствии магнитной области II .

$$U_M = \frac{U_0}{3l} x. \quad (14)$$

Учитывая выражение (7), вычислим напряжённость магнитного поля

$$H_x = -\frac{U_0}{3l}. \quad (15)$$

Как было сказано выше, определим конфигурацию поля, которое нужно сложить с полем по формулам (14) и (15), чтобы получить решения (8 – 13) для неоднородной среды.

Для вычисления напряжённости U'_M , имитирующей вторичные источники поля, вычтем из решения (8 – 13) решение (14):

область I – $U'_{MI} = U_{MI} - U_M = \mu \frac{U_0}{l(2\mu+1)} x - \frac{U_0}{3l} x = \frac{\mu-1}{2\mu+1} \frac{U_0}{3l} x;$ (16)

область II – $U'_{MII} = U_{MII} - U_M = \frac{U_0}{l(2\mu+1)}(x-2l) + U_0 \frac{\mu+1}{2\mu+1} - \frac{U_0}{3l} x =$
 $= -\frac{\mu-1}{2\mu+1} \frac{2U_0}{3l} x + \frac{\mu-1}{2\mu+1} U_0;$ (17)

область III – $U'_{MIII} = U_{MIII} - U_M = \mu \frac{U_0}{l(2\mu+1)}(x-3l) + U_0 - \frac{U_0}{3l} x =$
 $= \frac{\mu-1}{2\mu+1} \frac{2U_0}{3l} x - \frac{\mu-1}{2\mu+1} U_0.$ (18)

Результатирующие графики приведены на рисунке 2.

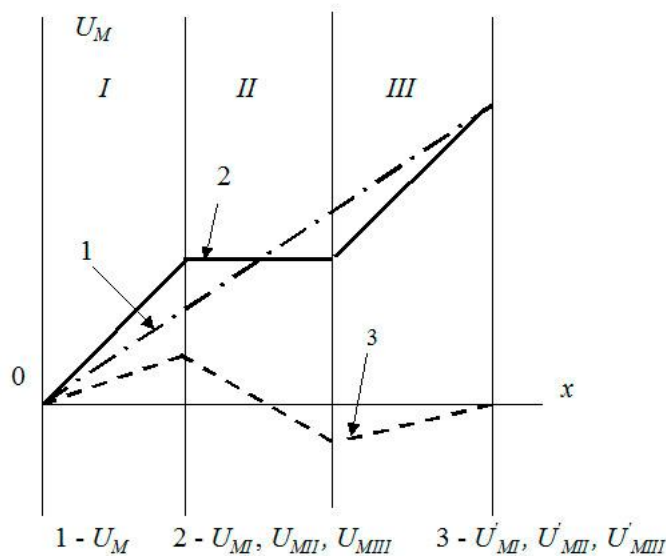


Рисунок 2. Зависимости для U_M .

Определим зависимости для напряжённостей магнитного поля, которые должны обеспечиваться предполагаемыми вторичными источниками поля (см. рисунок 3).

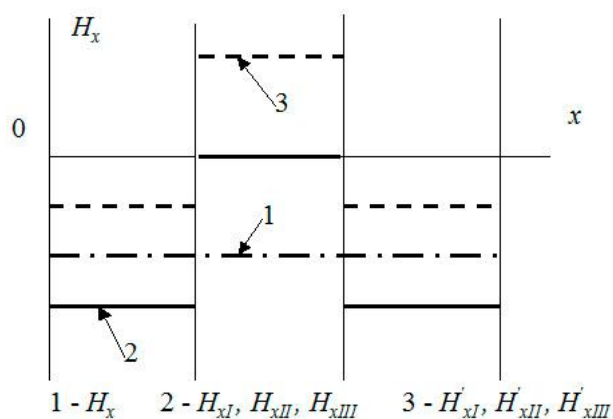


Рисунок 3. Зависимости для H_x .

Эти напряжённости получены, учитывая выражения (7) и (16 – 18), а именно:

$$\text{область I} - H'_{xI} = -\left(\frac{\mu-1}{2\mu+1}\right)\frac{U_0}{3l}; \quad (19)$$

$$\text{область II} - H'_{xII} = \left(\frac{\mu-1}{2\mu+1}\right)\frac{2U_0}{3l}; \quad (20)$$

$$\text{область III} - H'_{xIII} = -\left(\frac{\mu-1}{2\mu+1}\right)\frac{U_0}{3l}. \quad (21)$$

Рассмотрим, как учитывают среду в виде ферромагнитной области II, в соответствии с методом вторичных источников поля другие авторы [1]. Вводится дополнительная нормальная составляющая напряжённости магнитного поля H'_x на границе раздела сред. В области I суммарная нормальная составляющая напряжённости поля равна $H'_x + H_x$, а в области II – $H'_x - H_x$ [1]. Учитывая граничные условия (3)

$$\mu_0(H_x + H'_x) = \mu_0\mu(H_x - H'_x). \quad (22)$$

После несложных преобразований определяем

$$H'_x = \frac{\mu-1}{\mu+1}H_x = -\frac{\mu-1}{\mu+1}\frac{U_0}{3l}. \quad (23)$$

Проанализируем полученные результаты. Во-первых, видно из (19) и (20), что в точном решении краевой задачи, полученном аналитически, дополнительная составляющая нормальной напряжённости поля H'_x , направ-

ленная в немагнитную среду, по абсолютной величине не равна такой же составляющей, направленной в магнитную среду.

А также видно, что значение H'_x , соответствующее точному решению, не равно H'_x , введённому с помощью известного метода вторичных источников поля. Это видно из выражений (19), (20), (21) и (23).

Решим рассматриваемую задачу с помощью метода, предложенного в [1], применяя ряды Фурье.

В соответствии с этим методом на поверхности 2 сосредоточен поверхностный заряд ρ_{s2} , а на поверхности 3 – ρ_{s3} .

Для определения ρ_{s2} и ρ_{s3} рассмотрим рисунок 4 и применим теорему Гаусса [5]

$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{\rho_s}{\mu_0}, \quad (24)$$

где $d\vec{s}$ – вектор внешней нормали единичной поверхности;

ρ_s – заряд, заключённый в области S .

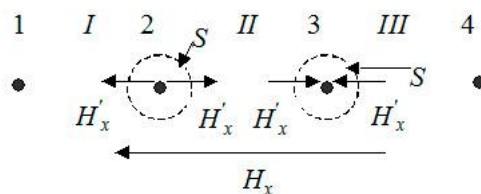


Рисунок 4. Поле вторичных источников.

Учитывая (23), (24) и рисунок 4, получим [1]

$$\rho_{s2} = 2\mu_0 \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} \right) \frac{U_0}{3l}, \quad (25)$$

$$\rho_{s3} = -2\mu_0 \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} \right) \frac{U_0}{3l}. \quad (26)$$

Уравнение (24) в дифференциальной форме будет иметь вид [5]

$$\frac{dH'_x}{dx} = \frac{\rho_s}{\mu_0}. \quad (27)$$

Применяя выражение (7), получим одномерное уравнение Пуассона

$$\frac{d^2 U'_M}{dx^2} = -\frac{\rho_s}{\mu_0}. \quad (28)$$

Для рассматриваемого случая уравнение (28) принимает вид

$$\frac{d^2 U'_M}{dx^2} = -\frac{1}{\mu_0} (\rho_{s2} + \rho_{s3}), \quad (29)$$

где ρ_{s2} и ρ_{s3} – обобщённые функции, учитывающие поверхностное распределение зарядов (25), (26).

В данном случае мы вынуждены применить аппарат обобщённых функций, так как толщина области распределения поверхностных зарядов равна нулю и обычное разложение в ряды Фурье без рассмотрения предельных переходов невозможно.

Решение уравнения (29) будем искать в виде нечётного ряда Фурье

$$U'_M = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{2pn}{3l} x. \quad (30)$$

Подставим (30) в (29), умножим левую и правую части полученного выражения на $\sin\left(\frac{2pn}{3l} x\right)$ и проинтегрируем от 0 до l .

Левая часть уравнения (29) примет вид

$$-\int_0^{3l} \left(\frac{2pn}{3l}\right)^2 B_n \sin^2\left(\frac{2pn}{3l} x\right) dx = -\frac{3l}{2} \left(\frac{2pn}{3l}\right)^2 B_n. \quad (31)$$

Правая часть уравнения (29) преобразуется к выражению

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\mu_0} \int_0^{3l} (\rho_{s2} + \rho_{s3}) \sin\left(\frac{2pn}{3l} x\right) dx = \\ & = -\frac{1}{\mu_0} \left(\rho_{s2} \sin\left(\frac{2pn}{3l} l\right) + \rho_{s3} \sin\left(\frac{2pn}{3l} 2l\right) \right) \end{aligned} \quad (32)$$

При вычислении интеграла (32) использовалась идея интегрального соотношения для обобщённых функций [6].

Приравняем (31) и (32) и, учитывая выражение $k_n = \frac{2pn}{3l}$ найдём B_n

$$B_n = \frac{2}{3l k_n^2} \left(\frac{\rho_{s2}}{\mu_0} \sin(k_n l) + \frac{\rho_{s3}}{\mu_0} \sin(k_n 2l) \right). \quad (33)$$

На рисунке 5 представлено решение (линия 4) в виде ряда Фурье.

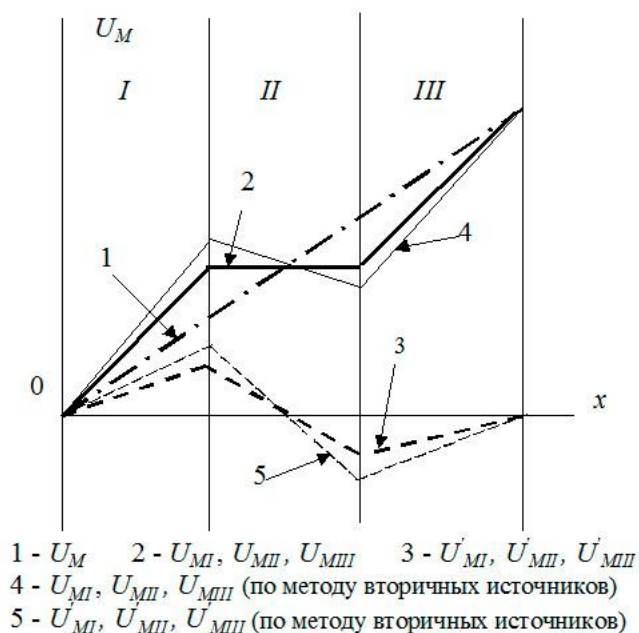


Рисунок 5. Сравнение численного и аналитического решений.

Полученное решение рассчитано на ЭВМ с использованием выведенных формул (30) и (33). Сходимость ряда хорошая, уже при 20 членах ряда все углы острые. Явление Гиббса не наблюдается.

Видно, что наше решение, полученное аналитически, и решение по известному методу вторичных источников поля [1] не совпадают.

Из результатов, приведённых на рисунке 5 видно, что уравнения с помощью рядов качественно решаются корректно. Однако заряды ρ_{s2} и ρ_{s3} определены неправильно, что говорит о неправомерности выводов, приведённых в [1].

Попробуем решить эту проблему, учитывая намагничивающую среду следующим образом. В отличие от рисунка 4 и выражений (22) и (23) среда учитывается двумя разными векторами H'_x (воздух) и H'_{xc} (ферромагнетик) по формуле

$$\mu_0 (H_x + H'_x) = \mu_0 \mu (H_x + H'_{xc}). \tag{34}$$

При учёте влияния границы знаки H'_x и H'_{xc} учитываться не будут. Эти знаки получатся в процессе решения.

Из (34) следует

$$H'_x = (\mu - 1)H_x + \mu H'_{xc}. \quad (35)$$

Используя выражения (6), (15) и (35) найдём распределение магнитного потенциала для вторичных источников поля в области *I*

$$U'_{MI} = \left[\frac{U_0}{3l} (\mu - 1) - \mu H'_{xc} \right] x. \quad (36)$$

Аналогично найдём распределение магнитного потенциала для вторичных источников поля в области *II*.

$$U'_{MII} = -H'_{xc} (x - 2l) + C_{2II}. \quad (37)$$

Аналогично получим результат и для области *III*.

$$U'_{MIII} = \left[\frac{U_0}{3l} (\mu - 1) - \mu H'_{xc} \right] (x - 3l). \quad (38)$$

Используя выражения (36), (37), (38) и свойство непрерывности магнитного потенциала

$$U'_{MI} = U'_{MII}, \text{ при } x = l \quad (39)$$

$$\text{и } U'_{MII} = U'_{MIII}, \text{ при } x = 2l, \quad (40)$$

определим неизвестные величины C_{2II} и H'_{xc} . Для этого составим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \left[\frac{U_0}{3l} (\mu - 1) - \mu H'_{xc} \right] l = H'_{xc} l + C_{2II} \\ C_{2II} = - \left[\frac{U_0}{3l} (\mu - 1) - \mu H'_{xc} \right] l \end{cases}. \quad (41)$$

Решая систему (41), вычислим

$$H'_{xc} = \frac{2U_0}{3l} \frac{\mu - 1}{2\mu + 1}, \quad (42)$$

$$C_{2II} = \frac{U_0}{3} \frac{\mu - 1}{2\mu + 1}. \quad (43)$$

Подставляя (42) и (43) в (36), (37) и (38), получим выражения для магнитного потенциала вторичных источников поля:

$$\text{область } I - U'_{MI} = \frac{\mu - 1}{2\mu + 1} \frac{U_0}{3l} x; \quad (44)$$

$$\text{область } II - U'_{MII} = - \frac{\mu - 1}{2\mu + 1} \frac{2U_0}{3l} x + \frac{\mu - 1}{2\mu + 1} U_0; \quad (45)$$

$$\text{область } III - U'_{MIII} = \frac{\mu - 1}{2\mu + 1} \frac{2U_0}{3l} x - \frac{\mu - 1}{2\mu + 1} U_0. \quad (46)$$

Применяя (7) к (44) – (46), получаем выражения для напряжённости магнитного поля от вторичных источников:

$$\text{область I} - H'_{xI} = -\left(\frac{\mu-1}{2\mu+1}\right)\frac{U_0}{3l}; \quad (47)$$

$$\text{область II} - H'_{xII} = \left(\frac{\mu-1}{2\mu+1}\right)\frac{2U_0}{3l}; \quad (48)$$

$$\text{область III} - H'_{xIII} = -\left(\frac{\mu-1}{2\mu+1}\right)\frac{U_0}{3l}. \quad (49)$$

Мы видим, что решения (44) – (49), полученные с помощью предложенной нами системы учёта ферромагнитной среды, полностью соответствуют аналитическому решению (16) – (21), полученному для контрольного примера классическим методом. Это подтверждает правильность предложенной нами системы учёта ферромагнитной среды.

Определяя ρ_{s2} и ρ_{s3} с помощью выражений (47) – (49) и применяя формулы (30) и (33) нами было найдено численное решение в виде ряда Фурье, которое полностью совпало с аналитическим решением, что также говорит в пользу предложенной системы.

Выводы. Нами показано, что существующая методика учёта неоднородности среды с помощью вторичных источников поля противоречит аналитическому решению, полученному классическим методом решения краевых задач. Нами предложена методика введения вторичных источников поля, позволяющая ликвидировать указанное противоречие. Показано, что возможно применение рядов Фурье в методе вторичных источников поля.

Список литературы

1. Бинс К. Анализ и расчёт электрических и магнитных полей: Пер. с англ./ К. Бинс, П. Лауренсон. – М.: Энергия, 1970. – 376 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. – М.: Высш. шк., 1973. – 752 с.
3. Тозони О.В. Метод вторичных источников в электротехнике. – М.: Энергия, 1975. – 296 с.

4. Тозони О.В. Расчёт трёхмерных электромагнитных полей/ О.В. Тозони, И.Д. Маергойз. – Киев: Техніка, 1974. – 352 с.
5. Нейман Л.Р. Теоретические основы электротехники/ Л.Р. Нейман, К.С. Демирчян. – М.; Л.: Энергия, 1966. – Т. 2 407 с.
6. Колобов А.М. Избранные главы высшей математики. – Минск: Высш. шк., 1965. – 224 с.

References

1. Bins K. Analiz i raschjot jelektricheskikh i magnitnyh polej: Per. s angl./ K. Bins, P. Laurenson. – М.: Jenergija, 1970. – 376 s.
2. Bessonov L.A. Teoreticheskie osnovy jelektrotehniki. – М.: Vyssh. shk., 1973. – 752 s.
3. Tozoni O.V. Metod vtorichnyh istochnikov v jelektrotehnike. – М.: Jenergija, 1975. – 296 s.
4. Tozoni O.V. Raschjot trjohmernyh jelektromagnitnyh polej/ O.V. Tozoni, I.D. Maer-gojz. – Kiev: Tehnika, 1974. – 352 s.
5. Nejman L.R. Teoreticheskie osnovy jelektrotehniki/ L.R. Nejman, K.S. Demirchjan. – М.; Л.: Jenergija, 1966. – Т. 2 407 s.
6. Kolobov A.M. Izbrannye glavy vysshej matematiki. – Minsk: Vyssh. shk., 1965. – 224 s.