

УДК 621.865

UDC 621.865

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ  
ТРЕХЗВЕННОГО РОБОТА С  
УПРАВЛЯЕМЫМИ СИЛАМИ ТРЕНИЯ ПО  
АБСОЛЮТНО ГЛАДКОЙ  
ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

**MODELING OF THE MOTION OF THREE-  
LINK ROBOT WITH OPERATED POWER OF  
FRICTION ON ABSOLUTELY SMOOTH  
HORIZONTAL SURFACE**

Локтионова Оксана Геннадьевна  
д.т.н., доцент

Loktionova Oksana Gennadijevna  
Dr.Sci.Tech., associate professor

Яцун Сергей Федорович  
д.т.н., профессор

Yatsun Sergey Fedorovich  
Dr.Sci.Tech., professor

Рублев Сергей Борисович

Rublev Sergei Borisovich

Волкова Людмила Юрьевна

Volkova Ludmila Yurievna

Наумов Григорий Сергеевич  
*Юго-Западный Государственный Университет,  
Курск, Россия*  
e-mail: [teormeh@inbox.ru](mailto:teormeh@inbox.ru)

Naumov Grigorii Sergeevich  
*South-West State University, Kursk, Russia*  
e-mail: [teormeh@inbox.ru](mailto:teormeh@inbox.ru)

В данной статье рассматривается трехзвенный робот, перемещающийся по гладкой горизонтальной поверхности. Разработана математическая модель объекта, представлены результаты численного моделирования перемещения устройства

In the given article we have shown the three-link robot, moving on smooth horizontal surface. The mathematical model of the object is designed, the results of the numerical modeling of the displacement device is presented

Ключевые слова: ТРЕХЗВЕННЫЙ РОБОТ, ГЛАДКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ, СИЛЫ ТРЕНИЯ, КОНТАКТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Keyword: THREE-LINK, SMOOTH SURFACE, POWER OF FRICTION, CONTACT ELEMENTS

## **Введение**

Исследования в области создания механизмов, имитирующих поведение реальных биологических прототипов – новое, активно развивающееся направление развития науки. Имитация или копирование принципов поведения живых организмов позволяет создавать устройства, обладающие уникальными свойствами, которые находят конкретное практическое применение. Именно к таким устройствам относятся «змееподобные» роботы. В дальнейшем под змееподобным роботом будем понимать совокупность твердых тел связанных между собой шарнирами, которые оснащены приводами вращательного движения, позволяющими совершать звеньям относительное движение [2-9].

<http://ej.kubagro.ru/2013/07/pdf/43.pdf>

В настоящей работе исследуется характер движения звеньев при воздействии на них различных управляющих моментов.

### **Описание трехзвенного робота**

Рассмотрим ползающего робота, состоящего из трёх звеньев, общий вид которого приведен на рис. 1. Звенья 1 и 2, 2 и 3 соединены между собой приводами вращательного движения 4 и 5. Взаимодействие робота с поверхностью происходит при помощи опорных элементов 6 – 9.

Описываемый робот отличается от известных тем, что крайние точки звеньев устройства оснащены опорными элементами 6 - 9, силы трения в которых с поверхностью являются управляемыми величинами, что достигается применением специальных приводов, изменяющих свойства контактных поверхностей [7]. Это приводит к тому, что в определенные моменты времени силы трения могут фиксировать на поверхности требуемые точки звеньев робота, а могут быть равны нулю. Отсюда вытекает то, что существуют две принципиально различные фазы движения объекта. В первой фазе при наличии сил трения можно говорить о движении робота по шероховатой поверхности, при этом происходит изменение положения центра масс объекта, во второй фазе – по гладкой поверхности, такой вид перемещения используется для изменения конфигурации устройства.

Фаза движения робота при отсутствии фиксации точек звеньев является наиболее сложной для моделирования, поэтому в данной работе уделено особое внимание исследованию поведения устройства именно в этой фазе.

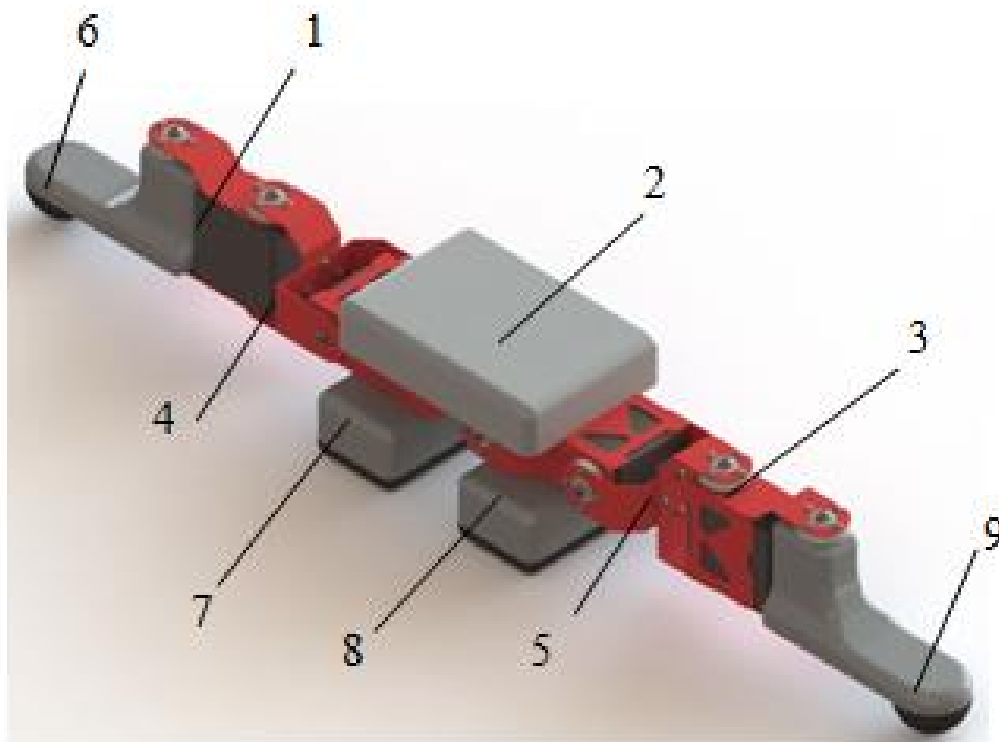


Рис. 1. Общий вид робота: 1 – 3 – звенья, 4, 5 – приводы, 6 – 9 – опоры

### Математическая модель робота

Для описания движения многозвенника введем абсолютную неподвижную систему координат  $Oxy$  и относительные системы координат  $O_i x_i y_i$ , которые жестко связаны с точками  $O_1, O_2, O_3$ . Углы  $\varphi_i$  определяют повороты систем координат  $O_i x_i y_i$  относительно  $Oxy$  (рис. 2).

При разработке математической модели будем считать, что все звенья робота  $i=1 \div 3$  являются абсолютно твердыми телами и представляют собой стержни длинами  $l_i$ , массы  $m_i$  которых сосредоточены в центрах их симметрии  $C_i$ .

Положение звеньев механической системы описывается вектором обобщенных координат:

$$\bar{q} = (q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5)^T, \quad (2)$$

в котором  $q_1=x_{C1}, q_2=y_{C1}$  – координаты центра масс звена 1 в системе  $Oxy$ ,  $q_3=\varphi_1, q_4=\varphi_2$  и  $q_5=\varphi_3$  – углы поворота звеньев.

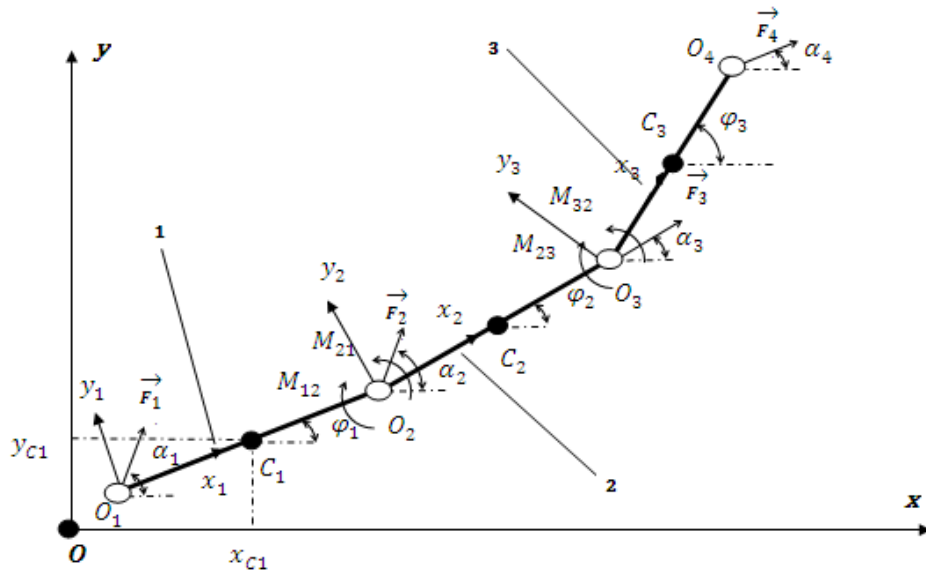


Рис. 2. Расчетная схема робота

Система дифференциальных уравнений движения устройства записывается с использованием уравнений Лагранжа второго рода и в матричной форме имеет вид:

$$A(q)\ddot{q} + B(q)\dot{q}^2 = F \tag{3}$$

где  $A(q)$ ,  $B(q)$  - матрицы коэффициентов,  $F$  - матрица обобщенных сил:

$$A(q) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}, \quad B(q) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$F = (F_{11} \quad F_{21} \quad F_{31} \quad F_{41} \quad F_{51})^T. \tag{5}$$

Коэффициенты матрицы  $A(q)$  определяются по формулам:

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_1 + m_2 + m_3, & a_{12} &= 0, & a_{13} &= -(l_1/2)\sin j_1(m_2 + m_3), & a_{14} &= -(l_2/2)\sin j_2(m_2 + 2m_3), \\ a_{15} &= -m_3(l_3/2)\sin j_3, & a_{21} &= 0, & a_{22} &= m_1 + m_2 + m_3, & a_{23} &= (l_1/2)\cos j_1(m_2 + m_3), \\ a_{24} &= (l_2/2)\cos j_2(m_2 + 2m_3), & a_{25} &= m_3(l_3/2)\cos j_3, & a_{31} &= -(m_2 + m_3)(l_1/2)\sin j_1, \\ a_{32} &= (m_2 + m_3)(l_1/2)\cos j_1, & a_{33} &= J_1 + 0.25m_2l_1^2 + 0.25m_3l_1^2, & a_{34} &= (0.5m_2 + m_3)(l_1l_2/2)\cos(j_1 - j_2), \\ a_{35} &= m_3(l_1l_3/4)\cos(j_1 - j_3), & a_{41} &= -(m_2 + 2m_3)(l_2/2)\sin j_2, & a_{42} &= (m_2 + 2m_3)(l_2/2)\cos j_2, \end{aligned}$$

$$a_{43} = (0.5m_2 + m_3)(l_1l_2/2)\cos(j_1 - j_2), \quad a_{44} = (J_2 + 0.25m_2l_2^2 + m_3l_2^2),$$

$$a_{45} = m_3(l_2l_3/2)\cos(j_2 - j_3), \quad a_{51} = -m_3(l_3/2)\sin j_3, \quad a_{52} = m_3(l_3/2)\cos j_3,$$

$$a_{53} = m_3(l_1l_3/4)\cos(j_1 - j_3), \quad a_{54} = (l_2l_3/2)m_3 \cos(j_2 - j_3), \quad a_{55} = J_3 + 0.25m_3l_3^2$$

Коэффициенты матрицы  $B(q)$  равны:

$$b_{11} = 0, \quad b_{12} = 0, \quad b_{13} = -(m_2 + m_3)(l_1/2)\cos j_1, \quad b_{14} = -(m_3 + 2m_3)(l_2/2)\sin j_2,$$

$$b_{15} = -m_3(l_3/2)\cos j_3, \quad b_{21} = 0, \quad b_{22} = 0, \quad b_{23} = -(m_2 + m_3)(l_1/2)\sin j_1,$$

$$b_{24} = -(m_2 + 2m_3)(l_2/2)\sin j_2, \quad b_{25} = -m_3(l_3/2)\sin j_3, \quad b_{31} = 0, \quad b_{32} = 0, \quad b_{33} = 0,$$

$$b_{34} = (0.5m_2 + m_3)(l_1l_2/2)\sin(j_1 - j_2), \quad b_{35} = m_3(l_1l_3/4)\sin(j_1 - j_3), \quad b_{41} = 0, \quad b_{42} = 0,$$

$$b_{43} = (0.5m_2 + m_3)(l_1l_2/2)\sin(j_2 - j_1), \quad b_{44} = 0, \quad b_{45} = m_3(l_2l_3/2)\sin(j_2 - j_3), \quad b_{51} = 0, \quad b_{52} = 0,$$

$$b_{53} = m_3(l_1l_3/4)\sin(j_3 - j_1), \quad b_{54} = m_3(l_2l_3/2)\sin(j_3 - j_2), \quad b_{55} = 0.$$

Коэффициенты матрицы  $F$  записываются следующим образом:

$$F_{11} = F_1 \cos a_1 + F_2 \cos a_2 + F_3 \cos a_3 + F_4 \cos a_4,$$

$$F_{21} = F_1 \sin a_1 + F_2 \sin a_2 + F_3 \sin a_3 + F_4 \sin a_4,$$

$$F_{31} = M_{12} + F_2(l_1/2)\sin(a_2 - j_1) + F_3(l_1/2)\sin(a_3 - j_1) + F_4(l_1/2)\sin(a_4 - j_1),$$

$$F_{41} = M_{21} + M_{23} + F_3l_2 \sin(j_2 - a_3) + F_4l_2 \sin(j_2 - a_4), \quad F_{51} = M_{32} + F_4l_3 \sin(j_3 - a_4).$$

### Моделирование движения робота

В качестве объекта моделирования рассматривается трехзвенный робот, массы и длины звеньев которого равны:  $m_i=1$  кг,  $l_i=1$  м. В качестве начальных условий моделирования используются нулевые:  $t=0$  с,  $x_{C1}=0$  м,  $\dot{x}_{C1} = 0$  м/с,  $y_{C1}=0$  м,  $\dot{y}_{C1} = 0$  м/с,  $j_1=0$  рад,  $j_2=0$  рад,  $j_3=0$  рад.

Процесс нахождения численных значений угловых и линейных перемещений, скоростей и ускорений проведем в программной среде MathCad, с использованием специального алгоритма интегрирования, позволяющего считать вторые производные от обобщенных координат константами на интервале  $[t_i, t_i+h]$ , где  $h$  – изначально заданный шаг по времени.

Цель моделирования - исследование влияния действия моментов  $M_{12}$  ( $M_{21}$ ) и  $M_{32}$  ( $M_{23}$ ) на перемещения звеньев системы при отсутствии фиксации звеньев на поверхности.

Рассмотрим движение робота под действием момента  $M_{32}$ , закон изменения которого описывается формулой:

$$M_{32} = \begin{cases} M_{32}^0, & 0 < t < t^*, \\ 0, & t > t^*, \end{cases} \quad \text{при } t^* = 2 \text{ с, } M_{32}^0 = 1 \text{ Нм.}$$

Движение робота прекращается при достижении третьим звеном угла  $\varphi_3 = \pi$ .

Положения звеньев механизма на плоскости в некоторые моменты времени приведены на рис. 3.

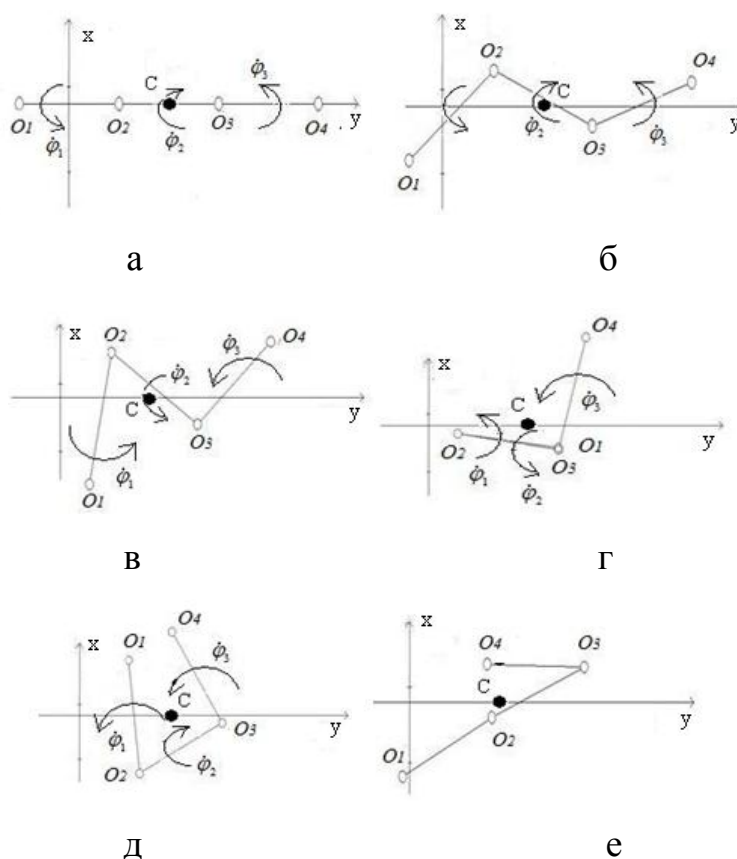


Рис. 3. Положения звеньев на плоскости в моменты времени: а)  $t=0$  с (начальное положение); б)  $t=0,25$  с; в)  $t=0,5$  с; г)  $t=0,75$  с; д)  $t=0,9$  с; е)  $t=1,05$  с (конечное положение) при действии момента  $M_{32}$

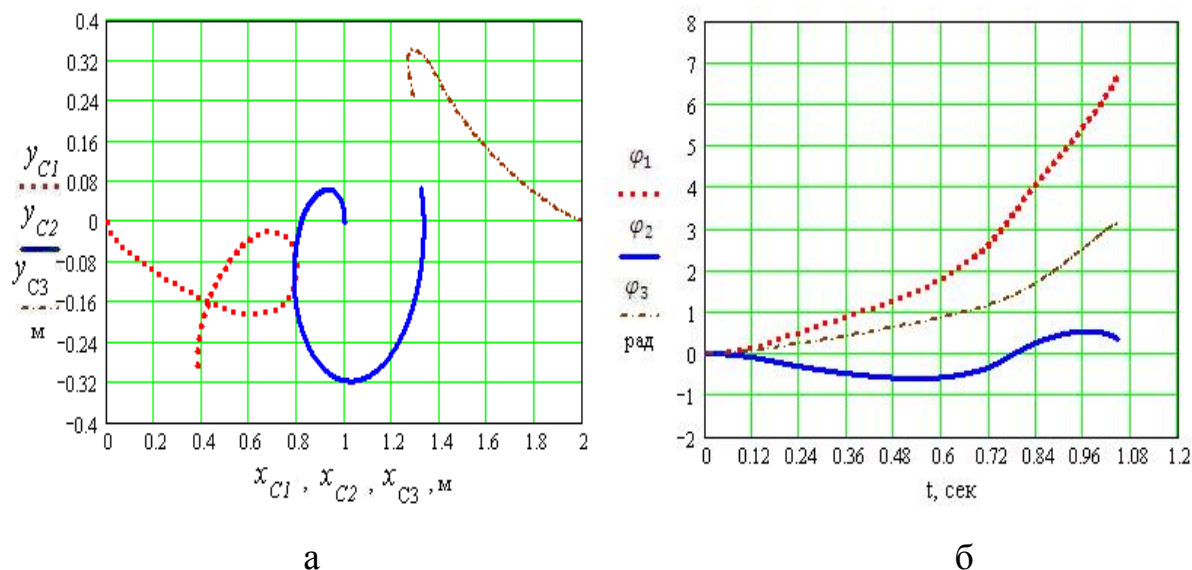


Рис. 4. Графики, полученные в результате численного моделирования: а) траектории движения центров масс  $C_1, C_2, C_3$  звеньев; б) график изменения углов поворота  $j_1, j_2, j_3$  звеньев относительно абсолютной системы координат  $OXY$  во времени

По данным графикам видно, что звенья системы совершают сложное движение, причем звенья 1 и 3 всегда вращаются против часовой стрелки, а второе звено вначале поворачивается навстречу звеньям 1 и 3, а затем меняет направления вращения на противоположное. Центр масс системы - точка  $C$  - при этом остается неподвижным.

В случае, если система движется под действием момента  $M_{21}$ , изменяющегося по закону:

$$M_{21} = \begin{cases} M_{21}^0, & 0 < t < t^*, \\ 0, & t > t^*, \end{cases} \quad \text{при } t^* = 2 \text{ с}, M_{21}^0 = 1 \text{ Нм},$$

до выполнения условия  $\varphi_2 = \pi$ , положения звеньев робота в фиксированные моменты времени имеют вид, представленный на рис. 4. По графикам видно, что звено 2 устройства поворачивается против часовой стрелки до тех пор, пока не выполнится условие  $j_2 = \pi$ , звенья 1 и 3 при этом вначале вращаются по часовой стрелке, а затем меняют направление вращения и все звенья устройства поворачиваются против

часовой стрелки. Положение центра масс системы также остается неизменным.

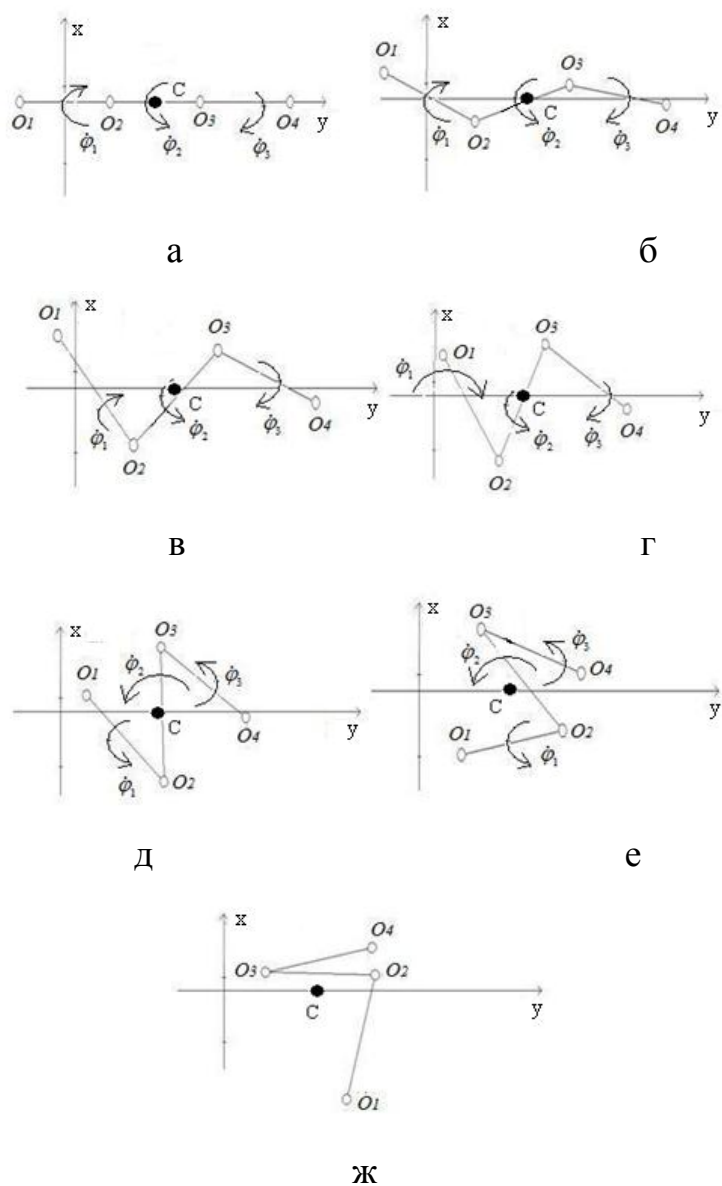


Рис. 5. Положения звеньев на плоскости в моменты времени: а)  $t=0$  с (начальное положение); б)  $t=0,25$  с; в)  $t=0,5$  с; г)  $t=0,75$  с; д)  $t=1$  с; е)  $t=1,25$  с; ж)  $t=1.5$  с (конечное положение) при действии момента  $M_{21}$



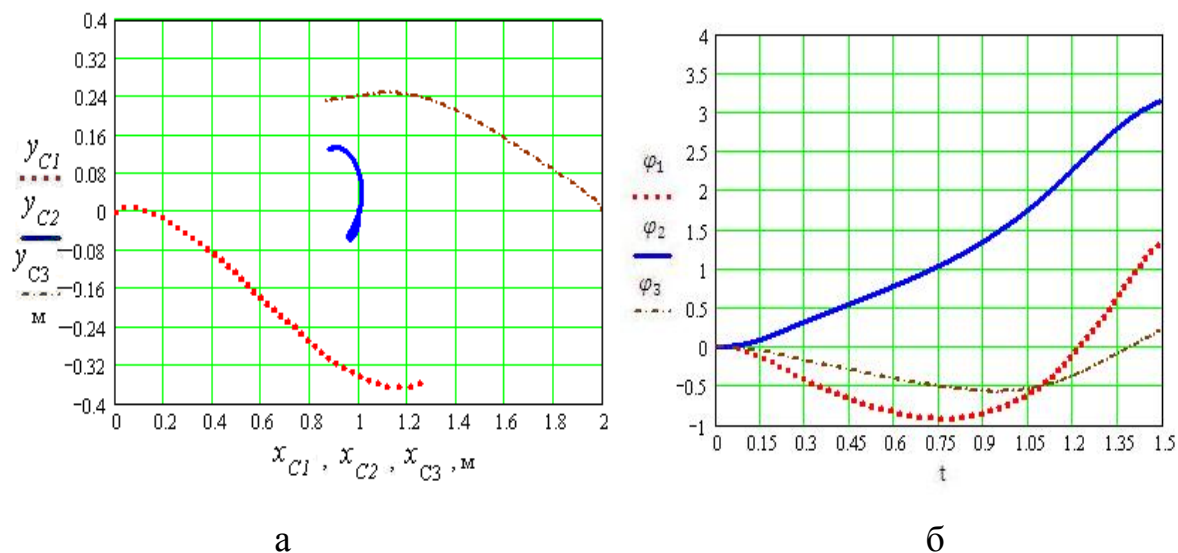


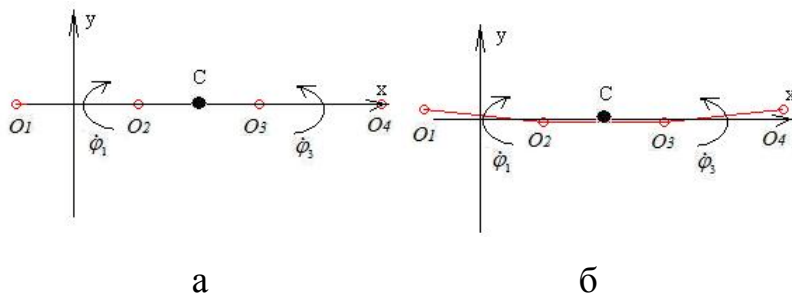
Рис. 6. Графики, полученные в результате численного моделирования: а) траектории движения центров масс  $C_1, C_2, C_3$  звеньев; б) график изменения углов поворота  $j_1, j_2, j_3$  звеньев относительно абсолютной системы координат  $OXY$  во времени

Рассмотрим движение объекта под действием моментов  $M_{12}$  и  $M_{32}$ , имеющих одинаковые модули и противоположные направления и изменяющихся по следующим законам:

$$M_{12} = \begin{cases} M_{12}^0, & 0 < t < t^*, \\ 0, & t > t^*, \end{cases} \quad M_{32} = \begin{cases} M_{32}^0, & 0 < t < t^*, \\ 0, & t > t^*, \end{cases}$$

при  $t^* = 2$  с,  $M_{12}^0 = -1$  Нм,  $M_{32}^0 = 1$  Нм.

В этом случае наблюдается симметричное движение звеньев 1 и 3 относительно центра масс системы, звено 1 поворачивается по часовой стрелке, а звено 3 – против часовой, звено 2 движется поступательно в отрицательном направлении оси  $Oy$  (рис. 5).



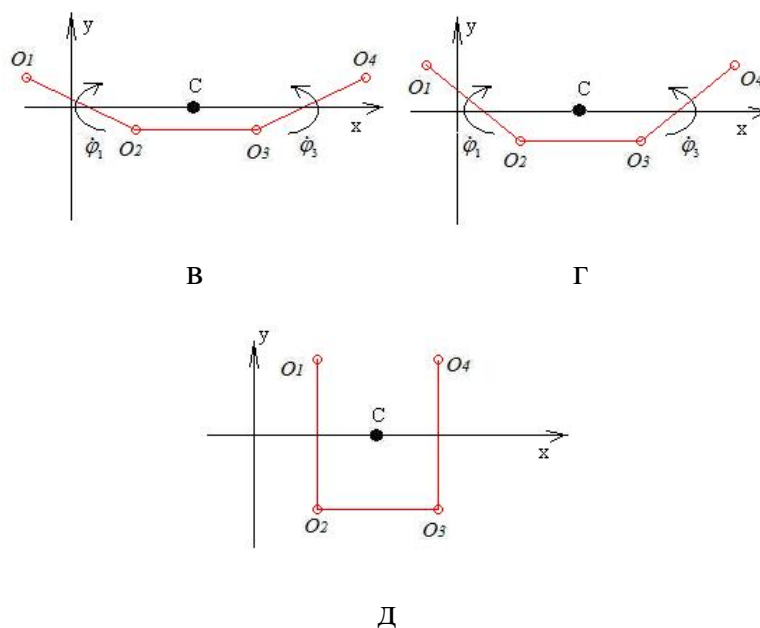


Рис. 7. Положения звеньев на плоскости в моменты времени: а)  $t=0$  с (начальное положение); б)  $t=0,2$  с; в)  $t=0,4$  с; г)  $t=0,6$  с; д)  $t=0,8$  с (конечное положение) при действии моментов  $M_{12}$  и  $M_{32}$

### Заключение

В работе рассматривается трехзвенный робот, силы взаимодействия опорных элементов которого с поверхностью являются управляемыми величинами. Представлена математическая модель объекта, описывающая фазы движения устройства при отсутствии взаимодействия опорных элементов конструкции робота с поверхностью, что соответствует движению робота по гладкой поверхности. Разработан алгоритм движения устройства, получены и проанализированы результаты численного моделирования перемещения робота по горизонтальной поверхности без учета сил сопротивления.

### Список литературы

1. Лаврентьев М. А., Лаврентьев М. М. Об одном принципе создания тяговой силы движения // Журнал прикладной механики и технической физики. 1962. № 4. С.3-9.
2. Hirose S., Monshima /1. Design and control of a mobile robot with an articulated body // International Journal of Robotic Research. 1990. V. 9, No. 2. P. 99-115.

3. Hirose S. Biologically Inspired Robots: Snake-like Locomotors and Manipulators // Oxford: Oxford Univ. Press, 1993. 220 p.
4. Li N., Furuta K., Chernousko F. L. Motion Generation of the Capsubot Using Internal Force and Static Friction // Proc. 45th IEEE Conf. on Decision and Control, Manchester Grand Hyatt Hotel, San Diego, CA, USA, December 13-15, 2006. P. 6575-6580.
5. Burdick J. W., Radford J., Chirikjan G. S. A “sidewinding” locomotion gait for hyper-redundant robots // Proc. 1993 IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation. Atlanta, 1993. Vol. 3. P. 101–106.
6. Мальчиков А.В. Исследование движения плоского шестизвенного внутритрубного мобильного робота [Текст] / А.В. Мальчиков, С.Ф. Яцун, С.Б. Рублев // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – Самара. – 2012. - №4 (5). - С.1263-1265.
7. Мальчиков А.В. Динамические опорные элементы ползающих роботов для движения по наклонным поверхностям [Текст] / А.В. Мальчиков, С.Ф. Яцун, А.И. Жакин // Известия Юго-западного государственного университета. – Курск. – 2012. - №2(41).Ч.1- С.89-95.
8. Черноусько Ф.Л., Шундерюк М.М. Влияние сил трения на динамику двузвенного мобильного робота // ПММ. - 2010. - Т. 74, Вып. 1. - С. 22-36.
9. Болотник Н.Н., Фигурина Т.Ю., Черноусько Ф.Л. Оптимальное управление прямолинейным движением системы двух тел в сопротивляющейся среде // ПММ. - 2012. - Т. 76, Вып. 1. - С. 3-22.

### References

1. Lavrent'ev M. A., Lavrent'ev M. M. Ob odnom principe sozdanija tjavogoj sily dvizhenija // Zhurnal prikladnoj mehaniki i tehnichejskoj fiziki. 1962. № 4. S.3-9.
2. Hirose S., Monshima /1. Design and control of a mobile robot with an articulated body // International Journal of Robotic Research. 1990. V. 9, No. 2. P. 99-115.
3. Hirose S. Biologically Inspired Robots: Snake-like Locomotors and Manipulators // Oxford: Oxford Univ. Press, 1993. 220 p.
4. Li N., Furuta K., Chernousko F. L. Motion Generation of the Capsubot Using Internal Force and Static Friction // Proc. 45th IEEE Conf. on Decision and Control, Manchester Grand Hyatt Hotel, San Diego, CA, USA, December 13-15, 2006. P. 6575-6580.
5. Burdick J. W., Radford J., Chirikjan G. S. A “sidewinding” locomotion gait for hyper-redundant robots // Proc. 1993 IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation. Atlanta, 1993. Vol. 3. P. 101–106.
6. Mal'chikov A.V. Issledovanie dvizhenija ploskogo shestizvennogo vnutritrubnogo mobil'nogo robota [Tekst] / A.V. Mal'chikov, S.F. Jacun, S.B. Rublev // Izvestija Samarskogo nauchnogo centra Rossijskoj akademii nauk. – Samara. – 2012. - №4 (5). - S.1263-1265.
7. Mal'chikov A.V. Dinamicheskie opornye jelementy polzajushhih robotov dlja dvizhenija po naklonnym poverhnostjam [Tekst] / A.V. Mal'chikov, S.F. Jacun, A.I. Zhakin // Izvestija Jugo-zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. – Kursk. – 2012. - №2(41).Ch.1- S.89-95.
8. Chernous'ko F.L., Shunderjuk M.M. Vlijanie sil trenija na dinamiku dvuzvennogo mobil'nogo robota // PMM. - 2010. - Т. 74, Vyp. 1. - S. 22-36.
9. Bolotnik N.N., Figurina T.Ju., Chernous'ko F.L. Optimal'noe upravlenie prjamolinejnym dvizheniem sistemy dvuh tel v soprotivljajushhejsja srede // PMM. - 2012. - Т. 76, Vyp. 1. - S. 3-22.