

УДК 622

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИНХРОННЫХ МАШИН
С НЕСКОЛЬКИМИ ОБМОТКАМИ НА
СТАТОРЕ**

Стрижков Игорь Григорьевич
д.т.н., профессор
*Кубанский государственный аграрный универси-
тет, Краснодар, Россия*

В статье сделана попытка обобщения теории математического описания синхронных машин с произвольным числом трехфазных обмоток и произвольным расположением этих обмоток в пространстве машины. Рассмотрены особенности применения метода преобразования координат при математическом описании такой машины

Ключевые слова: ТЕОРИЯ СИНХРОННЫХ
МАШИН, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ, МЕТОД
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

UDC 622

**FUNDAMENTALS OF THE THEORY OF
SYNCHRONOUS MACHINES WITH
MULTIPLE WINDINGS OF THE STATOR**

Strizhkov Igor Grigorievich
Dr.Sci.Tech., professor
Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

The article is an attempt to generalize the theory of the mathematical description of synchronous machines with multiple three-phase windings on the stator and arbitrary location in space of the machine. The features of the transformations of coordinates in the mathematical description of the machine are shown

Keywords: THEORY OF SYNCHRONOUS
MACHINES, MATHEMATICAL MODELING, TWO
REACTION THEORY

Общие положения теории синхронных машин

К вопросам теоретического исследования и математического анализа синхронных машин (СМ) различных конструкций в последние десятилетия были привлечены значительные научные силы. Современная теория СМ располагает самыми передовыми достижениями математики, физики и электромеханики. Значительный вклад в теорию СМ внесли российские ученые. Еще в 30-40 годы прошлого века широко известные работы Горева А.А. [1], Постникова И.М., Костенко М.П. и др. создали отечественную школу электромеханики, сохраняющую высокий авторитет в мире и сегодня.

Общая теория СМ базируется на огромном исследовательском материале и представляет обширную область электромеханики. Вместе с тем, сохраняется значительное число проблемных вопросов, требующих решения или уточнения. К числу таких вопросов относится создание теории СМ с несколькими m -фазными обмотками на статоре.

Современной электромеханике известен целый ряд синхронных машин, имеющих несколько трехфазных обмоток, действующих в едином

магнитном поле и обладающих взаимоиндукцией. При теоретическом исследовании таких машин используются частные подходы, базирующиеся на графо-аналитических методах или неполных математических описаниях машины.

В круг вопросов, отнесенных к общим вопросам построения математического описания синхронной машины с несколькими электрически и магнитно связанными обмотками, входят описание потокоцеплений машины, уравнения равновесия напряжений в электрических цепях статорных обмоток, уравнения электромагнитной мощности и момента, активной и реактивной мощности, уравнение движения машины. Вопрос о целесообразности обобщения теории СМ с несколькими обмотками на статоре поставлен в научной литературе [2] и определенная работа проделана и по реализации этой проблемы [2, 3, 4]. Однако завершённой формы теория СМ с несколькими обмотками на статоре до настоящего времени не получила. В настоящей работе сделана попытка такого обобщения.

Объект математического описания и принятые допущения

Как объект математического описания рассматривается явнополюсная синхронная машина, на статоре которой расположено N трехфазных симметричных обмоток с одинаковым числом пар полюсов, магнитные оси которых в одноименных фазах смещены на произвольные углы, а ротор имеет традиционную конструкцию с обмоткой возбуждения, расположенной по продольной оси, и демпферную обмотку, замещающую в математической модели двумя эквивалентными контурами, расположенными по продольной d и поперечной q осям ротора.

Рассматривается трехфазная машина, хотя выводы и математические подходы рассматриваемой теории распространяются на машины с произвольным числом фаз. При этом конфигурация секций, составляющих многофазную обмотку, должна быть одинаковой.

Ротор вращается в общем случае с произвольной угловой частотой Ω ; положение его относительно статора характеризуется углом γ между магнитной осью фазы a_1 и продольной осью ротора d .

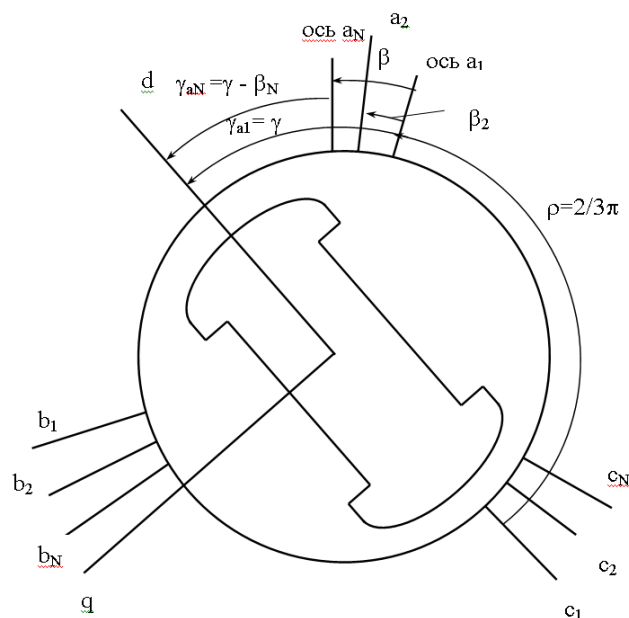


Рисунок 1 – Расположение осей обмоток многообмоточной синхронной машины

Как и классической синхронной машине, рассматриваемой машине присущи идеализирующие допущения: отсутствие насыщения магнитной цепи; синусоидальное распределение магнитного поля и МДС вдоль воздушного зазора; симметрия трехфазных обмоток статора; симметрия магнитопровода относительно осей d и q ; отсутствие гистерезиса, потерь в стали и вытеснения тока в проводниках; независимость сопротивлений рассеяния от пространственного положения ротора; постоянство активных сопротивлений обмоток; токи во всех обмотках переменного тока (якорных и демпферных) принимаются синусоидальными.

При необходимости учета возможных отклонений от идеализации могут применяться частные методы рассмотрения задачи. В работе рассматриваются, в частности, вопросы учета насыщения магнитной цепи машины.

Кроме того, в отношении параметров источника питания (электрической сети) также принимаются идеализирующие допущения: мощность источника питания принимается бесконечной; учет сопротивления питающей сети в задачах привода выделен в самостоятельную задачу исследования; напряжение трехфазных источников синусоидально и симметрично.

В настоящей статье рассматриваются особенности определения индуктивных сопротивлений само- и взаимоиндукции при нескольких статорных обмотках машины, особенности преобразования системы координат для представления математической модели машины в координатах обобщенного вектора и выбор рациональной системы относительных единиц.

Потокоцепления обмоток в фазной системе координат

В теории машин переменного тока широко применяется представление переменных параметров (токов, напряжений, ЭДС и др.) в виде так называемых изображающих векторов. В таких случаях мгновенные значения синусоидальных величин определяют как проекции изображающего вектора на расположенные в одной плоскости координатные оси, число которых равно числу фаз.

В теоретической электромеханике, как правило, применяют симметричные многофазные координатные системы, когда фазные координаты представляют собой симметричную многолучевую звезду. Для трехфазных машин фазные координатные оси обозначают буквами a , b , c . Подробно свойства изображающих векторов анализируются в [1, 2, 5]. Здесь рассматриваются свойства этих векторов применительно к случаю расположения на статоре нескольких трехфазных обмоток с несовпадающими магнитными осями.

Для симметричной трехфазной системы скалярных величин (например, трехфазного тока) изображающий вектор представляет собой

вектор, длина которого постоянна и равна амплитуде фазного тока. Вектор вращается с постоянной угловой скоростью в направлении чередования фаз. Угловая частота вращения при этом равна угловой частоте тока. Проекции изображающего вектора на симметричные оси координат при произвольном положении его в пространстве дают мгновенные значения токов в соответствующий момент времени. Ясно, что конец изображающего вектора, откладываемого из начала координат, описывает окружность. Очевидно также, что сумма мгновенных значений токов в любой момент времени равна нулю, т.е. выполняется обязательное условие построения симметричной координатной системы:

$$i_a + i_b + i_c = 0 \quad (1)$$

Строго говоря, условие (1) диктуется только необходимостью построения симметричных координатных осей. При токах i_a , i_b , i_c , имеющих равную амплитуду, но временной сдвиг, отличающийся от $2\pi/3$, их также можно представить в виде проекций на временные оси изображающего вектора, имеющего постоянную длину и вращающегося с постоянной угловой скоростью. При этом угол поворота осей должен быть равен сдвигу начальных фаз токов. Однако в рассматриваемой задаче принято условие симметрии токов и рассматривается случай симметричного расположения фазных осей.

Ряд авторов для придания наглядности процедуре представления скалярных величин в виде изображающего вектора [1, 5] совмещают фазные координатные оси с магнитными осями фазных обмоток. Такое совмещение не имеет физического смысла, поскольку для скалярных параметров машины как ток, напряжение, потокосцепление и др., оси координат имеют характер временных и к конструкции машины никакого отношения не имеют. При расположении на статоре нескольких трехфазных обмоток, их параметры могут определяться как проекции

соответствующих изображающих векторов на общие оси a , b , c независимо от углового смещения обмоток в пространстве машины.

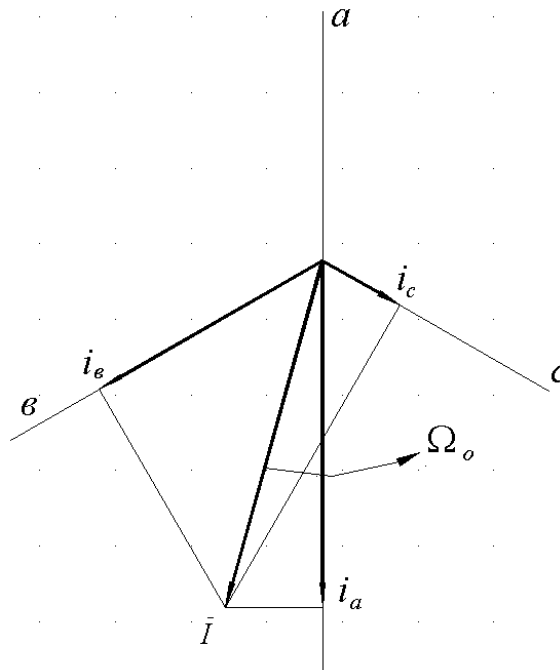


Рисунок 2 – Изображающий вектор тока трехфазной обмотки

Отметим, что если требуется определить результирующий вектор изображающего тока, равного сумме токов двух параллельно включенных обмоток, то он определяется как геометрическая сумма изображающих векторов каждой из обмоток только в случае совпадения фазных координатных осей. При несовпадении фазных осей двух обмоток такому суммированию должна предшествовать процедура преобразования координат. Другими словами, приём, применяемый для машины традиционной конструкции (с одной трехфазной обмоткой на статоре), неприемлем для описания машины с несколькими обмотками на статоре, где требуется использование единой координатной системы для всех статорных обмоток для упрощения математического описания.

Иначе обстоит дело с изображением векторных величин МДС нескольких фазных обмоток, для которых положение изображающего вектора на координатной плоскости имеет не абстрактный, а вполне конкретный физический смысл. Если координатные оси совместить с магнитными осями трехфазной обмотки (поскольку они образуют аналогичную трехлучевую звезду), то изображающий вектор МДС будет отражать не только величину, но и мгновенное положение в пространстве моделируемой машины результирующей МДС указанной трехфазной обмотки. Это свойство изображающего вектора МДС позволяет эффективно использовать его в задачах расчета магнитных полей машины с несколькими обмотками на статоре, где оси фазной системы координат целесообразно совмещать с магнитными осями рассматриваемой трехфазной обмотки и, таким образом, использовать несколько трехфазных систем координат для нескольких трехфазных обмоток.

Рассмотрим подобный случай на конкретном примере. Пусть на статоре СМ расположены две трехфазные обмотки, смещенные относительно друг друга на центральный угол β (рис. 3). Обозначим их условно номерами 1 и 2. Начальные фазы токов в фазных обмотках a_1 и a_2 соответственно φ_1 и φ_2 . Токи каждой из обмоток симметричны.

Расположим оси a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 совпадающими с осями соответствующих фазных обмоток. Векторы F_1 и F_2 результирующих МДС соответствующих обмоток займут положение под углом γ_1 и γ_2 осям a_1 и a_2 . Причем

$$\gamma_h(h = 1, 2) = \varphi_h - \pi/2 .$$

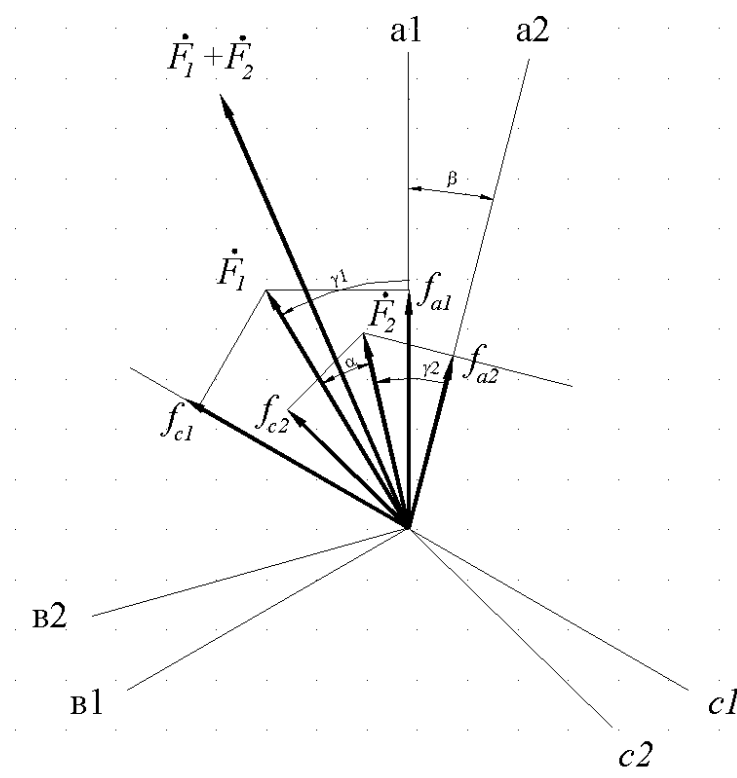


Рисунок 3 – Построение изображающих векторов МДС двух трехфазных обмоток с несовпадающими магнитными осями

Пространственное смещение изображающих векторов

$$\alpha = \gamma_1 - (\gamma_2 - \beta) = \Omega_0 t + \varphi_1 - \Omega_0 t - \varphi_2 + \beta = \varphi_1 - \varphi_2 + \beta. \quad (2)$$

Уравнение (2) устанавливает связь между угловым смещением изображающих векторов МДС обмоток, смещением начальных фаз токов и угловым смещением обмоток. В рассматриваемом случае результирующая МДС обеих обмоток определяется геометрическим суммированием изображающих векторов F_1 и F_2 .

Из уравнения (2) следует, что максимальная результирующая МДС двух обмоток при фиксированных амплитудах токов имеет место при совпадении векторов F_1 и F_2 по направлению, что имеет место при смещении начальных фаз токов на угол $-\beta$. Если эти обмотки включены параллельно, то общий или суммарный ток будет меньше алгебраической суммы токов. И наоборот, совпадающие по начальной фазе токи обмоток 1

и 2 создадут результирующую МДС меньшую, чем алгебраическая сумма МДС обмоток.

Однако, при углах α не превосходящих +15 град. эл., расхождение между алгебраической и геометрической суммами МДС невелико. Так, при равенстве модулей F_1 и F_2 и $\alpha = 15$ град. эл., алгебраическая сумма превосходит геометрическую на 1,7 %.

Таким образом, изображающие векторы скалярных параметров следует представлять, когда это возможно, в единой трехфазной системе координат, в то время как векторы МДС многофазных обмоток

- в собственных координатах, оси которых совмещены с осями соответствующих фазных обмоток.

Чтобы выявить аналитическое выражение для суммарной МДС нескольких многофазных обмоток с учетом неодинаковости начальных фаз токов и смещения обмоток в пространстве машины, воспользуемся формой представления МДС фазной обмотки при произвольных начальных фазах токов и угловых положениях обмоток, предложенных [5]

$$F(\beta, t) = F'_{\phi 1m} \cos(\omega t - \varphi_n - \beta + \beta_n) + F''_{\phi 1m} \cos(-\omega t + \varphi_n - \beta + \beta_n),$$

где $F'_{\phi 1m}$, $F''_{\phi 1m}$ - амплитуда соответственно прямой и обратной волны 1-й гармоники фазной МДС;

φ_n - начальная фаза тока обмотки;

β_n - угол между действительной осью координат комплексной плоскости и осью рассматриваемой обмотки (рис. 4.);

β - угловая координата рассматриваемой точки.

В комплексной форме функция МДС обмотки имеет вид:

$$\underline{F}(\beta, t) = \underline{F}'_{\phi 1m} + \underline{F}''_{\phi 1m},$$

где $\underline{F}'_{\phi 1m} = F'_{\phi 1m} \exp[j(\omega t - \varphi_n)] \exp(j\beta_n) = F'_{\phi 1m} \exp(j\omega t) \exp[j(\beta_n - \varphi_n)]$

изображает прямую вращающуюся волну МДС фазы, а комплексная функция

$$\underline{F}'_{\phi 1m} = F'_{\phi 1m} \exp(-j\omega t) \exp[j(\beta_n + \varphi_n)]$$

- обратную волну.

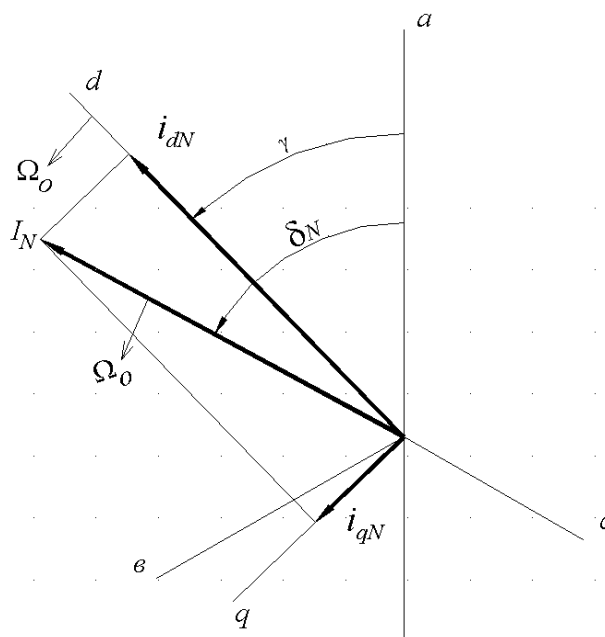


Рисунок 4 – Изображающий вектор тока и его проекции на оси d,q

Для представления результирующей МДС трехфазной обмотки, просуммируем МДС всех фазных обмоток

$$\begin{aligned} \underline{F}_{1m} = \underline{F}'_{1m} = \underline{F}'_{a1m} + \underline{F}'_{b1m} + \underline{F}'_{c1m} = F'_{\phi 1m} \exp[j(\omega t - \varphi_n)] \exp(j\beta_n) + \\ + F'_{\phi 1m} \exp[j(\omega t - \varphi_n - 2\pi/3)] \exp[j(\beta_n + 2\pi/3)] + F'_{\phi 1m} \exp[j(\omega t - \varphi_n - 2\pi/3)] \times \\ \times \exp[(\beta_n - 2\pi/3)] = 3 F'_{\phi 1m} = F'_{\phi 1m} \exp(j\omega t) \exp[(\beta_n - \varphi_n)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (3) является аналитическим выражением МДС одной трехфазной обмотки. Для определения суммарной МДС N статорных обмоток следует суммировать МДС этих обмоток в комплексной форме.

$$F_{рез} = \sum_1^N F_{1m} = \exp(j\omega t) \sum_1^N \{F_{1m} \exp[j(\beta_n - j_n)]\}. \quad (4)$$

Уравнение (4) показывает, что при изображении векторов МДС на векторной диаграмме ЭМДС с общей системой координат, вектор МДС обмотки должен опережать вектор тока этой же обмотки на угол β_n . В этом случае угловое смещение обмоток проявляет себя как эквивалентное смещение начальной фазы тока.

Зависимость потокосцеплений обмоток в естественных a, b, c координатах от углового положения ротора явнополюсной машины делают уравнения напряжений уравнениями с переменными коэффициентами. Решение таких уравнений сопряжено с более сложными вычислительными методами, чем для уравнений с постоянными коэффициентами. К тому же наглядность уравнений с переменными коэффициентами при качественном анализе процессов сильно страдает. Поэтому широко применяемой формой представления математического описания электрической машины переменного тока является представление в координатах обобщенного вектора, когда использованием преобразования координат удается избавиться эти уравнения от переменных коэффициентов.

Смысл преобразования координат и уравнений машины состоит в том, что переменные параметры исходных уравнений заменяют другими, линейно связанными с исходными; при этом преобразования выполняются таким образом, чтобы решение и анализ преобразованных уравнений было существенно проще и рациональнее, чем исходных. Полученные в результате решения переменные параметры машины затем вновь преобразуются к исходным (естественным) с помощью уравнений обратных преобразований, завершая этим решение задачи.

Преобразование координат может быть реализовано различным образом. Для теории СМ фундаментальное значение имеет преобразование переменных, эквивалентное замене координат осей a, b, c на

ортогональные, жестко связанные с ротором, т.е. вращающиеся с угловой частотой ротора. При этом одна из осей принимается совпадающей с продольной осью ротора (d), другая (q) располагается перпендикулярно, т.е. по поперечной оси ротора. В отечественной литературе ось q чаще принимают опережающей ось d , однако это требование не является обязательным.

Наличие на статоре нескольких трехфазных обмоток вносит свои особенности в преобразование переменных, которые и являются основным предметом исследования настоящей статьи. Эти особенности рассмотрим на примере преобразования токов, имея ввиду, что преобразования напряжений, потокосцеплений и ЭДС осуществляются аналогично.

Токи фаз обмотки W_n представим как проекции изображающего вектора I_n на оси a, b, c , предполагая, что условие (1) выполняется:

$$\begin{aligned} i_{an} &= I_n \cos \delta_n; \\ i_{bn} &= I_n \cos(\delta_n - \rho); \\ i_{cn} &= I_n \cos(\delta_n + \rho). \end{aligned} \quad (5)$$

Преобразование координат осуществляется использованием следующих уравнений:

$$[i_{d,q,o}]_n = [A_n] [i_{a,b,c}]_n; \quad (6)$$

где $[i_{d,q,o}]_n = \text{colon}(i_{dn}, i_{qn}, i_{on})$;

$[i_{a,b,c}]_n = \text{colon}(i_{an}, i_{bn}, i_{cn})$;

$[A_n]$ - матрица преобразования координат.

Выбор матрицы преобразований координат $[A_n]$ зависит от многих, часто противоречивых, факторов. В научной литературе достаточно подробно рассмотрен вопрос о целесообразной матрице преобразования при использовании различных систем относительных единиц [7]. Однако, этот вопрос рассмотрен только для классической машины с одной трехфазной обмоткой на статоре. При использовании иных систем

относительных единиц, предпочтительных для многообмоточной машины, требуются дополнительные исследования возможности оптимизации преобразований. Рекомендации по выбору матрицы $[A_n]$ для классической машины базируются на одновременном выполнении требований наглядности геометрической интерпретации математических преобразований, инвариантности преобразований и простоты получаемого результата преобразований. В литературе по электромеханике используются различные матрицы преобразования; общепринятый или, точнее, единообразный подход к проблеме еще не сформировался. И это многообразие можно объяснить многообразием решаемых задач, в каждой из которых удачный выбор коэффициентов линейного преобразования позволяет облегчить исследование или решение преобразованных уравнений.

Единственным обязательным требованием ко всякой матрице $[A_n]$ является неравенство ее нулю в любой момент времени t . Таким образом,

$$[A_n] \neq 0.$$

Наибольшее употребление в отечественной литературе по теории СМ [31] нашли преобразования, выполняемые с использованием матрицы

$$[A] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos g & \cos(g - r) & \cos(g + r) \\ -\sin g & -\sin(g - r) & -\sin(g + r) \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

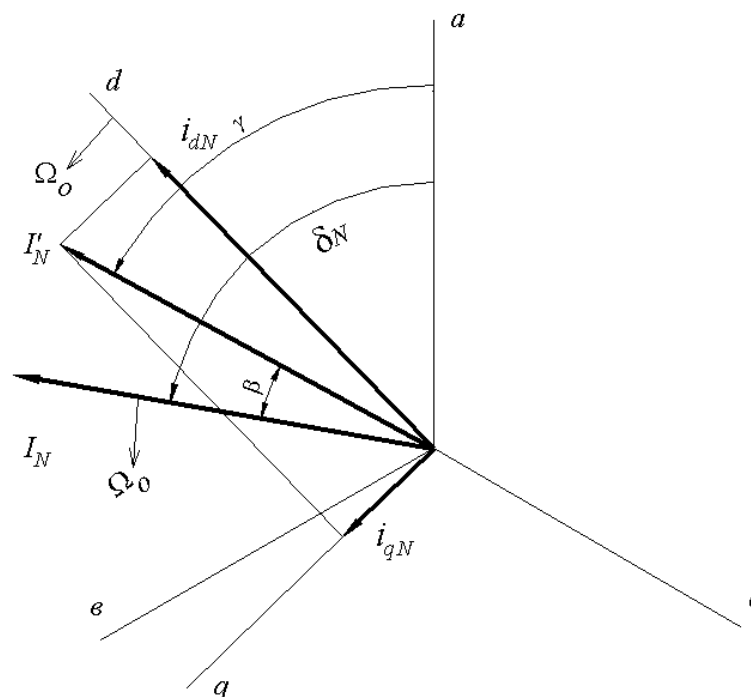


Рисунок 5 – Преобразование тока обмотки WN к осям d,q по матрице

Удобство такой формы преобразования заключается в том, что амплитуда фазного тока в синхронном режиме определяется простым уравнением

$$I = \sqrt{I_d^2 + I_q^2}.$$

Как уже отмечалось, аналогичные выражения можно записать для напряжений, ЭДС и потокосцеплений.

Подставив выражение (5) в уравнение (6) и положив $\gamma = \Omega_0 t - \gamma_0$, получим

$$\begin{aligned} i_d &= I \cos(g - d); \\ i_q &= -I \sin(g - d); \\ i_0 &= 0. \end{aligned}$$

Эти же соотношения получим из векторной диаграммы по рис. 4. Это означает, что амплитуда тока в относительных единицах при переходе от a, b, c координат к координатам $d, q, 0$ не изменяется.

Обратные преобразования осуществляются по формуле

$$[i_{a,b,c}]_n = [A_K] [i_{d,q,o}]_n,$$

где

$$[A_K] = \begin{bmatrix} \cos g & -\sin g & 1 \\ \cos(g-r) & -\sin(g-r) & 1 \\ \cos(g+r) & -\sin(g+r) & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Установленная аналогия аналитического преобразования переменных величин их геометрической интерпретации позволяет заключить, что

$$\underline{I}_{an} = \underline{I}_{dn} + \underline{I}_{qn},$$

где \underline{I}_{dn} , \underline{I}_{qn} – векторные величины, причем $|\underline{I}_{dn}| = i_{dn}$; $|\underline{I}_{qn}| = i_{qn}$.

В классической теории СМ широкое распространение получила идея представления переменных параметров в координатах d , q , o в комплексной форме [2]. Для этого ось d совмещают с вещественной (+1), и ось q с мнимой (+ j) осями. При этом вместо вещественных параметров с индексами d и q используются комплексные $h(h = i, u, e, \psi) = h_d + jh_q$, являющиеся изображающим вектором переменной величины h .

Преобразование напряжений по аналогии с токами осуществляется по уравнениям:

$$[u_{d,q,o}]_n = [A_1] [u_{a,b,c}]_n,$$

где $[u_{d,q,o}]_n = \text{colon}(u_{dn}, u_{qn}, u_{on})$;

$[u_{a,b,c}]_n = \text{colon}(u_{an}, u_{bn}, u_{cn})$.

Обратные преобразования

$$[u_{a,b,c}]_n = [A_K] [u_{d,q,o}]_n; \quad (9)$$

где
$$U_n = \sqrt{U_{dn}^2 + U_{qn}^2};$$

$$\underline{U}_n = \underline{U}_{dn} + \underline{U}_{qn}; \quad u_{dn} = |U_{dn}|; \quad u_{qn} = |U_{qn}|.$$

Применение преобразований с матрицей (7) вносит еще одну существенную особенность в уравнения математического описания СМ по типу уравнений Парка-Горева. В уравнениях потокосцеплений обнаруживается относительно малое заполнение матрицы индуктивных сопротивлений, что приводит к облегчению решения системы уравнений Парка-Горева аналитическими методами. Для СМ с одной трехфазной обмоткой уравнения потокосцепления имеют вид [2]

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_d \\ \underline{y}_q \\ \underline{y}_{yd} \\ \underline{y}_{yq} \\ \underline{y}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_d & 0 & x_{ayd} & 0 & x_{af} \\ 0 & x_q & 0 & x_{ayq} & 0 \\ x_{ayd} & 0 & x_{ayq} & 0 & x_{fyd} \\ 0 & x_{ayq} & 0 & x_{yq} & 0 \\ x_{afd} & 0 & x_{fyd} & 0 & x_f \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_{yd} \\ i_{yq} \\ i_f \end{bmatrix}.$$

Как будет показано ниже, применение матриц преобразования переменных параметров (7) и (8) в случае наличия на статоре нескольких обмоток, сдвинутых в пространстве на некоторый угол, отличный от нуля и не кратный π , приводит к появлению взаимной индукции разных обмоток не только в одноименных осях ортогональной системы координат, как в случае соосных обмоток, но и в разноименных осях, что ведет к более полному заполнению матрицы индуктивных сопротивлений. Это привносит определенное усложнение и новизну в теорию преобразования координат по типу Парка-Горева. Рассмотрим этот вопрос более детально.

Желание максимальным образом уменьшить заполнение матрицы индуктивных сопротивлений (индуктивностей), привело ряд авторов к выводу о целесообразности использования разных матриц преобразования

переменных параметров для разных статорных обмоток. Так, в [3] предлагается использовать матрицу вида

$$[A] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(g-b) & \cos(g-b-r) & \cos(g-b+r) \\ -\sin(g-b) & -\sin(g-b-r) & -\sin(g-b+r) \\ \sqrt{0,5} & \sqrt{0,5} & \sqrt{0,5} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где различие в коэффициентах $2/3$ и $(2/3)^{1/2}$; $1/2$ и $2^{-1/2}$ объясняется различным подходом к формированию базисных величин при переходе к относительным единицам.

Аналогичные преобразования реализованы в [4] применительно к СМ с обмотками, смещенными на фиксированный угол $\pi/6$. Матрица (10) учитывает пространственный угол смещения обмоток и является матрицей, максимально разрешающей матрицу индуктивных сопротивлений машины в координатах d , q . Кроме того, она не равна нулю, вследствие чего математически корректна.

С точки зрения геометрической интерпретации, преобразования по матрице (10) предусматривают поворот вектора тока обмотки W_N в сторону отставания на угол β с последующим проецированием его на оси d и q . Это можно трактовать как перемещение обмотки W_N до совпадения магнитных осей обеих статорных обмоток (частный случай двойной статорной обмотки впервые рассмотрен автором в статье [6]).

Существенным недостатком такого преобразования является нарушение естественного характера взаимного расположения изображающих векторов, что затрудняет математические операции с ними. Например, синфазные токи двух статорных обмоток на векторной диаграмме будут изображены векторами, расположенными под углом β друг по отношению к другу. Математические операции с такими векторами должны учитывать их специфичное взаимное расположение, иначе они будут некорректны. Так, суммирование токов должно сопровождаться предварительным

поворотом каждого вектора на угол β_N . В случае последовательного включения двух или нескольких обмоток статора, расчетный ток в обмотках будет иметь разные значения составляющих по осям d и q , т.е. в последовательных участках цепи будут протекать различные расчетные токи (естественно, что такое несоответствие имеет место только в промежуточных вычислениях в координатах обобщенного вектора; при переходе к естественным координатам a, b, c токи примут естественный характер распределения). Вследствие наличия такого недостатка, на наш взгляд весьма существенного, этот способ преобразования координат при решении ряда задач, как, например, задачи анализа статических режимов СМ, не может быть рекомендован как оптимальный. Однако, в задачах сопряженных с использованием численных методов, для которых характерно пренебрежение наглядностью промежуточных результатов вычисления, подобный недостаток вполне допустим, и метод может быть рекомендован для применения.

Ниже представлен анализ преобразований, выполненных как по единой для всех статорных обмоток матрице преобразований, так и с использованием индивидуальных матриц преобразования для каждой обмотки, имеющих вид

$$[A_n] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(g - b_n) & \cos(g - b_n - r) & \cos(g - b_n + r) \\ -\sin(g - b_n) & -\sin(g - b_n - r) & -\sin(g - b_n + r) \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Уравнения равновесия напряжения статорных обмоток в фазных координатах можно представить в следующем виде:

$$u_{jn} = r_n i_{jn} + d\Psi_{jn}/dt.$$

$$(j = a, b, c; n = 1, 2, \dots, N)$$

Уравнения равновесия напряжения в осях d , q , o после реализации преобразования по уравнению (9) с матрицей преобразования (7) или (11) (любой из этих матриц), дает уравнения:

$$u_{dn} = r_n i_{dn} + d\Psi_{dn}/dt - \Psi_{qn} d\gamma/dt;)$$

$$u_{qn} = r_n i_{qn} + d\Psi_{qn}/dt + \Psi_{dn} d\gamma/dt .$$

Потокосцепления в машине с несколькими обмотками на статоре

Анализ индуктивных связей обмоток базируется на известном методе представления постоянных и переменных параметров машины в естественных a , b , c и ортогональных вращающихся d , q координатных системах.

С методической точки зрения целесообразно сначала рассмотреть индуктивные связи обмоток с равным эффективным числом витков и затем расширить трактовку индуктивности на более общий случай обмоток с разным числом витков. Во всех случаях для упрощения записи рассматриваются обмотки, имеющие равные обмоточные коэффициенты.

а) Потокосцепления обмоток в a , b , c координатах

В наиболее общем виде потокосцепления как функции токов в обмотках в естественных координатах можно представить в матричной форме следующим уравнением

$$[\Psi] = [L] \times [i],$$

где $h(h=\Psi, i) = \text{colon}[(h_{a1}, h_{b1}, h_{c1}), (h_{a2}, h_{b2}, h_{c2}), \dots, (h_{aN}, h_{bN}, h_{cN}), (h_{yd}, h_{yq}, h_f)]$;
 $[L]$ - по матрице (12).

$$[L] = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} L_{a1} & L_{a1b1} & L_{a1c1} & \dots & L_{a1aN} & L_{a1bN} & L_{a1cN} & \dots & L_{a1an} & L_{a1bn} & L_{a1cn} & L_{a1yd} & L_{a1yq} & L_{a1f} \\ L_{b1a1} & L_{b1} & L_{b1c1} & \dots & L_{b1aN} & L_{b1bN} & L_{b1cN} & \dots & L_{b1an} & L_{b1bn} & L_{b1cn} & L_{b1yd} & L_{b1yq} & L_{b1f} \\ L_{c1a1} & L_{c1b1} & L_{c1} & \dots & L_{c1aN} & L_{c1bN} & L_{c1cN} & \dots & L_{c1an} & L_{c1bn} & L_{c1cn} & L_{c1yd} & L_{c1yq} & L_{c1f} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{aN a1} & L_{aN b1} & L_{aN c1} & \dots & L_{aN} & L_{aN bN} & L_{aN cN} & \dots & L_{aN an} & L_{aN bn} & L_{aN cn} & L_{aN yd} & L_{aN yq} & L_{aN f} \\ L_{bN a1} & L_{bN b1} & L_{bN c1} & \dots & L_{bN aN} & L_{bN} & L_{bN cN} & \dots & L_{bN an} & L_{bN bn} & L_{bN cn} & L_{bN yd} & L_{bN yq} & L_{bN f} \\ L_{cN a1} & L_{cN b1} & L_{cN c1} & \dots & L_{cN aN} & L_{cN bN} & L_{cN} & \dots & L_{cN an} & L_{cN bn} & L_{cN cn} & L_{cN yd} & L_{cN yq} & L_{cN f} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{ana1} & L_{anb1} & L_{anc1} & \dots & L_{anaN} & L_{anbN} & L_{ancN} & \dots & L_{an} & L_{anbn} & L_{ancn} & L_{anyd} & L_{anyq} & L_{anf} \\ L_{ba1} & L_{bnb1} & L_{bnc1} & \dots & L_{bnaN} & L_{bnbN} & L_{bncN} & \dots & L_{bnan} & L_{bn} & L_{bncn} & L_{bnyd} & L_{bnyq} & L_{bnf} \\ L_{cna1} & L_{cnb1} & L_{cnc1} & \dots & L_{cnaN} & L_{cnbN} & L_{cncN} & \dots & L_{cnan} & L_{cnbn} & L_{cncn} & L_{cnyd} & L_{cnyq} & L_{cnf} \\ L_{yda1} & L_{ydb1} & L_{ydc1} & \dots & L_{ydaN} & L_{ydbN} & L_{ydcN} & \dots & L_{ydan} & L_{ydbn} & L_{ydcn} & L_{y d} & 0 & L_{ydf} \\ L_{yqa1} & L_{yqb1} & L_{yqc1} & \dots & L_{yqaN} & L_{yqbN} & L_{yqcN} & \dots & L_{yqan} & L_{yqbn} & L_{yqcn} & 0 & L_{yq} & 0 \\ L_{fa1} & L_{fb1} & L_{fc1} & \dots & L_{faN} & L_{fbN} & L_{fcN} & \dots & L_{fan} & L_{fbn} & L_{fcn} & L_{fyd} & 0 & L_f \end{bmatrix} \quad (12)$$

Согласно принципу взаимности, взаимные индуктивности с взаимнообратными индексами равны между собой, т.е. $L_{a1b1} = L_{b1a1}$; $L_{b1c2} = L_{c2b1}$; ... $L_{cnyd} = L_{ydcn}$, и т.д., но $L_{b1c2} \neq L_{c1b2}$ и т.д.

За исключением собственных индуктивностей и взаимных индуктивностей роторных обмоток, конфигурация магнитной цепи для которых не зависит от углового положения ротора, все остальные элементы матрицы (12) являются периодическими функциями углового положения ротора.

Пространственное положение ротора определяется углом γ между продольной осью d и осью фазной обмотки $a1$ ($\gamma_{a1} = \gamma$).

б) Собственные индуктивности фазных обмоток статора

Известно [5], что эти индуктивности являются периодическими функциями угла γ_x с периодом π . Причем эта функция имеет вид:

$$L_x = l_0 + l_2 \cos \gamma_x. \quad (13)$$

Постоянная составляющая l_0 представляет собой сумму постоянной составляющей индуктивности l_e , соответствующей потоку в воздушном

зазоре, и рассеяния l_s , практически не зависящей от положения ротора. Относительно l_o можно сказать, что она определяется параметрами самой фазной обмотки, а также магнитной проводимостью воздушного зазора.

Для обмоток, расположение осей которых приведено на рис. 1, угол γ_x принимает следующие значения:

$$\begin{aligned} \gamma_{a1} &= \gamma; & \gamma_{b1} &= \gamma + 2\rho = \gamma - \rho; & \gamma_{c1} &= \gamma + \rho; \\ \gamma_{an} &= \gamma - \beta_n; & \gamma_{bn} &= \gamma - \beta_n - \rho; & \gamma_{cn} &= \gamma - \beta_n + \rho. \end{aligned} \quad (14)$$

Поскольку рассматриваемые обмотки имеют одинаковое число витков, уравнения (13) и (14) можно записать в ином виде:

$$\begin{aligned} L_{an} &= l_{on} + l_{2n} \cos 2(\gamma - \beta_n); \\ L_{bn} &= l_{on} + l_{2n} \cos 2(\gamma - \beta_n - \rho); \\ L_{cn} &= l_{on} + l_{2n} \cos 2(\gamma - \beta_n + \rho); \\ n &= 1, 2, \dots, N; \beta_1 = 0. \end{aligned}$$

В тех случаях, когда необходимо учитывать неодинаковость индуктивностей по потокам рассеяния, для определения коэффициентов самоиндукции необходимо использовать следующие уравнения:

$$\begin{aligned} L_{an} &= l_{oen} + l_{sn} + l_{2n} \cos 2(\gamma - \beta_n); \\ L_{bn} &= l_{oen} + l_{sn} + l_{2n} \cos 2(\gamma - \beta_n - \rho); \\ L_{cn} &= l_{oen} + l_{sn} + l_{2n} \cos 2(\gamma - \beta_n + \rho). \end{aligned} \quad (15)$$

Поскольку собственные индуктивности всякой обмотки зависят от квадрата числа витков и магнитной проводимости цепи магнитопровода, которую можно принять постоянной для всех обмоток, соотношение между параметрами разных фазных обмоток устанавливаются уравнениями:

$$\begin{aligned} l_{on} &= l_{o1} (W_n k_{o\delta n})^2 / (W_1 k_{o\delta 1})^2; \\ l_{2n} &= l_{21} (W_n k_{o\delta n})^2 / (W_1 k_{o\delta 1})^2; \end{aligned}$$

$$l_{sn} = l_{s1} W_n^2 / W_1^2.$$

Для обмоток с равными числами витков и обмоточными коэффициентами составляющие коэффициента самоиндукции разных обмоток отличаются только аргументом косинуса.

Уравнения (15) удобно представить в общем виде:

$$L_h(h = a_n, b_n, c_n) = [l_{o1} + l_{21} \cos 2(\gamma_h - \beta_n)] (W_n / W_1)^2,$$

где W_n - эффективное число витков обмотки n ($W_n = W_n k_{обн}$).

В более краткой форме

$$l_n = l_1 (W_n / W_1)^2.$$

В теории СМ принято выражать постоянную и переменную составляющие индуктивности через ее экстремальные значения или, иначе говоря, через индуктивности по продольной оси l_d и поперечной l_q . Поскольку среднее значение синусоидальной величины равно среднему арифметическому его максимального и минимального значений

$$l_{on} = (l_{dn} + l_{qn}) / 2.$$

Амплитуда выражается другой известной формулой

$$l_{2n} = (l_{dn} - l_{qn}) / 2.$$

Понятно, что для СМ неявнополюсной конструкции $l_{dN} = l_{qN}$ и переменная составляющая взаимной индуктивности обращается в нуль.

в) Взаимные индуктивности фазных обмоток

Для определения коэффициентов взаимоиндукции используем то обстоятельство, что МДС вдоль воздушного зазора распределена синусоидально. При произвольном угловом положении ротора потокосцепление фазы $a1$ от собственного тока i_{a1} , можно представить в

виде составляющих по продольной и поперечной осям. Для этого МДС обмотки, создающую синусоидальную пространственную волну, амплитуда которой совпадает с осью обмотки $a1$, разложим на две волны, действующие по осям d и q . Амплитуды этих составляющих равны:

$$F_{ad} = F_a \cos\gamma; \quad F_{aq} = -F_a \sin\gamma.$$

Аналогично могут быть разложены ток и потокосцепление обмотки $a1$, т.е.

$$\Psi_{d1} = i_{a1} l_{d1} \cos\gamma; \quad \Psi_{q1} = -i_{a1} l_{q1} \sin\gamma. \quad (16)$$

Потокосцепление этих волн с любой обмоткой статора зависит от угла между осью этой обмотки и осью d . Например, для обмотки $b1$, составляющей с осью d угол $(\gamma - \rho)$, потокосцепление Ψ_{a1b1} запишется в виде

$$\Psi_{a1b1} = \Psi_{b1a1} = \Psi_{d1} \cos(\gamma - 2\pi/3) - \Psi_{q1} \sin(\gamma - 2\pi/3),$$

что после известных преобразований, подробно представленных в [1], дает уравнение взаимной индуктивности

$$\begin{aligned} L_{a1b1} = L_{b1a1} &= -(l_{d1} + l_{q1})/4 - (l_{d1} - l_{q1})/2 \cos(2\gamma + \pi/3); \\ L_{b1c1} = L_{c1b1} &= -(l_{d1} + l_{q1})/4 - (l_{d1} - l_{q1})/2 \cos(2\gamma - \pi); \\ L_{a1c1} = L_{c1a1} &= -(l_{d1} + l_{q1})/4 - (l_{d1} - l_{q1})/2 \cos(2\gamma + 5\pi/3). \end{aligned}$$

Эти уравнения показывают, что постоянная составляющая коэффициента взаимной индукции разных фаз одной обмотки в 2 раза меньше соответствующего сопротивления собственной индуктивности. Это происходит вследствие характерного расположения фазных обмоток под фиксированным углом ρ друг по отношению к другу.

Взаимные индуктивности фазных обмоток W_N имеет те же особенности, что и обмотки W_1 , но, вследствие смещения этих обмоток

относительно оси начала отсчета угла γ , изменяется аргумент косинуса.

При этом имеем:

$$L_{anbn} = L_{bnan} = -l_{on}/2 + l_{2n} \cos 2(\gamma - \beta_n + \rho);$$

$$L_{bncn} = L_{cnbn} = -l_{on}/2 + l_{2n} \cos 2(\gamma - \beta_n);$$

$$L_{ancn} = L_{cnan} = -l_{on}/2 + l_{2n} \cos 2(\gamma - \beta_n - \rho).$$

Взаимная индуктивность катушек пропорциональна произведению их эффективного числа витков, что дает основание выразить ее в виде функции соответствующих параметров обмотки W_1 .

Для взаимных индуктивностей фаз обмотки W_N имеем:

$$L_{anbn} = L_{bnan} = [-l_{o1}/2 - l_{21} \cos 2(\gamma - \beta_n + \rho)] (W_n/W_1)^2;$$

$$L_{bncn} = L_{cnbn} = [-l_{o1}/2 - l_{21} \cos 2(\gamma - \beta_n)] (W_n/W_1)^2;$$

$$L_{ancn} = L_{cnan} = [-l_{o1}/2 - l_{21} \cos 2(\gamma - \beta_n + \rho)] (W_n/W_1)^2.$$

Взаимная индуктивность между фазными обмотками $a1$ и an характеризуется потокосцеплением с обмоткой aN при протекании тока в обмотке $a1$. Потокосцепления составляющих Ψ_d и Ψ_q с фазной обмоткой aN , магнитная ось которой сдвинута на угол $(\gamma - \beta_n)$ от оси d , для обмоток с одинаковыми числами витков равны:

$$\Psi_{a1an} = \Psi_d \cos(\gamma - \beta_n) - \Psi_q \sin(\gamma - \beta_n),$$

что с учетом уравнения (16) дает

$$\Psi_{a1an} = i_{a1} [l_{d1} \cos \gamma \cos(\gamma - \beta_n) + l_{q1} \sin \gamma \sin(\gamma - \beta_n)].$$

После тригонометрических преобразований получим:

$$L_{a1an} = 0,5[(l_{d1} + l_{q1}) \cos \beta_n + (l_{d1} - l_{q1}) \cos(2\gamma - \beta_n)].$$

Индуктивная связь обмоток изменяется с изменением угла β_N ; в то же время для $\beta_N = 0$ имеем $L_{a1aN} = L_{a1}$.

Вследствие симметричного расположения пар фазных обмоток $a1-aN$, $b1-bN$, $c1-cN$, взаимные индуктивности последних двух пар обмоток имеют вид:

$$L_{b1bn} = 0,5[(l_{d1} + l_{q1}) \cos\beta_n + (l_{d1} - l_{q1}) \cos(2\gamma - \beta_n - \rho)];$$

$$L_{c1cn} = 0,5[(l_{d1} + l_{q1}) \cos\beta_n + (l_{d1} - l_{q1}) \cos(2\gamma - \beta_n + \rho)],$$

или в более краткой форме записи:

$$L_{a1an} = L_{ana1} = l_{o1} \cos\beta_n + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_n);$$

$$L_{b1bn} = L_{bnb1} = l_{o1} \cos\beta_n + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_n - \rho); \quad (17)$$

$$L_{c1cn} = L_{cnc1} = l_{o1} \cos\beta_n + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_n + \rho).$$

При необходимости учета взаимной индуктивности по потоку рассеяния соответствующую величину x_{s1n} следует суммировать с членами правой части уравнений (17).

Имея ввиду, что коэффициенты взаимной индуктивности по полю в воздушном зазоре пропорциональны произведению чисел витков обмоток и распространяя результаты по уравнениям (17) на индуктивности произвольных обмоток n и m , получим:

$$L_{anam} = [l_{o1} \cos(\beta_n - \beta_m) + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_n + \beta_m)] W_n W_m / W_1^2;$$

$$L_{bnbm} = [l_{o1} \cos(\beta_n - \beta_m) + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_n + \beta_m - \rho)] W_n W_m / W_1^2;$$

$$L_{cncm} = [l_{o1} \cos(\beta_n - \beta_m) + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_n + \beta_m + \rho)] W_n W_m / W_1^2.$$

г) Взаимная индуктивность разноименных фазных обмоток

Взаимная индуктивность фаз $a1$ и bn определяется их взаимным смещением на угол $(\beta_n + \rho)$. Для обмоток с одинаковым числом витков можно записать

$$\Psi_{a1bn} = i_{a1}[l_{d1} \cos\gamma \cos(\gamma - \beta_n - \rho) + l_{q1} \sin\gamma \sin(\gamma - \beta_n - \rho)],$$

что после преобразований дает:

$$L_{a1bn} = 0,25(l_{d1} + l_{q1})(\sqrt{3} \sin\beta_n - \cos\beta_n) + 0,5(l_{d1} - l_{q1}) \cos(2\gamma - \beta_n - \rho) \quad (18)$$

или $L_{a1bn} = 0,5l_{o1} \cos(\beta_n + \rho) + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_n - \rho)$.

Поскольку пары фазных обмоток $b1-cN$ и $c1-aN$ расположены симметрично относительно пары $a1-bn$, их можно записать в виде:

$$\begin{aligned} L_{b1cn} &= L_{cnb1} = l_{o1n} + 0,5(l_{d1} - l_{q1})\cos(2\gamma - \beta_n); \\ L_{c1an} &= L_{anc1} = l_{o1n} + 0,5(l_{d1} - l_{q1})\cos(2\gamma - \beta_n + \rho), \end{aligned} \quad (19)$$

где $l_{o1n} = l_{o1} \cos(\beta_n + \rho) = -0,25(l_{d1} + l_{q1})(\sqrt{3} \sin\beta_n + \cos\beta_n)$.

Уравнения (19) показывают, в частности, что при $b_n = 0$ сопротивления взаимной индукции совпадают с соответствующими значениями сопротивлений обмотки $W1$.

Взаимная индуктивность обмоток $a1$ и cn определяется их взаимным расположением под углом $2\rho + \beta_n$, следовательно для потокосцепления Ψ_{a1cn} можно записать

$$\Psi_{a1cn} = i_{a1} [l_{d1} \cos\gamma \cos(\gamma - \beta_n + \rho) + l_{q1} \sin\gamma \sin(\gamma - \beta_n + \rho)],$$

что после преобразований дает:

$$\begin{aligned} L_{a1cn} &= 0,25(l_{d1} + l_{q1})(\sqrt{3} \sin\beta_n - \cos\beta_n) + 0,5(l_{d1} + l_{q1}) \cos(2\gamma - \beta_n + \rho) = \\ &= l_{o1} \cos(\beta_n - \rho) + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_n + \rho). \end{aligned}$$

Сопротивления взаимной индукции фазных обмоток $b1$ и an наиболее просто может быть определено на основании следующих рассуждений. Из рис. 1 видно, что результирующие оси пар обмоток $a1-bn$ и $b1-an$ совпадают, следовательно, совпадают и аргументы косинуса вторых слагаемых по уравнениям (18). Аналогичным образом они совпадают для пар $b1-cn$ и $c1-bn$, $a1-cn$ и $c1-an$. Однако углы смещения катушек в каждой паре отличаются. Если в рассмотренном выше случае угол между фазами $a1$ и bn составляет $(\beta_n + \rho)$ и совпадает с аргументом косинуса в последнем

из уравнений (19), то угол между осями фазных обмоток a_n и b_1 составляет $(\rho - \beta_n)$, вследствие чего постоянная составляющая l_{on1} принимает вид:

$$l_{o1n} = l_{o1} \cos(\beta_n - \rho) = 0,25(l_{d1} + l_{q1})(\sqrt{3} \sin\beta_n - \cos\beta_n)$$

Таким образом, можно записать

$$L_{anb1} = L_{b1an} = l_{on1} + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_n - \rho);$$

$$L_{bnc1} = L_{c1bn} = l_{on1} + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_n);$$

$$L_{cnb1} = L_{b1cn} = l_{on1} + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_n + \rho).$$

Сопротивления взаимоиндукции между двумя произвольными обмотками W_n и W_m определим с использованием их аналогии с обмотками W_1 и W_n .

Если результирующая ось обмоток a_1 и a_n смещена на угол $\beta_n/2$ по отношению к оси a_1 , то ось пары a_n и a_n смещена на угол $(\beta_n - \beta_m)/2$, а угол смещения самих обмоток равен $(\beta_n - \beta_m)$. В соответствии с этим

$$\begin{aligned} L_{anam} &= l_{o1} \cos(\beta_n - \beta_m) + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_n + \beta_m); \\ L_{bnbm} &= l_{o1} \cos(\beta_n - \beta_m) + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_n + \beta_m - \rho); \\ L_{cncm} &= l_{o1} \cos(\beta_n - \beta_m) + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_n + \beta_m + \rho); \\ L_{bnam} &= l_{o1} \cos(\beta_n - \beta_m + \rho) + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_n + \beta_m - \rho); \\ L_{cnbm} &= l_{o1} \cos(\beta_n - \beta_m + \rho) + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_n + \beta_m); \\ L_{ancm} &= l_{o1} \cos(\beta_n - \beta_m + \rho) + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_n + \beta_m + \rho). \end{aligned} \tag{20}$$

Распространяя полученные результаты на случай обмоток с неодинаковым числом витков, получим

$$\begin{aligned} L_{bnam} &= [l_{o1} \cos(\beta_n - \beta_m + \rho) + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_n + \beta_m - \rho)] W_n W_m / W_1^2; \\ L_{cnbm} &= [l_{o1} \cos(\beta_n - \beta_m + \rho) + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_n + \beta_m)] W_n W_m / W_1^2; \\ L_{ancm} &= [l_{o1} \cos(\beta_n - \beta_m + \rho) + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_n + \beta_m + \rho)] W_n W_m / W_1^2. \end{aligned} \tag{21}$$

В наиболее общем виде взаимные индуктивности двух любых фазных обмоток можно записать

$$L_{inj\,m}(i = a, b, c; j = a, b, c) = [l_{01}\cos\beta_{inj\,m} + l_{21}\cos(2\gamma + \beta_{inj\,m})] W_n W_m / W_1^2. \quad (22)$$

При необходимости учета взаимной индуктивности по потокам рассеяния, она должна быть добавлена в правую часть уравнений (20), (21) и (22) как величина l_{sm} , не зависящая от положения ротора.

д) Взаимные индуктивности обмоток статора и ротора

Известно [5], что частота изменения переменной составляющей взаимной индуктивности неподвижных обмоток, расположенных на статоре, и вращающихся вместе с ротором обмоток возбуждения и демпферной в два раза меньше частоты переменной составляющей взаимных индуктивностей статорных обмоток. Это объясняется тем, что для взаимных индуктивностей статорных обмоток не имеет значения полярность магнитного полюса ротора, в то время как для взаимной индуктивности обмоток, расположенных соответственно на статоре и роторе, максимум наступает при совпадении магнитных осей обмоток. Кроме того, взаимным индуктивностям обмоток статора и ротора свойственно отсутствие постоянной составляющей взаимной индуктивности.

Предполагая, как и прежде, что учитываются лишь основные гармонические пространственного распределения магнитного потока, можно представить взаимные индуктивности в общем виде уравнением

$$L = L_1 \cos\sigma,$$

где L_1 - взаимная индуктивность обмоток при совпадении их магнитных осей;

σ – угол, линейно связанный с углом γ , при котором совпадают оси обмоток.

Для взаимной индуктивности фазных обмоток обмотки W_n с обмоткой возбуждения уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} L_{anf} &= l_{alf} \cos(\gamma - \beta_n); \\ L_{bnf} &= l_{alf} \cos(\gamma - \beta_n - \rho); \\ L_{cnf} &= l_{alf} \cos(\gamma - \beta_n + \rho). \end{aligned} \quad (23)$$

Взаимоиндуктивная связь статорных обмоток с продольной составляющей демпферной обмотки (y_d) по форме аналогична уравнениям (23), поскольку эта демпферная обмотка расположена на роторе аналогично обмотке возбуждения, следовательно

$$\begin{aligned} L_{anyd} &= l_{yd} \cos(\gamma - \beta_n); \\ L_{bnyd} &= l_{yd} \cos(\gamma - \beta_n - \rho); \\ L_{cnyd} &= l_{yd} \cos(\gamma - \beta_n + \rho). \end{aligned} \quad (24)$$

Поскольку ось поперечной демпферной обмотки (y_q) опережает продольную ось ротора d на угол $\pi/2$, взаимные индуктивности обмоток статора с обмоткой y_q имеет вид:

$$\begin{aligned} L_{anyq} &= l_{yq} \cos(\gamma - \beta_n + \pi/2) = -l_{yq} \sin(\gamma - \beta_n); \\ L_{bnyq} &= l_{yq} \cos(\gamma - \beta_n - \rho + \pi/2) = -l_{yq} \sin(\gamma - \beta_n - \rho); \\ L_{cnyq} &= l_{yq} \cos(\gamma - \beta_n + \rho + \pi/2) = -l_{yq} \sin(\gamma - \beta_n + \rho). \end{aligned} \quad (25)$$

Взаимные индуктивности между обмоткой возбуждения и демпферной y_d не зависят от пространственного положения ротора и потому является величиной постоянной: $l_{fyd} = \text{const}$. В то же время взаимная индуктивность обеих обмоток с поперечной демпферной обмоткой y_q отсутствует, поскольку оси этих обмоток перпендикулярны: $l_{fyq} = l_{yqf} = 0$.

Для обмоток с различным числом витков уравнения по типу (23,...,25) принимают вид:

$$L_{anf} = l_{alf} \cos(\gamma - \beta_n) W_n/W_1;$$

$$L_{bnf} = l_{alf} \cos(\gamma - \beta_n - \rho) W_n/W_1;$$

$$L_{cnf} = l_{alf} \cos(\gamma - \beta_n + \rho) W_n/W_1;$$

$$L_{anyd} = l_{alf} \cos(\gamma - \beta_n) W_n/W_1;$$

$$L_{bnyd} = l_{alf} \cos(\gamma - \beta_n - \rho) W_n/W_1;$$

$$L_{cnyd} = l_{alf} \cos(\gamma - \beta_n + \rho) W_n/W_1;$$

$$L_{anyq} = - l_{alyq} \sin(\gamma - \beta_n) W_n/W_1;$$

$$L_{bnyq} = - l_{alyq} \sin(\gamma - \beta_n - \rho) W_n/W_1;$$

$$L_{cnyq} = - l_{alyq} \sin(\gamma - \beta_n + \rho) W_n/W_1.$$

Как видим, взаимные индуктивности, определяющие потокосцепление обмоток статора с обмотками ротора, являются периодическими функциями углового положения ротора. Для вращающейся машины угол γ в функции времени определяется выражением [2]

$$g = \int_0^t \Omega dt + g_0,$$

где γ_0 - значение γ при $t = 0$.

Для равномерно вращающегося ротора

$$\gamma = \Omega t + \gamma_0.$$

Потокасцепления обмоток в d, q координатах

Каждое из индуктивных сопротивлений системы уравнений (12) является периодической функцией углового положения ротора. Это делает уравнения с их использованием уравнениями с переменными коэффициентами. Таковы, в частности, уравнения равновесия напряжения статорных обмоток в фазных координатах. Избавиться от периодических коэффициентов в уравнениях явнополюсной машины, чтобы упростить анализ и решение уравнений позволяет метод преобразования координат, что предопределило широкое распространение метода в теоретической

электромеханике. Здесь представлен алгоритм преобразования уравнений потокосцепления из координат a, b, c в координаты d, q . В соответствии с принятым выше порядком рассмотрения вопросов последовательно представлены преобразования координат для машин с равным эффективным числом витков по условию минимального заполнения матрицы индуктивностей (индуктивных сопротивлений); то же с различным числом витков статорных обмоток; преобразование координат при естественном взаимном расположении на векторной диаграмме векторов токов и напряжений для машины с равным и с неравным числами витков статорных обмоток.

Уравнения индуктивных связей обмоток в координатах d, q получим в результате совместного решения уравнений потокосцеплений и фазных токов.

а) Преобразование координат при равенстве чисел витков статорных обмоток по условию минимального заполнения матрицы индуктивностей в координатах d, q

Потокосцепление обмотки $a1$:

$$\Psi_{a1} = L_{a1}i_{a1} + L_{a1b1}i_{b1} + L_{a1c1}i_{c1} + \dots + L_{a1aN}i_{aN} + L_{a1bN}i_{bN} + L_{a1yd}i_{yd} + L_{a1yq}i_{yq} + L_{a1f}i_f. \quad (26)$$

Уравнение обратных преобразований токов

$$[i_{a,b,c}]_n = [B] [i_{d,q,o}]_{nN}, \quad (27)$$

где $[i_{a,b,c}]_n = \text{colon}(i_{an}, i_{bn}, i_{cn})$;

$[i_{d,q,o}]_n = \text{colon}(i_{dn}, i_{qn}, i_{on})$;

$$[B] = \begin{bmatrix} \cos(g - b_n) & \sin(g - b_n) & 1 \\ \cos(g - b_n - r) & \sin(g - b_n - r) & 1 \\ \cos(g - b_n + r) & \sin(g - b_n + r) & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Выше отмечалось, что индуктивности по потокам рассеяния статорных обмоток имеют весьма сложную зависимость от их углового смещения. Это обстоятельство затрудняет преобразование индуктивностей в координатах d, q и предопределяет то обстоятельство, что матрица индуктивностей оказывается заполненной аналогично матрице при естественном взаимном расположении обобщенных векторов на координатной плоскости. Положение изменится, если принять как дополнительное допущение, что индуктивность по потоку рассеяния изменяется аналогично индуктивности по полю в зазоре, т.е.

$$l_{sn} = l_{s2} \cos\beta_{ij}, \quad (29)$$

где l_{s2} - взаимная индуктивность по потоку рассеяния фазных обмоток i и j при совпадающих магнитных осях;

β_{ij} - угол смещения обмоток i и j .

Совместное решение уравнений (26,...,29) и уравнений индуктивности (12) дает:

$$\begin{aligned} \Psi_{a1} = & (l_{o1} + l_{s1} + l_{21} \cos 2\gamma)(i_{o1} + i_{d1} \cos \gamma + i_{q1} \sin \gamma) + \\ & + [-l_{o1}/2 + l_{s1} \cos \rho + l_{21} \cos(2\gamma - \rho)][i_{o1} + i_{d1} \cos(\gamma - \rho) + i_{q1} \sin(\gamma - \rho)] + \\ & + [-l_{o1}/2 + l_{s2} \cos \rho + l_{21} \cos(2\gamma + \rho)][i_{o1} + i_{d1} \cos(\gamma + \rho) + i_{q1} \sin(\gamma + \rho)] + \dots \\ & \dots + [l_{o1} \cos \beta_N + l_{s2} \cos \beta_N + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_{nN})][i_{oN} + i_{dN} \cos(\gamma - \beta_N) + \\ & + i_{qN} \sin(\gamma - \beta_N)] + [l_{o1} \cos(\beta_N + \rho) + l_{s2} \cos(\beta_N + \rho) + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_N - \rho)] \times \\ & \times [i_{oN} + i_{dN} \cos(\gamma - \beta_N - \rho) + i_{qN} \sin(\gamma - \beta_N - \rho)] + [l_{o1} \cos(\beta_N - \rho) + \\ & + l_{s2} \cos(\beta_N - \rho) + l_{21} \cos(2\gamma - \beta_N + \rho)][i_{oN} + i_{dN} \cos(\gamma - \beta_N + \rho) + \\ & + i_{qN} \sin(\gamma - \beta_N + \rho)] + L_{a1yd} i_{yd} + L_{a1yq} i_{yq} + L_{a1f} i_f. \end{aligned}$$

Используя в дальнейших преобразованиях известные [5] соотношения:

$$\cos \alpha \cos \beta + \cos(\alpha - \rho) \cos(\beta - \rho) + \cos(\alpha + \rho) \cos(\beta + \rho) = 3/2 \cos(\alpha - \beta);$$

$$\sin \alpha \cos \beta + \sin(\alpha - \rho) \cos(\beta - \rho) + \sin(\alpha + \rho) \cos(\beta + \rho) = 3/2 \sin(\alpha - \beta);$$

$$\cos\alpha + \cos(\alpha - \rho) + \cos(\alpha + \rho) = 0;$$

$$\sin\alpha + \sin(\alpha - \rho) + \sin(\alpha + \rho) = 0,$$

в итоге получим:

$$\begin{aligned} \Psi_{a1} = & i_{d1}(3l_{o1}/2 + 3l_{s1}/2 + 3l_{21}/2) \cos\gamma + i_{q1}(3l_{o1}/2 + 3l_{s1}/2 + 3l_{21}/2) \sin\gamma + \\ & + \dots + i_{dN}(3l_{o1}/2 + 3l_{s1}/2 + 3l_{21}/2) \cos\gamma + i_{qN}(3l_{o1}/2 + 3l_{s1}/2 + 3l_{21}/2) \sin\gamma + \\ & + La_{1yd}i_{yd} + La_{1yq}i_{yq} + La_{1f}i_f. \end{aligned}$$

Поскольку $\Psi_{a1} = \Psi_o + \Psi_{d1} \cos\gamma + \Psi_{q1} \sin\gamma$, имеем:

$$\Psi_{d1} = \frac{3}{2}l_{s1}i_{d1} + \frac{3}{2}(l_{o1} + l_{21})\sum_{j=1}^N i_{dj} + \frac{3}{2}l_{s2}\sum_{j=2}^N i_{dj};$$

$$\Psi_{q1} = \frac{3}{2}l_{s1}i_{q1} + \frac{3}{2}(l_{o1} - l_{21})\sum_{j=1}^N i_{qj} + \frac{3}{2}l_{s2}\sum_{j=2}^N i_{qj}.$$

Аналогичные преобразования уравнений потокосцепления фазной обмотки aN дают следующие результаты:

$$\Psi_{dn} = \frac{3}{2}(l_{s1} - l_{s2})i_{d1} + \frac{3}{2}(l_{o1} + l_{21})\sum_{j=1}^N i_{dj} + \frac{3}{2}l_{s2}\sum_{j=2}^N i_{dj};$$

$$\Psi_{qn} = \frac{3}{2}(l_{s1} - l_{s2})i_{q1} + \frac{3}{2}(l_{o1} + l_{21})\sum_{j=1}^N i_{qj} + \frac{3}{2}l_{s2}\sum_{j=2}^N i_{qj}.$$

Матрица индуктивностей (индуктивных сопротивлений) приобретает вид:

$$[L] = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} L_{d1} & 0 & L_{d2} & 0 & L_{d2} & 0 \\ 0 & L_{q1} & 0 & L_{q2} & 0 & L_{q2} \\ L_{d1} & 0 & L_{d2} & 0 & L_{d2} & 0 \\ 0 & L_{q1} & 0 & L_{q2} & 0 & L_{q2} \\ L_{d1} & 0 & L_{d2} & 0 & L_{d2} & 0 \\ 0 & L_{q1} & 0 & L_{q2} & 0 & L_{q2} \end{bmatrix},$$

где $L_{d1} = l_{o1} + l_{s1} + l_{21}; \quad L_{d2} = l_{o1} + l_{s2} + l_{21};$

$$L_{q1} = l_{o1} + l_{s1} - l_{21}; \quad L_{q2} = l_{o1} + l_{s2} - l_{21}.$$

б) Преобразования потокосцеплений для машины с разным числом витков статорных обмоток по условию минимального заполнения матрицы индуктивности

При выполнении преобразования учитывается, что индуктивность самоиндукции обмотки пропорциональна квадрату числа витков, а взаимоиנדукции - пропорциональна произведению чисел витков взаимоиנדуктирующих обмоток. При этом уравнение (26) можно переписать в виде:

$$\Psi_{a1} = (L'_{a1}i_{a1} + L'_{a1b1}i_{b1} + L'_{a1c1}i_{c1})W_1^2 + \dots + (L'_{a1aN}i_{aN} + L'_{a1bN}i_{bN} + L'_{a1cN}i_{cN})W_1W_N + L_{a1yd}i_{yd} + L_{a1yq}i_{yq} + L_{a1f}i_f,$$

где $L'_{aj}(j = a1, b1, c1, a2, \dots, aN, bN, cN) = L_{aj}/(W_1W_n)$

Аналогичные вышеприведенным преобразования дают следующие результаты

$$\Psi_{d1} = \frac{3}{2} \left[(l'_{01} + l'_{s1} + l'_{21})W_1^2 i_{d1} + (l'_{01} + l'_{s1} + l'_{21})W_1 \sum_{j=2}^2 i_{dj} W_j \right];$$

$$\Psi_{q1} = \frac{3}{2} \left[(l'_{01} + l'_{s1} - l'_{21})W_1^2 i_{q1} + (l'_{01} + l'_{s1} - l'_{21})W_1 \sum_{j=2}^2 i_{qj} W_j \right];$$

.

$$\Psi_{dN} = \frac{3}{2} \left[(l'_{01} + l'_{s1})W_N \sum_{j=2}^N i_{dj} W_j + l'_{s2}W_N \sum_{j=2}^N i_{dj} W_j + (l'_{s1} - l'_{21})W_N^2 i_{dN} \right];$$

$$\Psi_{qN} = \frac{3}{2} \left[(l'_{01} - l'_{s1})W_N \sum_{j=2}^N i_{qj} W_j + l'_{s2}W_N \sum_{j=2}^N i_{qj} W_j + (l'_{s1} - l'_{21})W_N^2 i_{qN} \right];$$

Матрица индуктивностей

$$[L] = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} L'_{d1}W_1 & 0 & L'_{d2}W_1 & 0 & \dots & L'_{d2}W_1 & 0 \\ 0 & L'_{q1}W_1 & 0 & L'_{q2}W_1 & \dots & 0 & L'_{q2}W_1 \\ L'_{d2}W_2 & 0 & L'_{d1}W_2 & 0 & \dots & L'_{d2}W_2 & 0 \\ 0 & L'_{q2}W_2 & 0 & L'_{q1}W_2 & \dots & 0 & L'_{q2}W_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L'_{d2}W_N & 0 & L'_{d1}W_N & 0 & \dots & L'_{d1}W_N & 0 \\ 0 & L'_{q2}W_N & 0 & L'_{q2}W_N & \dots & 0 & L'_{q1}W_N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_1 \\ W_1 \\ W_2 \\ W_2 \\ \dots \\ W_N \\ W_N \end{bmatrix} \quad (30)$$

где $L'_{d1} = l'_{o1} + l'_{s1} + l'_{21}$; $L'_{d2} = l'_{o1} + l'_{s2} + l'_{21}$;

$L'_{q1} = l'_{o1} + l'_{s1} - l'_{21}$; $L'_{q2} = l'_{o1} + l'_{s2} - l'_{21}$.

в) Преобразования потокосцеплений и индуктивностей при естественном взаимном расположении изображающих токов

При использовании одинаковых матриц преобразования переменных параметров для токов всех статорных обмоток, получим следующий ряд уравнений.

Для потокосцепления фазной обмотки $a1$ запишем:

$$\Psi_{a1} = \Psi_1 + \Psi_2 + \dots + \Psi_N,$$

где Ψ_1 - потокосцепление от собственного тока обмотки W_1 ;

Ψ_2, Ψ_N - потокосцепление от тока в обмотках W_2 и W_N ;

Составляющая Ψ_1 преобразуется по тем же уравнениям, что и в п. а. Новый характер принимают преобразования для составляющей Ψ_n . Рассмотрим их подробнее:

$$\begin{aligned} \Psi_n = & [(l_{o1} + l_{s2}) \cos\beta_n + l_{21}\cos(2\gamma - \beta_n)](i_{on} + i_{dn}\cos\gamma + i_{qn}\sin\gamma) + \\ & + [(l_{o1} + l_{s2}) \cos(\beta_n + \rho) + l_{21}\cos(2\gamma - \beta_n - \rho)] [i_{oN} + i_{dn}\cos(\gamma - \rho) + i_{qn}\sin(\gamma - \rho)] + \\ & + [(l_{o1} + l_{s2}) \cos(\beta_n - \rho) + l_{21}\cos(2\gamma - \beta_n + \rho)] [i_{oN} + i_{dn}\cos(\gamma + \rho) + i_{qn}\sin(\gamma + \rho)]. \end{aligned} \quad (31)$$

После преобразования уравнения (31), получим:

$$\Psi_n = (3/2) \cos\gamma [i_{dn}(l_{o1} + l_{s2} + l_{21}) \cos\beta_n + i_{qn}(l_{o1} + l_{s2} + l_{21}) \sin\beta_n] +$$

$$+ \sin\gamma [i_{dn}(l_{o1} + l_{s2} - l_{21}) \cos\beta_n - i_{qn}(l_{o1} + l_{s2} - l_{21}) \sin\beta_n],$$

или

$$\Psi_{dn} = (3/2) i_{dn}(l_{o1} + l_{s2} + l_{21}) \cos\beta_n + (3/2) i_{qn}(l_{o1} + l_{s2} + l_{21}) \sin\beta_n;$$

$$\Psi_{qn} = (3/2) i_{qn}(l_{o1} + l_{s2} - l_{21}) \cos\beta_n - (3/2) i_{dn}(l_{o1} + l_{s2} - l_{21}) \sin\beta_n.$$

Матрица индуктивности в этом случае принимает вид:

$$[L] = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} L_{d1} & 0 & \dots & L_{d2} \cos b_N & L_{d2} \sin b_N & \dots & L_{d2} \cos b_n & L_{d2} \sin b_n \\ 0 & L_{q1} & \dots & -L_{q2} \sin b_N & L_{q2} \cos b_N & \dots & -L_{q2} \sin b_n & L_{q2} \cos b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{d2} \cos b_N & L_{d2} \sin b_n & \dots & L_{d1} & 0 & \dots & L_{d2} \cos(b_n - b_N) & L_{d2} \sin(b_n - b_N) \\ -L_{q2} \sin b_N & L_{q2} \cos b_n & \dots & 0 & L_{q1} & \dots & -L_{q2} \sin(b_n - b_N) & L_{q2} \cos(b_n - b_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{d2} \cos b_n & L_{d2} \sin b_n & \dots & L_{d2} \cos(b_n - b_N) & L_{d2} \sin(b_n - b_N) & \dots & L_{d1} & 0 \\ -L_{q2} \sin b_n & L_{q2} \cos b_n & \dots & -L_{q2} \sin(b_n - b_N) & L_{q2} \cos(b_n - b) & \dots & 0 & L_{q1} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Применительно к обмоткам с разным числом витков, матрица индуктивности имеет вид (33) и приобретает особенности, свойственные матрице (30).

$$[L] = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} L_{d1}W_1 & 0 & \dots & L_{d2}W_1 \cos b_N & L_{d2}W_1 \sin b_N & \dots & L_{d2}W_1 \cos b_n & L_{d2}W_1 \sin b_n \\ 0 & L_{q1}W_1 & \dots & -L_{q2}W_1 \sin b_N & L_{q2}W_1 \cos b_N & \dots & -L_{q2}W_1 \sin b_n & L_{q2}W_1 \cos b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{d2}W_N \cos b_N & L_{d2}W_N \sin b_n & \dots & L_{d1}W_N & 0 & \dots & L_{d2}W_N \cos(b_n - b_N) & L_{d2}W_N \sin(b_n - b_N) \\ -L_{q2}W_N \sin b_N & L_{q2}W_N \cos b_n & \dots & 0 & L_{q1}W_N & \dots & -L_{q2}W_N \sin(b_n - b_N) & L_{q2}W_N \cos(b_n - b_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{d2}W_n \cos b_n & L_{d2}W_n \sin b_n & \dots & L_{d2}W_n \cos(b_n - b_N) & L_{d2}W_n \sin(b_n - b_N) & \dots & L_{d1}W_n & 0 \\ -L_{q2}W_n \sin b_n & L_{q2}W_n \cos b_n & \dots & -L_{q2}W_n \sin(b_n - b_N) & L_{q2}W_n \cos(b_n - b) & \dots & 0 & L_{q1}W_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_1 \\ W_1 \\ \dots \\ W_N \\ W_N \\ \dots \\ W_n \\ W_n \end{bmatrix} \quad (33)$$

Мощность и электромагнитный момент

Получаемая из сети всеми статорными обмотками мгновенная электрическая мощность определяется алгебраической суммой мгновенных мощностей всех этих обмоток. Для машины с N трехфазными обмотками на статоре

$$P = u_{a1}i_{a1} + u_{b1}i_{b1} + u_{c1}i_{c1} + u_{a2}i_{a2} + u_{b2}i_{b2} + u_{c2}i_{c2} + \dots + u_{aN}i_{aN} + u_{bN}i_{bN} + u_{cN}i_{cN} = \sum_{\substack{n=1 \\ j=a,b,c}}^N u_{jn}i_{jn}.$$

Применив преобразование фазных напряжений и токов в составляющие d, q, o (независимо от того, какая из матриц преобразования используется), получим:

$$P = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^N u_{dn}i_{dn} + u_{qn}i_{qn} + 2u_{0n}i_{0n} \quad (34)$$

Подставив в уравнение (34) значение напряжения u_{dn}, u_{qn} , получим:

$$P = \frac{3}{2} \sum \left[(p\Psi_{dn} - \Psi_{qn}pg + r_n i_{dn})i_{dn} + (p\Psi_{qn} - \Psi_{dn}pg + r_n i_{qn})i_{qn} \right] \quad (35)$$

где $p = d/dt$ - оператор дифференцирования.

Преобразование уравнения (35) перегруппировкой слагаемых дает:

$$P = \sum_{n=1}^N (p\Psi_{dn} i_{dn} + p\Psi_{qn} i_{qn}) + \sum_{n=1}^N (\Psi_{dn} i_{qn} - \Psi_{qn} i_{dn})pg + \sum r_n (i_{dn}^2 + i_{qn}^2). \quad (36)$$

Уравнение (36) показывает, что потребляемая статорными обмотками активная мощность P расходуется, как и у классической СМ, на изменение запаса электромагнитной энергии в машине, на тепловые потери и оставшаяся, основная часть, в виде электромагнитной мощности передается ротору.

Разделив электромагнитную мощность на угловую частоту вращения ротора $\omega = p\gamma$, получим выражение в относительных единицах для электромагнитного момента, создаваемого всеми обмотками статора:

$$m = \sum_{n=1}^N (\Psi_{dn} i_{qn} - \Psi_{qn} i_{dn}) \quad (3.101)$$

Уравнение движения ротора электрической машины вращательного движения имеет вид:

$$m - m_c = H (d^2\gamma/dt^2), \quad 3.102)$$

где H - механическая постоянная вращающихся масс;

m_c - момент сопротивления рабочей машины.

Применительно к СМ с несколькими обмотками на статоре оно приобретает вид:

$$\sum_{n=1}^N (\Psi_{dn} i_{qn} - \Psi_{qn} i_{dn}) = H \frac{d^2 g}{dt^2} + m_c.$$

Выводы

1. До настоящего времени в научной литературе не представлено систематизированное изложение основ теории синхронных машин с несколькими трехфазными обмотками на статоре или с разветвленной статорной обмоткой, при разном числе витков и расположением в пространстве машины, что сдерживает практическое использование электрических машин такого типа.

2. Для синхронных машин с несколькими статорными обмотками может быть использован метод преобразования координат по типу преобразования Парка-Горева на основании традиционных исходных идеализирующих допущений. Применение метода имеет свои особенности, не свойственные классической синхронной машине.

3. Рациональное математическое описание синхронных машин с несколькими статорными обмотками может быть построено в фазных и ортогональных координатных системах. Как и для классической синхронной машины, математическое описание электрических цепей в фазных координатах составляют система уравнений равновесия напряжения с переменными (периодическими) коэффициентами и уравнения механического движения. Для машины с несколькими статорными обмотками возможно применение метода преобразования координат с исключением из системы уравнений переменных коэффициентов.

4. Выбором рациональной матрицы преобразования может быть достигнута минимальная заполненность матрицы индуктивности, что важно, с учетом высокого порядка этой матрицы для многообмоточной машины. С другой стороны, могут быть получены матрицы с ясным физическим смыслом представленных в ней элементов.

Литература

1. Горев А. А. Переходные процессы синхронной машины / А.А. Горев. –Л.: Госэнергоиздат, 1950. 551с.
2. Копылов И.П. Математическое моделирование электрических машин. 3–е изд., перераб и доп / И.П. Копылов. –М.: Высш. шк., 2001. 327с.
3. Страхов С.В. Уравнения синхронной машины с двумя трехфазными обмотками на статоре/ С.В. Страхов, В.И. Сегал. //Изв вузов. Электромеханика. 1982, № 7. С. 623-628.
4. Крылов О.А. Математическая модель синхронной машины с двумя трехфазными обмотками, сдвинутыми в пространстве / О.А. Крылов // Электричество. 1989, №3. С. 63-68.
5. Кононенко Е.В. Электрические машины (Спец. курс) / Е.В. Кононенко, Г.А. Сипайлов, К.А. Хорьков. –М.: Высш. шк., 1975. 279 с.
6. Стрижков И. Г. Математическое описание синхронного двигателя с двойной якорной обмоткой / И.Г. Стрижков // Повышение эксплуатационной надежности электрооборудования в с.х.: Труды Челяб. гос. агроинж. ун–та. 1991. С. 10–18.