УДК 519.6; 519.17

СТРУКТУРНОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ДЕРЕВЬЕВ С МНОЖЕСТВОМ ЗАТРАВОК

Кочкаров Ахмат Магомедович
Доктор физико-математических наук, профессор

Хапаева Лёля Халисовна

Северо-Кавказская Государственная гуманитарно-технологическая академия,
Черкесск, Россия

В работе определен класс предфрактальных деревьев, порожденных множеством затравок-звезд с чередованием. Построен и обоснован алгоритм распознавания этого класса предфрактальных графов. Доказан полиномиальный характер предложенного алгоритма распознавания

Ключевые слова: СТРУКТУРНОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ, СЕТЕВЫЕ СИСТЕМЫ, ИЕРАРХИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ, ПРЕДФРАКТАЛЬНЫЕ ДЕРЕВЬЯ, ФРАКТАЛЬНЫЕ ГРАФЫ

UDC 519.6; 519.17

PREFRACTAL TREES GENERATED BY SEEDS SET STRUCTURAL RECOGNITION

Kochkarov Ahmat Magomedovich
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

Hapaeva Lelya Halisovna

Northern Caucasia Stat academy for technologies and humanities,
Cherkessk, Russia

In paper the class of prefractal the trees generated by set of seeds-stars with alternation is defined. The algorithm of this class prefractal graphs recognition is proved. It is proved also polynomial character of the offered recognition algorithm

Key words: STRUCTURAL RECOGNITION, NETWORK SYSTEMS, HIERARCHICAL STRUCTURES, PREFRACTAL TREES, FRACTAL GRAPHS

Введение

Термин “сеть” широко распространен в современной научной и бизнес-литературе. На слуху такие выражения как “розничная или торговая сеть (сеть магазинов)”, “сетевой маркетинг”, “филиальная сеть”, “сеть трубопроводов”, “железнодорожная сеть”, “социальная сеть”, “компьютерная сеть”, “информационная сеть”, “телефонная сеть” и т.д. Не редко этот термин используется для обозначения совершенно различных понятий. В настоящем диссертационном исследование термин “сеть” понимается во-первых как совокупность путей доставки товаров или услуг до конечного получателя, а во вторых как совокупность связей между элементами многоэлементной системы. Системы, в основе функционирования которых лежит сеть, принято называть *сетевыми системами* [1].

На протяжении довольно длительного времени техническая и экономическая науки считали аксиомой стационарность структуры всякой сетевой системы. Под структурой системы понимали совокупность исключительно устойчивых связей между элементами системы. На этом понимании выросли научные школы в области теории графов, дискретной математики, комбинаторной оптимизации и теории систем. Не без основания все результаты деятельности научных школ имеют совершенно четко очерченные области применения в практической деятельности. Но глобализационные процессы в мировой экономики и жизнеустройстве ставят новые задачи.

Развивающаяся экономика и глобализационные процессы вынуждают сетевые системы развивать, адаптировать, оптимизировать свою сетевую структуру под сильно изменчивую конкурентную среду, и под новую геополитическую конъюнктуру. В такой ситуации в регулярных изменениях сетевых структур прослеживаются закономерности. Сетевые структуры не только теряют свою стационарность (фиксированность), но и приобретают признаки динамических систем. Сетевые структуры приобретают признаки и свойства иерархических и масштабно-инвариантных структур. Процессы изменения, развития, поведения сетевых структур можно объединить общим понятием "*структурная динамика*". В системах с изменяющейся структурой целесообразно вести контроль над изменениями структуры для формирования спектра необходимых свойств и характеристик. Достижение этой цели лежит в русле решения задач *структурного управления или управления структурной динамикой* [2, 3].

В качестве моделей структурной динамики сетевых систем в работах профессора Кочкарова А.М. предлагаются различные классы масштабно-инвариантных графов, называемых *предфрактальными*.

Очевидно, что при исследовании сетевых систем, необходимо решать не только задачу распознавания структуры уже существующей сетевой системы, но и задачу распознавания самого процесса развития-изменения структуры сетевой системы. Задачу, объединяющую две указанные, назовем задачей *структурного распознавания*. В настоящей работе и предлагаются алгоритмы распознавания сетевых систем с древовидной структурой. Эти алгоритмы, во-первых, устанавливают, что процесс развития сетевых структур соответствует тем или иным правилам порождения *предфрактальных деревьев* [4, 5], а во-вторых, определяют какие типы затравок при порождении были использованы.

1. **Предфрактальные графы: основные понятия и характеристики**

Предфрактальный граф будем обозначать через $G_L = (V_L, E_L)$, где V_L – множество вершин графа, а E_L – множество его ребер. Определим его рекуррентно, поэтапно, заменяя каждый раз в построенном на предыдущем этапе $l = \{1,2,...L-1\}$ графе G_l каждую его вершину связной затравкой $H = (W, Q)$. На первом этапе предфрактальному графу соответствует затравка. При этом об описанном процессе говорят, что предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ порожден затравкой $H = (W, Q)$. Ребра, появившиеся на этапе l, $l = \overline{1, L}$, порождения предфрактального графа, будем называть *ребрами ранга* l. *Новыми* ребрами предфрактального графа G_L назовем – ребра ранга L, а все остальные ребра назовем *старыми*. Процесс построения предфрактального графа, по существу, есть процесс построения последовательности предфрактальных графов, которую и назовем *траекторией*. *Фрактальный граф* определяется бесконечной траекторией. Обобщением описанного процесса порождения предфрактального графа G_L является такой случай, когда вместо единственной затравки H используется множество затравок $\mathbf{H} = \{H_t\} = \{H_1, H_2, ..., H_t, ..., H_T\}$, $T \geq 2$. Суть этого обобщения состоит в том, что при переходе от графа G_{l-1} к графу G_l каждая вершина замещается некоторой затравкой $H_t \in \mathbf{H}$, которая выбирается случайно или согласно определенному правилу, отражающему специфику моделируемого процесса или структуры. Если при переходе от графа G_{l-1} к графу G_l каждая вершина графа G_{l-1} замещается одной конкретной случайно выбранной затравкой $H_{t*} \in \mathbf{H}$, то будем говорить, что *предфрактальный граф* G_L *порожден множеством затравок* $\mathbf{H} = \{H_t\}, t = 1,2,...,T$, $T \geq 2$, *с чередованием*. Если же при порождении предфрактального графа G_L множеством затравок $\mathbf{H} = \{H_t\}$, $T \geq 2$, с чередованием задано некоторое правило выбора затравок из $\mathbf{H}$, например, неубывание числа вершин или ребер выбираемых затравок, то будем говорить, что *предфрактальный граф* G_L *порожден множеством затравок* $\mathbf{H} = \{H_t\}$, $t = 1,2,...,T$, $T \geq 2$, *с упорядоченным чередованием*.

Очевидно, что порождение фрактального графа $G = (V, E)$ (т.е. когда траектория является бесконечным множеством $G_1, G_2, ..., G_l, ..., G_L, G_{L+1}, ...$) с чередованием затравок, возможно только при бесконечном числе замещений затравок $\mathbf{H} = \{H_t\}$, $t = 1,2,...,T$, $T \geq 2$.

Если при порождении предфрактального графа с чередованием, для замещения вершин на последующих шагах порождения выбираются затравки с возрастанием числа вершин, то такой предфрактальный граф будем называть *порожденным с упорядоченным возрастанием затравок*. Если же для замещения вершин на последующих шагах порождения выбираются затравки с убыванием числа вершин, то такой предфрактальный граф будем называть *порожденным с упорядоченным убыванием затравок*. Использованием для порождения предфрактального графа чередованием затравок одной и то же затравки на различных этапах порождения исключается.

В случае порождения предфрактального графа G_L с упорядоченным возрастанием (с упорядоченным убываем) затравок $\mathbf{H} = \{H_t\}$, $t = 1,2,...,T$, $T \geq 2$, если $L > T$, то переход на $l = T + 1$ шаге порождения от предфрактального графа G_T к G_{T+1}, осуществляется заменой всех вершин графа G_T затравкой с наименьшим (наибольшим) числом вершин из $\mathbf{H} = \{H_t\}$, $t = 1,2,...,T$, $T \geq 2$. На последующих шагах $l = T + 2, T + 3, ..., L$ порождения предфрактального графа G_L затравки из $\mathbf{H} = \{H_t\}$, $t = 1,2,...,T$, $T \geq 2$, используются последовательно по очередности возрастания (убывания) числа вершин. В случае порождения предфрактального графа G_L число этапов порождения больше числа затравок, $L > T$, целесообразно говорить о периоде замещения вершин затравками. Период замещения вершин затравкам в процессе порождения предфрактального графа G_L с возрастанием или убыванием вершин затравок $\mathbf{H} = \{H_t\}$, $t = 1,2,...,T$, $T \geq 2$, обозначим через P.

Для всякого предфрактального графа ключевыми характеристиками являются мощности множеств вершин и ребер. Для предфрактального графа порожденного множеством затравок эти характеристики подсчитаны в следующих ниже умозаключениях.

Лемма 1. *Всякий предфрактальный граф* G_L, *порожденный множеством полных затравок* $\mathbf{H}=\{H_t\}$, $t=2,3,...,T$, где H_t – t*-вершинный граф и* $L=T-1$, *с упорядоченным возрастанием имеет* $N(G_L)=T!$ *вершин.*

Доказательство. Рассмотрим траекторию $G_1,G_2,...,G_l,...,G_L$ предфрактального графа G_L, порожденного множеством затравок $\mathbf{H}=\{H_t\}$, $t=2,3,...,T$ с упорядоченным возрастанием. На первом шаге порождения полная двухвершинная затравка из множества $\mathbf{H}$ совпадает с первым элементом из траектории предфрактального, $G_1=H_2$. Число вершин $N(G_1)=N(H_2)=2$. Граф G_2 из траектории предфрактального графа G_L порождается из графа G_1 замещением двух его вершин затравками H_3, – полными трехвершинными графами. Поэтому число вершин графа G_2 определяется как $N(G_2)=N(G_1)*3=2*3=3!=6$. В свою очередь, граф G_3 из траектории предфрактального графа G_L порождается из графа G_2 замещением всех шести его вершин затравками H_4, – полными четырехвершинными графами. А значит, число вершин графа G_3 определяется как $N(G_3)=N(G_2)*4=N(G_1)*3*4=2*3*4=4!=24$.

Аналогичным образом, число вершин графа G_l, $l=2,3,...,L$, определяется произведением $N(G_l)=N(G_{l-1})*(l+1)$. Отметим, что $T=L+1$, а мощность множества затравок $|\mathbf{H}|=L$. Таким образом, Пройдя все этапы порождения число вершин предфрактального графа G_L, порожденного множеством полных затравок, будет равно $N(G_L)=T!$ ◄[1]

Теорема 2. *Всякий предфрактальный граф* G_L, *порожденный множеством затравок* $\mathbf{H}=\{H_t\}$, $t=2,3,...,T$, *где* H_t – t*-вершинный граф и* $L=T-1$, *с чередованием имеет* $N(G_L)=T!$ *вершин.*

Доказательство. Согласно общему определению фрактального и предфрактального графов число вершин всякого предфрактального графа зависит в первую очередь от числа вершин его затравок, и ни коей мере не зависит от числа ребер его затравок. Т.е. число вершин предфрактального графа не зависит от типа затравки, а зависит от числа ее вершин. Напри-

[1] Здесь и далее символом “◄” будем обозначать окончание алгоритмов, доказательств лемм и теорем.

мер, предфрактальный граф J_L, порожденный полной n-вершинной затравкой или множеством полных затравок, предфрактальный граф C_L, порожденный n-вершинным циклом или множеством циклов, и предфрактальный граф D_L, порожденный n-вершинной цепью или множеством цепей, будут иметь одинаковое количество вершин. Поэтому, используя результат предыдущей леммы, можно утверждать, что всякий предфрактальный граф G_L, порожденный множеством затравок $\mathbf{H}=\{H_t\}$, $t=2,3,...,T$ с чередованием имеет $N(G_L)=T!$ вершин. ◄

ТЕОРЕМА 3. *Всякий предфрактальный граф* G_L, *порожденный множеством полных затравок* $\mathbf{H}=\{H_t\}$, $t=2,3,...,T$, *где* H_t – t-*вершинный граф и* $L=T-1$, *с упорядоченным возрастанием имеет* $Q(G_L)=1+\sum_{l=1}^{T-2}\frac{(l+2)!(l+1)}{2}$ *ребер.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В траектории $G_1, G_2,..., G_l,..., G_L$ предфрактального графа G_L, порождаемого множеством затравок $\mathbf{H}=\{H_t\}$ с упорядоченным возрастанием граф $G_1=H_2$ имеет одно ребро и две вершины, $Q(G_1)=1$, $N(G_1)=2$. Напомним, что каждая затравка из множества $\mathbf{H}=\{H_t\}$ используется для порождения предфрактального графа только один раз, то траектория предфрактального графа G_L, порождаемого множеством затравок $\mathbf{H}=\{H_t\}$ с чередованием, будет состоять из $(T-1)$ графов. Предфрактальный граф G_2 из траектории, порожденный замещением двух вершин графа $G_1=H_2$ трехвершинной трехреберной затравкой H_3, будет имеет $N(G_2)=N(G_2)*N(H_3)=2*3=6$ вершин. А число ребер графа G_2 вычисляется сложением числа ребер графа G_1 ($Q(G_1)=1$) с числом всех новых ребер полученных при замещении двух вершин графа G_1 трехреберной затравкой H_3 – $Q(G_2)=Q(G_1)+2*Q(H_3)=1+2*3=7$. Аналогично, число ребер предфрактального графа G_3 можно получить сложением числа ребер графа G_2 с числом новых ребер полученных при замещении всех шести вершин графа G_2 четырехвершинными шестиреберными затравками H_4 – $Q(G_3) = Q(G_2) + 6 * Q(H_4) = 7 + 6 * 6 = 43$. Таким образом, число ребер каждого последующего предфрактального графа из траектории получается из числа ребер текущего предфрактального графа сложением с числом новых ребер, которое получается умножением числа вершин текущего предфрактального графа на число ребер очередной затравки: $Q(G_{l+1}) = Q(G_l) + N(G_l) * Q(H_{l+2})$, $l = 2,3,...,T-1$, $L = T-1$. Второе слагаемое из правовой части выражения $N(G_l) * Q(H_{l+2})$ определяет число новых ребер, которое появляется на каждом этапа порождения, или, иначе, соответствует числу новых ребер предфрактального графа G_{l+1} из траектории исследуемого предфрактального графа G_L. Поэтому число всех его ребер $Q(G_L)$ можно получить путем последовательного сложения новых ребер появляющихся на всех этапах порождения: $Q(G_L) = 1 + \sum_{l=1}^{L-1} (l+1)! * Q(H_{l+2})$. Учитывая, что для порождения предфрактального графа $Q(G_L)$ используется только полные затравки, а число их ребер вычисляется согласно соотношению $Q(H_l) = \frac{l(l-1)}{2}$, то

$$Q(G_L) = 1 + \sum_{l=1}^{L-1} (l+1)! \frac{(l+2)(l+1)}{2} = 1 + \sum_{l=1}^{L-1} \frac{(l+2)!(l+1)}{2}$$ или

$$Q(G_L) = 1 + \sum_{l=1}^{T-2} \frac{(l+2)!(l+1)}{2}. \blacktriangleleft$$

Следствие 3.1. *Всякий предфрактальный граф* G_L, *порожденный множеством затравок-звезд* $\mathbf{H} = \{H_t\}$, $t = 3,4,...,T$, *где* H_t – t*-вершинный граф и* $L = T-2$, *с упорядоченным возрастанием имеет* $Q(G_L) = 2 + \sum_{l=2}^{T-2} \frac{(l+1)!}{2}(l+1)$ *ребер.* ◄

2. Распознавания предфрактальных деревьев

Предфрактальные деревья и необходимые признаки распознавания

Под распознаванием предфрактального графа будем понимать определение траектории предфрактального графа при условии, что будут заданы затравки. Будем различать два вида распознавания: *явное и неявное*.

Под *неявным* распознаванием подразумеваем утверждение о том, что данный граф является фрактальным и базируется на некоторой n-вершинной затравке или множестве затравок $\mathbf{H} = \{H_t\}$, $t = 2,3,...,T$.

Явное распознавание подразумевает представление в явном виде множества ребер для каждого ранга или представление в явном виде траектории данного графа $G = (V, E)$, что подразумевает и определение (распознавание) затравки или множества затравок, порождающих предфрактальный граф.

Итак, рассмотрим следующую проблему. Пусть представлен в явном виде некоторый граф $G = (V, E)$, обладающий двумя необходимыми (но не являющимися достаточными) признаками предфрактального графа, порожденного с чередованием затравок:

1) Для мощности множества вершин $|V|$ существует пара T и L, таких, что $L = T - 1$ и $|V| = T!$;
2) Для мощности множества ребер $|E|$ справедливо равенство $|E| = 1 + \sum_{l=1}^{T-2} \frac{(l+2)!(l+1)}{2}$.

Сформулируем два вопроса из области теории распознавания:

а) является ли данный граф G предфрактальным, порожденным множеством полных затравок;

б) можно ли построить достаточно эффективный алгоритм, который гарантированно дает положительный или отрицательный ответ на вопрос а).

В случае распознавания предфрактальных графов, порожденных какой-либо разновидностью деревьев (звезда, цепь, ребро) важным необходимым признаком является ацикличность самого предфрактального графа, т.е. предфрактальный граф так же должен быть деревом [4].

Результатом работы многих процессов являются структуры, отражающиеся диадическими деревьями [5]. Естественным обобщением этого понятия является *R*-адическое дерево [5].

Термином “*R*-адическое дерево” называем всякое дерево, у которого каждая невисячая вершина имеет степени $r+1$, $r \geq 2$. С учетом практических приложений различают *R*-адическое дерево и корневое *R*-адическое дерево [5].

Простейший случай, когда диадическое дерево порождается единственной затравкой, которая представляет собой 3-вершинную звезду. Аналогично *R*-адическое дерево порождается затравкой, которая представляет собой $(r+1)$-вершинную звезду.

Сохраняя для обозначения дерева символ *G*, можем представлять траекторию порождения предфрактального дерева в тех же обозначениях, что и последовательность $G_1, G_2, ..., G_r, ..., G_L$. Алгоритм получения этой траектории в случае порождения предфрактального *R*-адического дерева описывается следующим образом.

Переход от текущего дерева $G_r = (V_r, E_r)$ к текущему дереву G_{r+1} всякий раз подчиняется трем общим правилам.

1) Если вершина $v \in V_r$ не является висячей, то она не замещается затравкой;
2) замещаемая затравкой вершина $v \in V_r$ выбирается только из подмножества висячих вершин, а само висячее ребро становится инцидентным центру звезды;
3) если какая-либо висячая вершина $v \in V_r$ оказалась незамещенной затравкой, то она называется “замороженной” и по отношению к ней операция ЗВЗ не применяется ни на каком из следующих этапов $r+1, r+2, ..., L$.

Отметим, что в траектории $G_1, G_2, ..., G_r, ..., G_L$ ее начальный элемент G_1 представляет собой $(r+1)$-вершинную звезду.

Естественным обобщением *R*-адического дерева является предфрактальное дерево, которое порождается в точном соответствии с описанными правилами 1) – 3) с тем лишь отличием, что “незамороженная” висячая вершина замещается альтернативно некоторой звездой из заданного множества звезд $\mathbf{H} = \{H\}$. Полученное таким образом дерево принято называть термином “$\mathbf{H}$-дерево”. Распознавание $\mathbf{H}$-дерева сводится к простой визуализации, подробнее об этом можно узнать в работе [5].

Несколько более сложным случаем является задача распознавания предфрактального $\mathbf{H}$-дерева с чередованием затравок.

Переход в траектории $G_1, G_2, ..., G_r, ..., G_L$ $\mathbf{H}$-дерева с чередованием затравок от текущего дерева $G_r = (V_r, E_r)$ к текущему дереву G_{r+1} всякий раз подчиняется следующим правилам

I. Если вершина $v \in V_r$ не является висячей, то она не замещается затравкой;

II. Каждая висячая вершина $v \in V_r$ замещается затравкой $H^* \in \mathbf{H}$, выбранной случайным образом из множества затравок-звезд $\mathbf{H} = \{H_t\}$, а каждое висячее ребро становится инцидентным центру звезды $H^* \in \mathbf{H}$; в каждом переходе от графа G_r к графу G_{r+1} используется для замещения вершин только одна затравка $\mathbf{H} = \{H\}$ и $L \geq T$, причем каждая затравка используется (выбирается) в процессе порождения не менее одного раза;

Необходимый признак предфрактального дерева, порожденного множеством затравок-звезд, вытекает из следствия 3.1.

Алгоритм распознавания предфрактальных деревьев с чередованием затравок

Приведем описание алгоритма a_1 распознавания предфрактального $\mathbf{H}$-дерева с чередованием затравок.

Алгоритм a_1состоит из $k = 1, 2, ..., l, ..., L$ этапов. На каждом из этапов алгоритма выполняются три ключевые операции: окрашивание (выделение) вершины, окрашивание (выделение) ребра, стягивание ребра. На вход первого $k = 1$ этапа алгоритма предъявляется предназначенное для распознавание дерево $G = (V, E)$ и пустое множество $\mathbf{H}$. На вход каждого из этапов

$k = 1,2,...,l,...,L$ алгоритма a_1 предъявляется дерево $G^k = (V^k, E^k)$, как результат работы предыдущего этапа.

На этапе $k = l$, $l = 1,2,...,L-1$, сначала выделим все вершины дерева G^l, смежные с висячими вершинами. Если каждая выделенная вершина дерева G^l смежна с одинаковым числом висячих вершин, обозначим это число через H_l, а степень самой вершины равна $H_l + 1$, то выделим все висячие ребра дерева G^l. Затем в множество $\mathbf{H}$ добавим $(H_l + 1)$-вершинную звезду, а все выделенные ребра дерева G^l стянем. Полученное таким образом новое дерево предадим на вход следующего этапа.

Если же дерево G^l не удовлетворяет предъявляемым требованиям, то работа алгоритма прекращается с заключением о несоответствии дерева $G = (V, E)$ определению предфрактального $\mathbf{H}$-дерева с чередованием затравок.

Результатом работы алгоритма a_1 на этапе $k = L$ будет граф-звезда, соответствующая графу G_1 из траектории предфрактального $\mathbf{H}$-дерева с чередованием затравок, в противном случае распознаваемое дерево не является искомым. ◄

ТЕОРЕМА 4. *Всякое предфрактальное* $\mathbf{H}$*-дерево* $G_L = (V_L, E_L)$ *с чередованием затравок распознается алгоритмом* a_1 *с полиномиальной трудоемкостью* $O(|E_L| L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 4 можно разделить на две части. В первой будет доказано соответствия выполняемой алгоритмом a_1 работы заявленным целям, т.е. распознаванию предфрактального $\mathbf{H}$-дерева с чередованием затравок. Во второй будет подсчитана трудоемкость самого алгоритма a_1.

I) Ключевым моментом в распознавании $\mathbf{H}$-дерева $G = (V, E)$ с чередованием затравок является наличие у дерева висячих ребер, причем инцидентных вершинам с одинаковой степенью. Кроме того, степени таких вершин должны быть одинаковыми и быть больше числа инцидентных им висячих ребер только на 1. И действительно, при порождении $\mathbf{H}$-

дерева $G=(V,E)$ с чередованием затравок замещаются затравкой только висячие вершины, и звездами с одинаковым числом ребер. Именно, это является причиной описанного свойства $\mathbf{H}$-дерева с чередованием затравок.

II) На каждом из $k=1,2,...,l,...,L$ этапов распознавания алгоритм a_1 рассматривает каждое ребро дерева $G=(V,E)$ выделяет среди них висячие, т.е. окрашивает их или нет. Поэтому Трудоемкость каждого из $k=1,2,...,l,...,L$ этапов алгоритма a_1 равна $O(|E|)$. А поскольку алгоритм распознает предфрактальное $\mathbf{H}$-дерево $G_L=(V_L,E_L)$ с чередованием затравок за L шагов, то вычислительная сложность или трудоемкость ограничивается полиномом $O(|E_L|L)$. ◄

Заключение

Предложенный и обоснованный алгоритм a_1 распознавания предфрактальных деревьев, порожденные множеством затравок-звезд с чередованием может быть взят за основу для построения алгоритмов распознавания предфрактальных деревьев порожденных при иных условиях (с упорядоченным чередованием затравок, при сохранении или не сохранении смежности старых ребер и т.д.).

Важно отметить, что алгоритм a_1 обладает трудоемкостью $O(|E_L|L)$, где E_L – число ребер распознаваемого предфрактального графа, а L – его ранг. Свойство полиномиальности для алгоритмов обработки многоэлементных систем является крайне важным ввиду масштаба их структур.

Литература

1. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Суперконкурентное распределение потоков в многопродуктовых сетях// Дискретный анализ и исследование операций. – Серия 2, 1997. Т. 4, № 2. – С. 34–54.
2. *Охтилев М.Ю., Соколов Б.В., Юсупов Р.М.* Интеллектуальные технологии мониторинга и управления структурной динамикой сложных технических объектов. – М.: Наука, 2006.
3. *Кочкаров А.М., Кочкаров А.А., Никищенко С.П.* Структурная динамика и исследование структурно-временных характеристик дискретных систем // Известия ТРТУ. Тематический выпуск “Перспективные системы и задачи управления”. – Таганрог: ТРТУ, 2006. – № 3. – С. 235-238.
4. *Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.* Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990.
5. *Кочкаров А.М.* Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. – Нижний Архыз: РАН САО, 1998.