УДК 681.322

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ УПРАВЛЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫМИ ПОТОКАМИ

Лойко Валерий Иванович
заслуженный деятель науки РФ, д.т.н., профессор

Параскевов Александр Владимирович
соискатель
Чемеркина Анастасия Александровна
студентка факультета прикладной информатики

Кубанский государственный аграрный университет, Краснодар, Россия

В статье рассматривается адаптация математической модели расчета экономических параметров управления городскими транспортными потоками. Рассмотрены необходимые условия применения метода.

Ключевые слова: ТРАНСПОРТНЫЙ ПОТОК, АВТОМОБИЛЬНАЯ ДОРОГА, ПЛАТА ЗА ПРОЕЗД, ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ, РАВНОВЕСИЕ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ.

UDC 681.322

MATHEMATICAL MODEL OF ECONOMIC FACTORS ACCOUNT IN TRAFFIC CONTROL

Loiko Valery Ivanovich
Honoured Science Worker of Russian Federation, Dr. Sci. Tech., professor
Paraskevov Alexander Vladimirovich
candidate for degree
Chemerkina Anastasia Alexandrovna
student

Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

We discuss adaptation of mathematical model city road network equilibrium parameters. Cases of exploitation on city roads are considered as well.

Keywords: TRANSPORT STREAM, AUTOMOBILE ROAD, FARE, ECONOMIC EFFICIENCY, ROAD NETWORK EQUILIBRIUM, MATHEMATICAL PROGRAMMING.

В данной статье, модель равновесия транспортной сети с очередями при эластичном спросе используется для достижения равновесия спроса и предложения при введении платы за проезд по городским улицам. Далее, найдём модель платного отрезка транспортной сети, для того чтобы удалить образование очередей, и привести фактический спрос к допустимому уровню, при условии удовлетворения нормам загрязнения окружающей среды. Также мы увидим, что модель платного отрезка транспортной сети, способная сдержать спрос на поездки в пределах заданного уровня, не единственная в своём роде. Метод двухуровневого математического программирования, основанный на задании критериев, разработан для определения наилучшей модели платного дорожного объекта среди всех возможных вариантов.

Спрос на каждом отрезке «отправление – прибытие» (О-П) описывается, как функция общих затрат на поездку. При отсутствии платы максимально возможный спрос приводит к возникновению заторов и очередей на наиболее загруженных участках городской транспортной сети.

Уравнение «ограничение пропускной способности»

$$\begin{cases} \sum\limits_{r\in R} f_r = d_w \quad (1-1) \\ \sum\limits_{r\in R} f_r d_{ar} = n_a \quad (1-2) \\ n_a \le C_a \quad (1-3) \\ f_r \ge 0 \quad (1-4) \end{cases} \qquad (1)$$

Предопределяет спрос на поездки на всех отрезках Отправление - Прибытие и его распределение на сети с ограниченной пропускной способностью и перенаправлением потоков на перегруженных транспортных дугах.

В системе уравнений (1):

Уравнение (1-1) – ограничение спроса;

Уравнение (1-2) – ограничение для сохранения потока транспортной сети;

Неравенство (1-3) – ограничение пропускной способности;

Неравенство (1-4) – условие неотрицательности транспортного потока;

Переменные:

w – отрезок транспортной дуги городской дорожной сети;

a – дуга;

r – маршрут;

d_w – спрос на отрезке О-П (количество транспортных средств, имеющих намерение проехать по дуге/отрезку в течение 1 часа);

v_a – транспортный поток на дуге $a \in A$ (количество автомобилей/1 час);

V - вектор всех потоков дуги;

f_r – транспортный поток на маршруте r (количество АМТ / 1 час);

l_a – доля АМТ, перераспределенного в объезд пробки;

$D_w^{-1}(d_w)$ – обратная величина функции спроса;

C_a – пропускная способность дуги а (количество транспортных средств / 1 час);

A – множество дуг транспортной сети;

W – множество отрезков в транспортной сети;

R – множество маршрутов;

$d_{ar} = 1$,если маршрут используется на отрезке а, в остальных случаях $d_{ar} = 0$.

Уравнение «равновесие транспортной сети с эластичным спросом и ограничением пропускной способности, и перенаправлением очередей на перегруженных транспортных дугах» [3].

$$\begin{cases} \sum_{a\in A} c_a d_{ar} + \sum_{a\in A} l_a d_{ar} = c_w \\ \sum_{a\in A} c_a d_{ar} + \sum_{a\in A} l_a d_{ar} \geq c_w \end{cases}, \text{ при} \qquad (2)$$

$$\begin{matrix} f_r > 0 \\ f_r = 0 \end{matrix}, \text{ где } r\in R \text{ и } w\in W \qquad (3)$$

$$\begin{cases} D_w^{-1}(d_w) \leq c_w \\ D_w^{-1}(d_w) = c_w \end{cases}, \text{ при } \begin{matrix} d_w = 0 \\ d_w > 0 \end{matrix}, \text{ где } w\in W \qquad (4)$$

$$\begin{cases} l_a = 0 \\ l_a \geq 0 \end{cases}, \text{ при } \begin{matrix} n_a < c_a \\ n_a = c_a \end{matrix}, \text{ где } a\in A \qquad (5)$$

(5).1 т.е. пропускная способность дуги c_a больше, чем количество транспорта c_a, следовательно $c_a > d_a$

(5).2 Распределение очередей (l_a) на дуге положительно при c_a (пропускной способности) равной вектору всех потоков.

Анализируя приведенные выше ограничения становится отчетливо ясно, что:

1) n вектор всех потоков дуги а рассматривается как направленность потока на ту или иную дугу. При этом он тесно соотносится с пропускной способностью дуги;

2) l_a (при $a\in A$)- степень перенаправленности потока на перегруженных транспортных дугах измеряется в отношении к 0. Это означает, что при:

2.1) l_a=0 (пробки, затора на дороге нет) $n_a < c_a$, следовательно можно сделать вывод о том, что дорога не занята (нет очереди и предел пропускной способности $C_a = \max$, при котором возникают очереди не достигнут);

2.2) $l_a \geq 0$ (некая часть транспортного потока объезжает, постепенно создающуюся пробку), то есть при $n_a = c_a$, значит распределение очередей (величина l_a) положительно при пропускной способности дуги равной транспортному потоку на дуге. Проще говоря, количество автотранспорта на транспортной дуге равно или немного меньше пропускной способности;

2.3) l_a<0 (полноценная пробка) Учитывая ограничение пропускной способности ($n_a \leq c_a$), означает, что, математически, величина, отражающая перенаправление автомобилей, в данном случае будет отрицательна.

3) не будет «проигравших» до тех пор, пока размер платы будет превышать показатели длины очереди, поскольку плата за безостановочный проезд замещает потерянное в пробке время и расходы на ГСМ.

При определении размера тарифов получим не конкретное число, а некую область значений, способных сдерживать спрос на поездки ниже заданного уровня или равном ему.

Перейдем к модели двухуровневого математического программирования с помощью введения второй целевой функции.

В качестве функции можно определить:

1) величину общего спроса на поездки;

2) устранение излишка автомобилей при достижении уровня максимальной пропускной способности;

3) максимизацию общей величины прибыли полученной от сбора платы за проезд.

1. Существуют тарифы, способные сдерживать спрос на заданном уровне или ниже него, а вышеуказанный метод не обеспечивает определение наиболее желаемого решения. Поэтому нам необходимо принять во внимание вторую целевую функцию для того, чтобы выбрать лучшую схему из всех возможных тарифов и из всех возможных решений. Многие альтернативные системы обслуживания могут быть адаптированы для выбора улучшенной схемы тарифов.

Формула общего реализованного спроса, обозначенного как F1, выглядит следующим образом:

$$F_1(u,d(u)) = \sum_{w\in W} d_w \qquad (6)$$

где u – вектор тарифов.

Целевая функция для устранение «излишка потребителей», обозначенная F2, может быть определена как:

$$F_2(u,d(u)) = \sum_{w\in W}\int_0^{d_w} D_w^{-1}(x)dx - \sum_{w\in W} c_w d_w \qquad (7)$$

Общая величина прибыли от сбора платы, обозначенная как F3, может быть определена как:

$$F_3(u,v(u)) = \sum_{a\in A} u_a v_a \qquad (8)$$

Заметим, что все существующие модели введения платы за проезд стремятся к минимизации транспортных расходов при фиксированном спросе на поездки. А, в случае с эластичным спросе, минимизация общей величины транспортных расходов не подходит в качестве целевой функции, поскольку этого можно достичь путем минимизации общей величины спроса на поездки, и абсолютно нереальные решения могут быть получены в результате приведения спроса к нулю, либо установления нереально высоких тарифов.

Конечный результат выбранных тарифов целиком и полностью зависит от выбранной целевой функции. В общем, целевой функцией может быть:

- F1, если введение платы производится для контролирования уровня количества автомототранспортных средств, с помощью установления высоких тарифов;
- F2 может быть выбрана, если введение платы производится с целью эффективного использования транспортной сети, при предотвращении перегрузки городских автодорог или повышенного загрязнения окружающей среды.
- F3, если введение платы за проезд используется для получения дополнительных источников финансирования транспортной инфраструктуры.

В качестве целевой, также может быть функция, комбинированная из трех.

Необходимо упомянуть, что максимизация пользователей по сути приблизительно эквивалентна максимизации общей величины спроса на поездки. Например, рассмотрим следующую экспоненциальную функцию спроса:

$$d_w = A_w \exp(-c_w / B_w) \quad \text{,где} \tag{9}$$

$$A_w > 0, B_w > 0, w \in W \tag{10}$$

где Aw и Bw – параметры. Aw может быть рассмотрен как потенциальный спрос, а Bw – имеет ту же размерность, что и c_w (общие издержки). С помощью данной специфической формы функции спроса не трудно определить, что какой бы ни был уровень реализованного спроса (d_w) это может быть излишек потребителей.

$$F_2(u,d(u)) = \sum_{w\in W} \int_0^{d_w} D_w^{-1}(x)dx - \sum_{w\in W} c_w d_w =$$
$$= \sum_{w\in W} \int_0^{d_w} - B_w \ln(x/A)dx + \sum_{w\in W} B_w \ln(d_w/A)d_w = \sum_{w\in W} B_w d_w \tag{11}$$

Поэтому, излишек потребителей пропорционален реализованному спросу на поездки на каждом отрезке О-П. Максимизация F1 и F2 может привести к похожим результатам, если коэффициенты пропорциональности Bw, w ∈ W одинаковы на всех отрезках О-П. [7]

Выбор модели введения платы за проезд, удовлетворяющей физическим и экологическим ограничениям, можно сформулировать в следующем виде:

$$\max imizeF(u,d(u),v(u))$$
$$где\begin{cases} v_a(u) \le C_a, a\in A \\ u_a \ge 0, a\in A \end{cases} \tag{12}$$

Где d(u) и v(u) берутся из:

$$\max\ imize_{d,v} \sum_{a\in A} \int_0^{v_a} c_a(x,u_a)dx - \sum_{w\in W} D_w^{-1}(y)dy$$
$$где$$
$$\sum_{r\in R} f_r = d_w, w\in W$$
$$\sum_{r\in R} f_r d_{ar} = v_a, a\in A \tag{13}$$
$$f_r \ge 0, r\in R$$

$$C_a(x,u_a) = C_a(x) + u_a, a\in A \tag{14}$$

Суть задачи заключается в определении выборе конкретной модели платы за проезд, путём совершенствования целевой функции (целевая функция может быть любой из F1, F2 и F3). Это реализуется с помощью включения в расчеты влияния эффекта введения платы на величину спроса и выбор маршрута. Также следует учесть, что транспортный поток не должен превышать физической пропускной способности (в противном случае будут образовываться пробки и метод сойдёт на нет) и экологических норм. Замечу, что в данной модели, ограничение пропускной способности более приближено к верхнему пределу, чем к нижнему, так как весь смысл метода заключается в распределении транспортных потоков, именно для устранения пробок, а отнюдь не в том, чтобы устранить дорожное движение как таковое. [1]

Алгоритм SAB.

Уравнения двухуровневой модели введения платы за проезд могут быть решены с помощью алгоритма, основанного на анализе чувствительности (SAB). Этот алгоритм может быть широко использован в решении задач 2-х уровневого контроля за транспортными потоками. При применении алгоритма SAB, анализ чувствительности используется для определения производных равновесия спроса на поездки d(u), и равновесия транспортного потока v(u), по отношению к плате установленной на транспортных дугах u. С известными производными целевая функция верхнего уровня и ограничения пропускной способности, заданные неявно, нелинейные функции тарифов платы за проезд нелинейно приближаются по формуле Тейлора. Алгоритм SAB словесно описан ниже:

0) Определение первоначального множества схем введения платы за проезд $u^{(0)}$. n = 0.
1) Путем решения задачи равновесия транспортной сети с заданным $u^{(n)}$ определяются значения $d^{(n)}$ и $v^{(n)}$.

2) Используя метод анализа чувствительности для задачи равновесия транспортной сети, рассчитываются производные $\delta d^{(n)}/\delta u$ и $\delta v^{(n)}/\delta u$.

3) Формулировка линейных приближений для целевых функций верхнего уровня и заданных ограничений с помощью полученных производных. Решение конечной задачи линейного программирования для определения вспомогательного решения **y**.

4) Решение уравнения $u^{(n+1)} = u^{(n)} + \alpha^{(n)}(y-u^{(n)})$, где $\alpha^{(n)}$ – заданная величина шага при уменьшении значения. Данный параметр задается следующим уравнением:

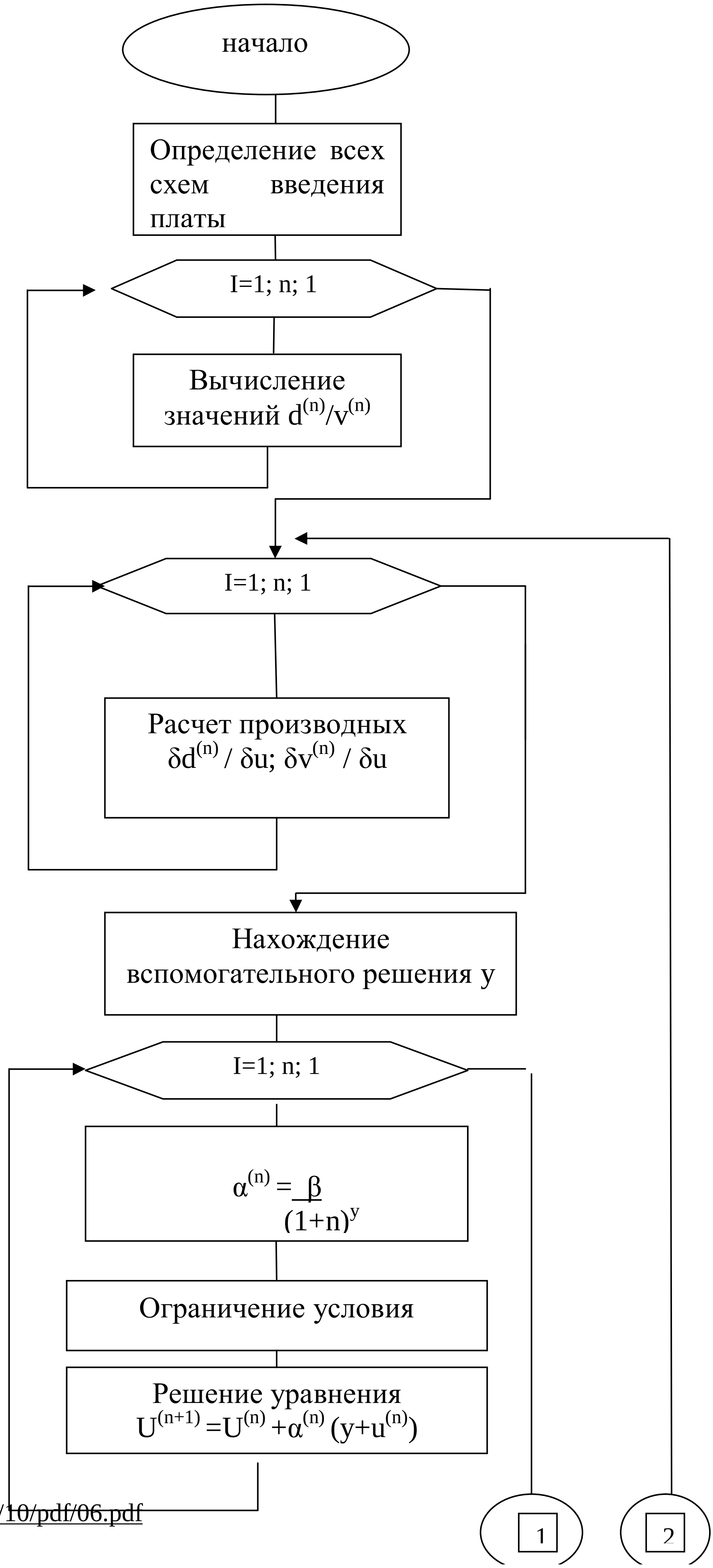
$$a^{(n)} = \frac{b}{(1+n)^{g}} \tag{15}$$

где β,γ – коэффициенты (β > 0, γ ≥ 1). [8]

Для данного метода значение $\alpha^{(n)}$ должно удовлетворять следующим условиям:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \tag{16}$$

Если $\left|u_a^{(n+1)} - u_a^{(n)}\right| \le e$ для всех $a \in A$, то остановить вычисление в предопределенной зоне допустимых значений. В других случаях n = n + 1 и вернуться к пункту 2. Для того, чтобы выбрать наилучшее решение из всех возможных, уравнения двухуровневой модели оптимизации (12-14) и алгоритм SAB (рис.1) обращаются к уравнениям целевой функции верхнего уровня (15-16). Необходимо заметить, что скорость решения алгоритма SAB полностью зависит от выбранных значений параметров β и γ, и косвенно зависят от выбранной целевой функции. Для толерантности $\in = 0{,}1$ и параметров β = 1,0, γ = 1, скорость решения алгоритма приблизительно равна 50 действиям в любом случае.


начало
Определение всех схем введения платы
I=1; n; 1
Вычисление значений d(n)/v(n)
I=1; n; 1
Расчет производных δd(n) / δu; δv(n) / δu
Нахождение вспомогательного решения y
I=1; n; 1
α(n) = β / (1+n)y
Ограничение условия
Решение уравнения U(n+1) =U(n) +α(n) (y+u(n))
1
2

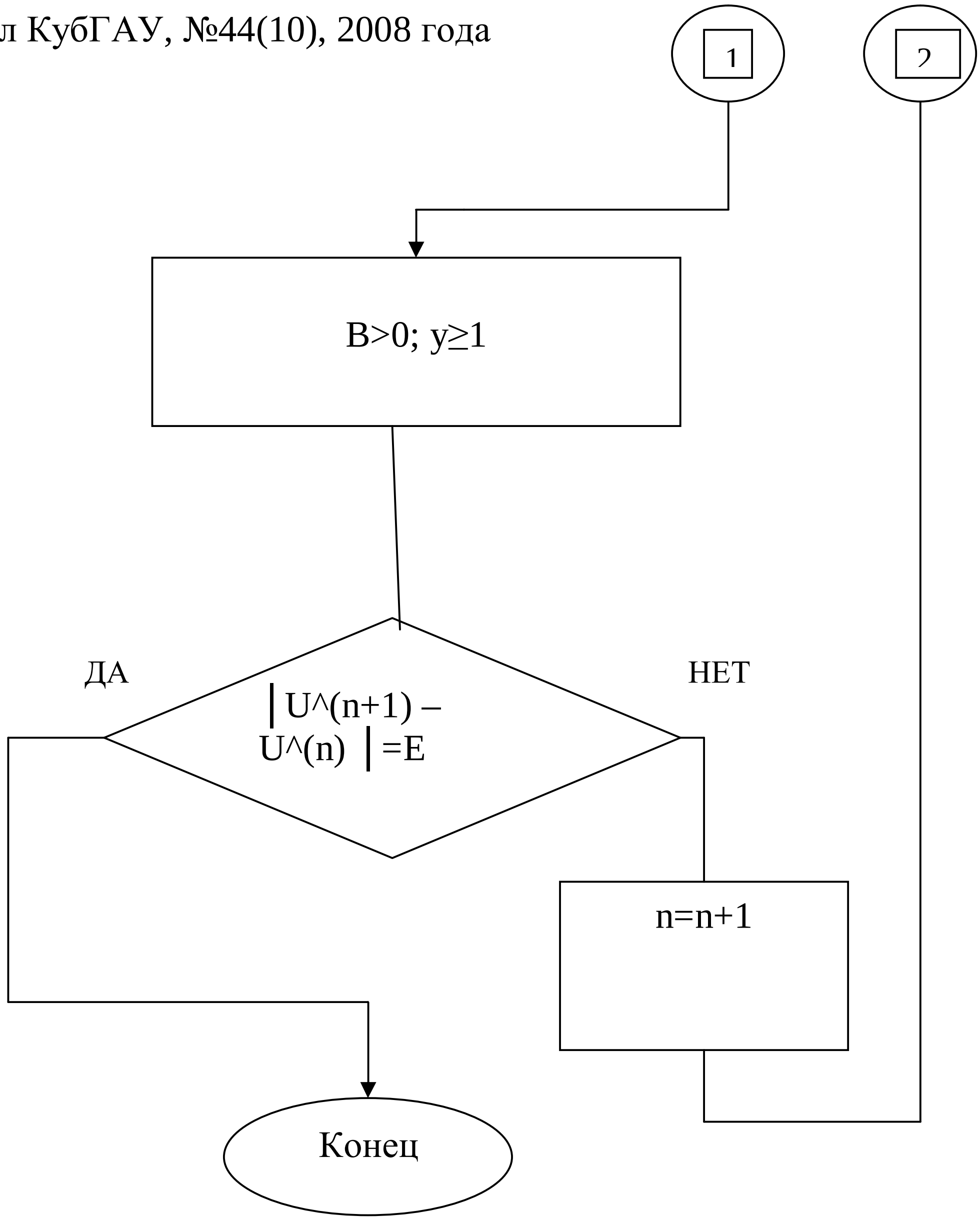


Рисунок 1 Блок-схема алгоритма SAB

Заключение

Были сделаны следующие выводы.

1) Как и ожидалось, максимизация общего реализованного спроса и максимизация излишка потребителей приводит к похожим результатам, но улучшенные модели введения платы за проезд существенно различаются. Этому может быть следующее объяснение: из-за существования большого множества решений размеры платы, существует некоторая степень свободы, в самой схеме сбора платы. Различные решения размера платы, также могут быть получены из самого алгоритма SAB (рис.1).

2) Модель равновесия транспортной сети при эластичном спросе с ограничением пропускной способности предоставляет приблизительное решение задачи максимизации общей величины реализованного спроса, или минимизации излишка потребителей. Это решение можно охарактеризовать как то, которое в наибольшей степени устраняет очереди на загруженных участках дуг, при полном использовании пропускной способности дуги. [4]

3) Максимизация прибыли приводит к более высоким тарифам, чем остальные целевые функции. В целом, рост тарифов приводит к снижению общей величины реализованного спроса на поездки. При низких уровнях тарифов, высокие тарифы могут повлиять на снижение транспортных потоков, происходит рост чистой прибыли. Максимальная прибыль будет получена при таком уровне тарифов, после которого повышение будет компенсироваться снижением спроса на перевозки.

Отсутствие какого-либо контроля на дороге может привести к перегрузке дороги, а на загруженных участках станут образовываться очереди из транспортных средств, что в свою очередь приведет к потерям времени или повышенному загрязнению окружающей среды. В этой статье изучался вопрос использования введения платы за проезд для сдерживания транспортных потоков на желаемом уровне. Определить величину тарифов для транспортной дуги можно решив задачу равновесия очередей для транспортной сети при эластичном спросе, путем замещения рассчитанной задержки очередей эквивалентным размером платы. Тем не менее модель введения платы за проезд, и способная сдерживать спрос на поездки на желаемом уровне имеет не единственный вариант решения. Эта статья показывает как подход двухуровневого программирования может быть использован для выбора наиболее желаемого варианта из всех возможных решений, удовлетворяющих физическим и экологическим ограничениям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Параскевов А.В. Совершенствование управления дорожным движением (обзор), Научный журнал КубГАУ, №37(3), 2008 года, http://www.ej.kubagro.ru/
2. Параскевов А.В., Чемеркина А.А. Совершенствование модели управления транспортными потоками, Научный журнал КубГАУ, №42(8), 2008 года http://www.ej.kubagro.ru/
3. Sheffi, Y. Городские транспортные сети: Анализ устойчивости с помощью методов математического программирования, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1985, New Jersey.
4. «Ferrari» Цена на проезд и равновесие транспортной сети. Транспортное исследование Б, 1995 №29, 357-372.
5. Evans A. W.Цены за проезд в пробках: когда это хорошая политика? Journal of Transport Economics and Policy 1992 №26, 213-243.
6. Лойко В.И., Параскевов А.В., Чемеркина А.А. Разработка и применение инструментального средства расчета характеристик городских автомобильных дорог (на примере г.Краснодара), научный журнал КубГАУ, №43(9), 2008 года http://www.ej.kubagro.ru/
7. Параскевов А.В. «Предпосылки совершенствования управления дорожным движением» ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЭКОНОМИКЕ И ОБРАЗОВАНИИ: Материалы международной научно-практической конференции студентов и аспирантов «Информационные технологии в экономике и образовании», посвященной 95-летию Российского университета кооперации. – М.: Российский университет кооперации, 2008. – 190с.
8. Параскевов А.В. «Адаптация математической модели управления транспортными потоками», всероссийская научно-практическая конференция «Институциональные проблемы экономического роста», Казанский государственный финансово-экономический институт.